

不連続面が折れ曲がる場合の強不連続解析の精度検証<sup>†</sup>

杉 本 環\* 矢 富 盟 祥\*\* 鱸 洋 一\*\*\*

On the Examination of the Strong Discontinuity Analysis  
for a Kinking Discontinuous Surface

by

Tamaki SUGIMOTO<sup>\*</sup>, Chikayoshi YATOMI<sup>\*\*</sup> and Yoichi SUZUKI<sup>\*\*\*</sup>

The purpose of this paper is to examine the accuracy of the analysis of the strong discontinuity with a kinking discontinuous surface. We first examine the path independent J-integral and the E-integral formula for a damage model with a kinking cohesive region. As a result, we find that the strong discontinuity analysis based on the E-integral has a high accuracy in view of the energy release rate even when the discontinuous surface kinks.

**Key words:** Strong discontinuity, Kinking discontinuous surface, Fracture energy, Energy release rate, J-integral, E-integral

## 1 緒 言

材料の強度並びに構造物の耐荷力を知ること、そのための材料の破壊のメカニズムを知るとは工学上極めて重要な問題である。破壊のメカニズムとは、物体に与えられた過大な荷重により、ひずみの局所化が生じ、さらにき裂、即ち不連続変位の発生・進展により、やがて耐荷力を失い破壊へと至る一連の現象と考えられる。そのような問題に対して、近年の計算機の急速な発達に伴い、従来実験のみで行われていた材料の強度や構造物の耐荷力測定にも、破壊のメカニズムを考慮した有限要素法による数値解析による手法が取り入れられるようになり、現在も種々の有限要素法による数値解析手法が盛んに研究されている。

そのような有限要素法の数値解析手法の1つとして、破壊力学の分野で行われている要素辺上で変位の不連続面の進展を考える手法に対し、最近では、メッシュの再分割を必要とせず、き裂の進展方向を任意に考えることが可能な、有限要素内部において不連続場を組み込んだ手法が注目を浴びている。1980年代後半、Ortizら<sup>1)</sup>は、有限要素内部においてひずみ速度の不連続を表現するために、ひずみ速度場の不連続面を有限要素内部に組み込み、ひずみの局所化を表現する手法を提案している。そして更に、有限要素内部に変位の不連続を許した強不連続解析と呼ばれる手法がSimoら<sup>2)</sup>、Oliver<sup>3), 4)</sup>そしてLarssonら<sup>5)</sup>等によって提案されている。

変位の不連続を有限要素内部に組み込むという手法は、もともとシェル等の有限要素解析において、計算による応力場が厳密解と一致しないことに対する解決法として用いられている特殊な要素、具体的には各節点では変位の連続性を保ったまま要素辺上で変位の不連続を許

容し、応力場を厳密解に近づけることを目的とした非適合要素を基に開発されたものである。

その結果として、ひずみの局所化に対する有限要素解析において指摘されていた問題、即ちひずみ軟化挙動を表す構成式を用いた有限要素解析において荷重一載荷点変位が要素分割に依存する問題も、強不連続解析を用いることにより克服出来ることが既往の研究報告<sup>3), 4)</sup>で述べられている。以上のように非適合要素を用いた強不連続解析は、従来の手法に比べ工学上多くの利点を有し、今後の研究が期待される手法である。

しかしながら、前述のように強不連続解析は多くの利点を有した手法ではあるが、解析の精度が悪ければ、工学的に無意味である。しかしながら1次元の理論解がある場合を除き、強不連続解析結果の精度を検証したものは著者らの知る限り皆無である。そこで筆者らは既往の研究報告<sup>6)</sup>において、破壊力学の重要なパラメータの1つである破壊エネルギーに対し経路独立積分を用いた精度検証により、き裂前方に結合応力領域を有する不連続面において、不連続面が直進する場合の強不連続解析の妥当性検討を試み、強不連続解析が精度の良いものであることを実証した。その際、周知のJ積分と、不連続面内に結合応力領域が存在する場合に対して新たに誘導したE積分を使用し、J積分よりE積分の方が破壊エネルギーの精度検証に有用であることも確認した。なお、ここでは、変位が不連続であり結合応力がゼロである部分をき裂、そして、き裂とその前方の結合応力領域を含めた全体を不連続面と呼んでいる。

しかし上記の研究報告は不連続面が直進する場合に限定されていた。そこで本研究では、更に工学上重要かつより興味深い問題であり、実際のき裂進展において頻繁

† 原稿受理 平成13年9月10日 Received Sep. 10, 2001

\* 金沢大学大学院 〒920-8667 金沢市小立野, Graduate Student, Kanazawa Univ., Kodatsuno, Kanazawa, 920-8667

\*\* 正会員 金沢大学工学部土木建設工学科 〒920-8667 金沢市小立野, Dept. of Civil Eng., Kanazawa Univ., Kodatsuno, Kanazawa, 920-8667

\*\*\* 五大開発(株)応用工学研究所 〒921-8051 金沢市黒田, Applied Mechanics Inst., Godai Development Corp., Kuroda, Kanazawa, 921-8051

に生じる不連続面が折れ曲がる場合の強不連続解析を行い、そして破壊エネルギーの精度検証により、Oliver<sup>3), 4)</sup>の提案する強不連続解析の妥当性の検討を試みる。そしてエネルギー解放率を求める際、周知のJ積分公式と既往の研究報告<sup>6)</sup>で使ったとき裂前方に結合応力領域が存在する場合のE積分公式により、不連続面が折れ曲がる場合の両式の有効性を検討し、J積分とE積分の比較検討を行い、各積分公式の有用性について考察する。

## 2 強不連続解析

本論文では、Oliver<sup>3), 4)</sup>の提案する強不連続解析の妥当性の検討にあるので、強不連続解析の詳細に関しては、上記論文を参照して頂きたい。ここでは、単にその概要を述べるものとする。

まず不連続変位場  $\mathbf{u}$  を表現するため、次式を定義し、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + H_s(\mathbf{x})[\mathbf{u}](\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

上式を空間微分することにより不連続面上で非有界となるひずみ場  $\boldsymbol{\varepsilon}$  を得る。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^s = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta_s([\mathbf{u}] \otimes \mathbf{n})^s \quad (2)$$

ここで、 $\bar{\mathbf{u}}$  は変位の連続部分、 $H_s$  は不連続面  $S$  上での Heaviside の単位関数、 $[\mathbf{u}]$  は変位ジャンプ関数、 $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  はひずみの連続部分、 $\delta_s$  は不連続面  $S$  上で非有界となる Dirac のデルタ関数、 $\mathbf{n}$  は不連続面の単位法線ベクトルであり、 $(\cdot)^s$  はテンソルの対称部分を意味する。

また、通常の有限要素法の定式化と同様、力のつりあい式、荷重境界条件、変位境界条件等の支配方程式に加え、強不連続解析で考慮しなければならない条件である不連続面上での表面力の連続性を組み合わせ、次式の強不連続解析の境界値問題の支配方程式を得る。

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} &= \mathbf{0} && \text{in } \Omega \setminus s \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* && \text{in } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v} &= \mathbf{t}^* && \text{in } \Gamma_\sigma \\ \boldsymbol{\sigma}^+ \mathbf{n} &= \boldsymbol{\sigma}^- \mathbf{n} && \text{in } s \\ \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n} &= \boldsymbol{\sigma}^+ \mathbf{n} (= \boldsymbol{\sigma}^- \mathbf{n}) && \text{in } s \\ \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma &= \partial \Omega, \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}$  は応力、 $\mathbf{f}$  は物体力、 $\mathbf{u}^*$  は既知変位、 $\mathbf{v}$  は物体境界の単位法線ベクトル、 $\mathbf{t}^*$  は既知表面力、 $\Gamma_u$  は変位境界、 $\Gamma_\sigma$  は応力境界、また、 $\boldsymbol{\sigma}_s$  は不連続面内の応力、 $\boldsymbol{\sigma}^+$ 、 $\boldsymbol{\sigma}^-$  は、それぞれ  $\Omega_s$  から  $s$  の上下面への応力の極限值である。次にこれらの支配方程式を弱形式化し、応力やひずみを有限要素近似した後、弱形式化された支配方程式に代入すると、結局、力のつりあい式と不連続面上での表面力のつりあい式である次式の連立方程式を得る。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_e^T \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega_e &= \dot{\mathbf{f}}_e^{ext} \\ \int_{\Omega_e} \mathbf{G}_e^{*T} \boldsymbol{\sigma}^h d\Omega_e &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4)$$

上式を未知数である変位速度ベクトルと要素内部の不連続変位速度ベクトルについて整理すると、結局、強不連続解析で解くべき要素接線剛性方程式は次式となる。

$$[\mathbf{K}_e] \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_e \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_e^{ext} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}^{lg} \mathbf{B}_e & \mathbf{B}_e^T \mathbf{C}^{lg} \mathbf{G}_e \\ \mathbf{G}_e^{*T} \mathbf{C}^{lg} \mathbf{B}_e & \mathbf{G}_e^{*T} \mathbf{C}^{lg} \mathbf{G}_e \end{bmatrix} d\Omega_e \quad (6)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{u}}_e$  は節点変位速度ベクトル、 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_e$  は要素不連続変位速度ベクトル、 $\dot{\mathbf{f}}_e^{ext}$  は要素荷重速度ベクトル、 $\mathbf{B}_e$  は変位-ひずみマトリックス、 $\mathbf{C}^{lg}$  は接線構成マトリックス、また  $\mathbf{G}_e$  は式 (2) を有限要素近似する際に、式 (2) 右辺第2項の非有界項を有限要素近似する際に生じるマトリックス、そして  $\mathbf{G}_e^*$  は不連続面の表面力の連続性を表す式 (3)<sub>5</sub> を有限要素近似する際に使用されるマトリックスである。このように、強不連続解析では、従来、通常仮定されていた、有限要素内の変位の連続性を持たず、超関数の1種である Dirac のデルタ関数の近似を行うなどの、種々の新しい技法が組み込まれている。従って、その精度の検証は非常に重要な課題となる。

## 3 等方損傷モデル

解析で使用する等方損傷モデルは次式で仮定される。<sup>3)</sup>

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-d)\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (7)$$

ここで、 $\mathbf{C}$  は等方線形弾性構成テンソルであり、 $d$  は損傷変数と呼ばれるもので、ひずみによりその値を0から1へと変化させることにより、材料の剛性が変化し、ひずみ軟化を表現することが可能となる。その簡単な例として、1次元の場合の構成関係を Fig. 1 に図示する (図中の  $E$  はヤング率である)。図中の  $H$  は軟化パラメータと呼ばれるものであり、材料の引張強度  $\sigma_u$ 、ヤング率  $E$ 、破壊エネルギー  $G_f$  によって与えられ、Oliver<sup>3), 4)</sup> が本質的な軟化パラメータと呼んでいる  $\bar{H} = -\sigma_u^2/2EG_f$  と有限要素内部の不連続面の幅  $k$  によって、次式のように与えられる。

$$H = k\bar{H} \quad (8)$$

上記の様な損傷モデルの場合は、構成関係自体に材料の破壊エネルギー (破壊じん性値)  $G_f$  が与えられていることに注意したい。例えば、Fig. 1 での、 $\sigma \sim \varepsilon$  関係において、 $\varepsilon_0$  から  $\varepsilon_{max}$  までの面積が破壊エネルギーに等しい。この事により、き裂進展時に解放されるエネルギー解放率の値は常に材料の破壊エネルギーと等価となる。従って、単なるき裂をモデルとする破壊力学の場合と異なり、エ

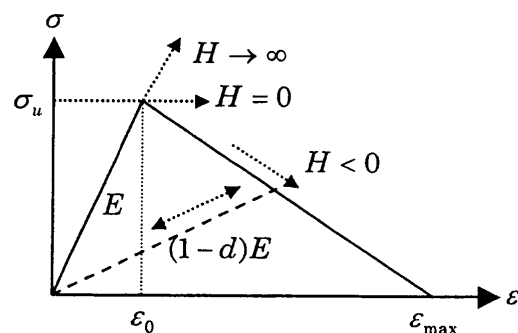


Fig. 1. Constitutive relation.

エネルギー解放率の理論値が既知となる。従って、き裂進展時のエネルギー解放率を求め、その値を破壊エネルギーと比較することで、エネルギー解放率の意味における強不連続解析の精度検証を行うことが出来る。

#### 4 経路独立積分

Fig. 2のように2次元非線形超弾性体内において、結合応力が作用し、準静的に進展する不連続面を考える。本論文では、その不連続面先端  $a(t)$  から  $b(t)$  までを結合応力領域、その一端をき裂先端と呼ぶ。結合応力領域での応力  $\sigma$  は開口変位  $\delta$  の関数  $\sigma(\delta)$  となる(文献3)参照)。1次元の場合を Fig. 3 に示す。また不連続面先端を含む基準系に固定された正則な閉領域を  $A$ 、 $A$  の境界を  $\Gamma$  とし、 $\Gamma$  上の表面力、変位をそれぞれ  $s, u$  とする。

##### 4.1 J積分

Fig. 2のように座標をとった時、Eshelby,<sup>7)</sup>Rice<sup>8)</sup>等によって提案されたき裂が直進する場合のエネルギー解放率を求める経路独立なJ積分の公式は次式で与えられる。

$$J = \int_{\Gamma} \left( w dy - s \cdot \frac{\partial u}{\partial x} ds \right) \quad (9)$$

ここで、 $w$  は  $\Gamma$  上のひずみエネルギーである。Rice は、不連続面が直進する場合、式(9)のJの値が破壊エネルギーに一致することを証明している。<sup>9)</sup>ここでは、その不連続面が折れ曲がる場合、式(9)のJ積分の値と破壊エネルギーの関係を考察する。ただし、ここでは、き裂の先端  $b(t)$  は、直進していると仮定する。

今、Fig. 2において境界  $\Gamma$  を結合応力領域を含みつつ、幅ゼロの不連続面  $\Gamma'$  への極限である  $\Gamma$  に縮小する(Fig. 2では、 $\Gamma$  を点線で記してあり、また分かり易くするために、 $\Gamma$  に幅を持たせて記してある。)。この時、上式は、形式的に、

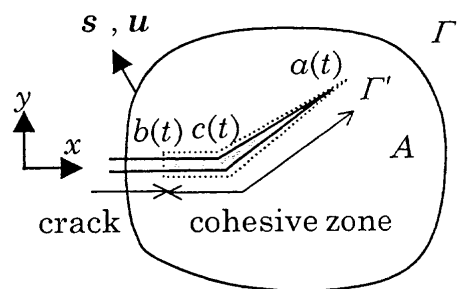


Fig. 2. Crack and cohesive zone.

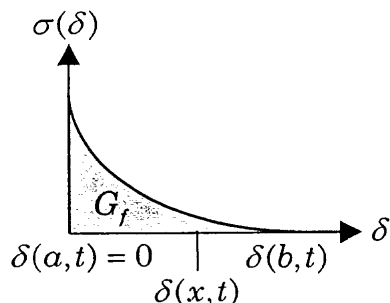


Fig. 3. Relationship between the cohesive stress and COD.

$$J = \int_{\Gamma} w dy - \int_{\Gamma} s \cdot \frac{\partial u}{\partial x} ds \quad (10)$$

となることは簡単に証明出来る。ここで、不連続面  $s$  の上、下面の変位をそれぞれ  $u^+, u^-$  とする。その時、式(3)<sub>4,5</sub>の力のつりあい式より、領域  $A$  から  $s$  への極限である表面力  $(\sigma^+ n)$ 、 $(\sigma^- n)$  と、不連続面上の表面力  $(\sigma^- n)$  は、連続である。一方、式(9)中のひずみエネルギー  $w$  は、応力、ないしひずみが、不連続面上で、一般的に連続とは限らないので、 $w$  自身も連続とは限らない。そこで、今、Fig. 4のように結合応力領域に沿った  $l$  軸を考える。は、 $x, y$  座標系と関数関係にあり、Fig. 2およびFig. 4に示したように、不連続面の折れ曲がり点を  $c(t)$  とおき、 $b(t)$  から  $c(t)$  までは、 $dy = 0$  である事に注意すると、式(10)右辺の第1項は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} w dy &= \int_b^a w^+ \frac{dy}{dl} dl + \int_a^b w^- \frac{dy}{dl} dl \\ &= \int_c^a [w] \frac{dy}{dl} dl \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ここで、 $[w] = w^+ - w^-$  である。また式(10)右辺第2項は、

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma} s \cdot \frac{\partial u}{\partial x} ds &= - \left( \int_a^b (\sigma^+ n) \cdot \frac{\partial u^+}{\partial x} dx + \int_a^b (\sigma^- n) \cdot \frac{\partial u^-}{\partial x} dx \right) \\ &= \int_a^b (\sigma_s n) \cdot \frac{\partial (u^+ - u^-)}{\partial l} \frac{dl}{dx} dx \\ &= \int_a^b (\sigma_s n) \cdot \frac{\partial \delta}{\partial l} dl \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial l} \left[ \int_0^{\delta(b,l)} \sigma_s(\delta) n \cdot d\delta \right] dl \\ &= \int_0^{\delta(b,l)} \sigma_s(\delta) n \cdot d\delta = G_f \end{aligned} \quad (12)$$

となり、結局式(10)のJ積分値は式(11)の値だけ破壊エネルギーとは異なる値になることが分かる。

以上からすぐ分かる事だが、式(9)において、閉領域  $A$  の境界  $\Gamma$  に、最初から、 $A$  内に含まれる不連続面上下の積分を加えれば、その積分値は、破壊エネルギーと一致する。しかしながら、本論文のように、3角形定ひずみ要素を用いて、その中に不連続面を考える場合には、その不連続面両側の応力ないしひずみは等しくなり、結局ひずみエネルギー  $w$  も等しくなるので、式(11)の値はゼロ

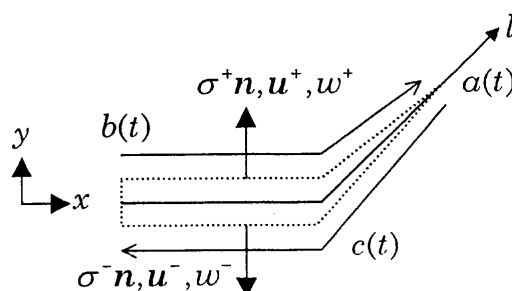


Fig. 4.  $l$ -axis along the cohesive zone.

となり, 式 (9) のような  $\Gamma$  上の経路だけで設定された J 積分の解析値は, 破壊エネルギー  $G_f$  と一致する.

#### 4・2 E 積分

結合応力領域が存在する場合, き裂が単位長さ進展するために消費されるエネルギー, 即ちエネルギー解放率は力学的エネルギー保存則より次式のように定義される.

$$Eb \equiv \int_{\Gamma} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} ds - \left\{ \frac{d}{dt} \int_A W da + \frac{d}{dt} \int_b^a w dl \right\} \quad (13)$$

ここで, ひずみエネルギー  $W$  と結合応力領域での仕事  $w$  は次式で与えられる.

$$W(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dt \quad (14)$$

$$w(\mathbf{x}, t) = \int_0^t (\boldsymbol{\sigma}_s \cdot \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dt \quad (15)$$

従って, き裂が進展せず  $\dot{b}(t) = 0$  であるなら, 式 (13) 右辺は, 物体力がない場合の準静的なつりあい式  $\text{div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  と発散定理により, 次式が成立し,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} ds - \int_b^a (\boldsymbol{\sigma}_s \cdot \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial t} dl = \frac{d}{dt} \int_A W da \quad (16)$$

従って, 式 (13) の右辺はゼロとなる.

また, 結合応力領域での応力  $\boldsymbol{\sigma}$  は開口変位  $\boldsymbol{\delta}$  の関数であるので,  $w$  は次式のように表せる.

$$w(\mathbf{x}, t) = w(\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}, t)) = \int_0^{\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}, t)} \boldsymbol{\sigma}_s(\boldsymbol{\delta}) \cdot \mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\delta} \quad (17)$$

ここで,

$$w(a, t) = 0 \quad \therefore \boldsymbol{\delta}(a, t) = \mathbf{0} \quad (18)$$

であり, また式 (15) より, 次式が得られる.

$$\int_b^a \frac{\partial w(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dl = \int_b^a \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dl \quad (19)$$

式 (16), (18), (19) を式 (13) へ代入すると,

$$Eb = w(b, t) \dot{b} = \left\{ \int_0^{\boldsymbol{\delta}(b, t)} (\boldsymbol{\sigma}_s \cdot \mathbf{n}) \cdot d\boldsymbol{\delta} \right\} \dot{b} = G_f \dot{b} \quad (20)$$

$$\therefore E = G_f \quad (21)$$

となり, 式 (13) の  $E$  の値は破壊エネルギー  $G_f$  と一致する.

次に, 荷重パラメータ  $\beta$  (具体的には, 境界で与えられた荷重, 又は変位の増加を示すスカラー値, 本論文では, 境界に強制変位を与えるので  $\beta$  はその強制変位の値に等しい) を導入し, 式 (13) に, 式 (14), (15) を代入し, 発散定理を用いると, 式 (13) は, 次式のように積分経路上の表面力と変位によって求めることができる.

$$E = \int_{\Gamma} \left\{ \int_0^a \left( \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b} - \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial b} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} \right) d\beta \right\} ds \quad (22)$$

上式をき裂先端に結合応力領域を有するき裂進展時のエネルギー解放率を求める  $E$  積分と呼ぶ. 結局この式は不連続面が直進する場合<sup>9)</sup> また結合応力領域が存在しない場合の  $E$  積分公式<sup>10)</sup> と全く同じ式であり,  $J$  積分と異なり, 折れ曲がり部分を含めた不連続面に沿う積分は全く不要な, 経路独立な積分公式である. この  $E$  積分公式の

誘導の際は, き裂先端  $b(t)$  の直進は仮定していない. したがって,  $E$  積分の値がエネルギー解放率に等しくなるのは,  $J$  積分と異なり, 直進の場合に限られる事なく,  $b(t)$  の任意方向への折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率をも経路独立積分で求めることができるという利点がある. ここで式 (22) を数値解析で計算する場合, き裂の長さが  $b$  のモデル (以下, 基本モデルと呼ぶ) とき裂の長さが  $b + \Delta b$  のモデル (以下, き裂進展モデルと呼ぶ) の 2 つのモデルの解析を行う. 式 (22) 中のき裂長さ  $b$  による偏微分は 2 点差分近似し,  $\beta$  に関する積分は台形公式を用い, 経路積分は表面力と変位をそれぞれ離散化した等価節点表面力  $\mathbf{s}_i$  と節点変位  $\mathbf{u}_i$  を積分経路上の全節点で和をとることにより, 次式を得る.

$$E = \sum_{j=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \beta}{\Delta b} (A - B) \quad (23)$$

$$A = \frac{\widehat{\mathbf{s}}_i^j - \widehat{\mathbf{s}}_i^{j-1}}{\Delta \beta} \cdot \frac{\{\widehat{\mathbf{u}}_i^j + \widehat{\mathbf{u}}_i^{j-1}\} - \{\widehat{\mathbf{u}}_i^j + \widehat{\mathbf{u}}_i^{j-1}\}}{2\Delta b} \quad (24)$$

$$B = \frac{\{\widehat{\mathbf{s}}_i^j + \widehat{\mathbf{s}}_i^{j-1}\} - \{\widehat{\mathbf{s}}_i^j + \widehat{\mathbf{s}}_i^{j-1}\}}{2\Delta b} \cdot \frac{\widehat{\mathbf{u}}_i^j - \widehat{\mathbf{u}}_i^{j-1}}{\Delta \beta} \quad (25)$$

ここで,  $n$  は積分経路上の節点の数,  $\alpha$  は全荷重ステップ数,  $\Delta \beta$  は荷重増分量,  $\Delta b$  はき裂長さ  $b$  の基本モデルとき裂長さ  $b + \Delta b$  とのき裂進展モデルのき裂長さの差であり,  $\widehat{\mathbf{s}}_i$ ,  $\widehat{\mathbf{u}}_i$  と  $\widetilde{\mathbf{s}}_i$ ,  $\widetilde{\mathbf{u}}_i$  はそれぞれ基本モデルとき裂進展モデルの表面力および変位を意味する.

また変位制御の場合の式 (22) の  $E$  積分の物理的意味

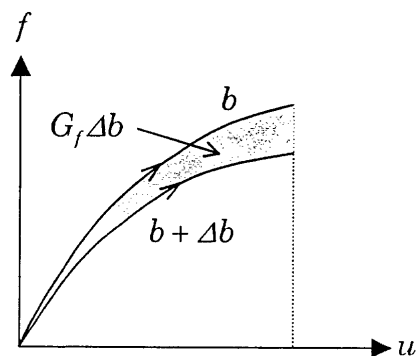


Fig. 5. The change of the work done by a crack extension under a displacement control.

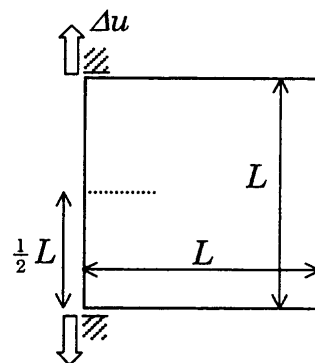


Fig. 6. Boundary value problem.

は、き裂長さ  $b$  の基本モデルとき裂長さが微小量  $\Delta b$  異なるき裂長さ  $b + \Delta b$  のき裂進展モデルとの2つのモデルに対し、最終変位状態 (Fig. 5 中の点線の位置で示される変位状態) に達するまでの仕事の差 (仕事変化率) と等しい事が証明できる。<sup>10)</sup>

### 5 数値解析

境界値問題として、Fig. 6 に示す初期き裂を有する正方形板の引張りを考え、不連続面が解析初期に直進し、その後折れ曲がる場合に、J 積分並びに E 積分を用いた破壊エネルギーの精度検証により Oliver<sup>3), 4)</sup> の提案する強不連続解析の妥当性検討を試みる。また、J 積分と E 積分の比較検討を行い、各積分公式の有用性について議論する。

境界条件として正方形板の左上と左下をそれぞれ上下鉛直方向に強制変位を与える。その際、不連続面の直進を仮定し、その左下の荷点において強制変位の方向を左下45度の向きに変更し、不連続面の進展方向を最大引張り方向と仮定することで、不連続面の折れ曲がり进行を考察する。有限要素解析においては、応力集中を緩和するため荷点は上下端とも2点とする。また、解析は平面ひずみを仮定し、 $L = 9$  [cm] とする。非線形の軟化曲線を求めるため、変位制御型 Newton-Raphson 法を用いた収束計算を行った。

解析で使用する材料定数を Table I に示す。また、解析上のパラメータとして有限要素内部を横切る不連続面の幅  $k$  を  $1.0 \times 10^{-5}$  [cm] とする。この  $k$  の値が解析結果に影響しないことが既往の研究報告<sup>4), 6)</sup> で確認されている。

次に解析モデルの有限要素分割と積分経路を Fig. 7 に示す。要素は3角形定ひずみ要素を用いている。また要素総数 450、節点総数 256 であり、供試体の中心部を囲む太い実線で示された合計 6 本の積分経路をそれぞれ外

側から経路 1, 2, ..., 6 とした。

本論文において、不連続面が供試体左端中央から要素 16 個を横切る基本モデル (き裂長さは要素 10 個分で 3 [cm] である) と 1 要素分の折れ曲がりを含む要素 17 個を横切るき裂進展モデル (き裂長さは要素 11 個分で 3.3 [cm] である) 用い、式 (22) の被積分項の 2 点差分近似を行い、E 積分の解析を行った。従って、不連続面折れ曲がり部分は元の不連続面の長さに比較し、かなり小さいので、本解析での J 積分および E 積分の値は、不連続面折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率に近似的に等しいとも言える。式 (22) 中の強制変位  $\beta = 0$  の時のき裂は、要素内を横切る不連続面に予め結合応力が作用しない状態 (損傷変数  $d = 1$  の状態) を設定している。

次に、最終変位状態での変形図を Fig. 8 に示す。微小な変形を見やすくするために変位を 1000 倍に拡大して図示している。正方形板の変形が、不連続面近傍に局所化している様子が確認出来る。

また、最終変位状態でのき裂と結合応力領域の状態を基準状態の有限要素分割の中心部を拡大した Fig. 9 に図示する。ここで、図の中心にある実線はき裂 (結合応力がゼロである部分) を表しており、点線は結合応力領域を表している。先端の進展の後を追ってき裂先端  $a(t)$  が進展していることが分かる。ここで、積分経路 6 に関しては、経路が囲む領域がき裂先端  $b(t)$  を含んでおらず、J 積分や E 積分による値はゼロなので、経路 1 ~ 5 のみでエネルギー解放率による破壊エネルギーの精度検証を行う。

次に、左上の荷点における荷重-荷点変位曲線を Fig. 10 に図示する。き裂長さが要素 10 個分の基本モデルに対し、き裂長さが要素 11 個分のき裂進展モデルが低い耐荷力を示しながら、やがて両者の曲線が一致する

Table I. Material property.

Young's modulus $E$	29.4	[GPa]
Poisson's ratio $\nu$	0.2	[-]
Fracture energy $G_f$	9.8	[N/m]
Tensile strength $\sigma_u$	2.94	[MPa]
Softening parameter $H$	$-1.5 \times 10^{-6}$	[-]

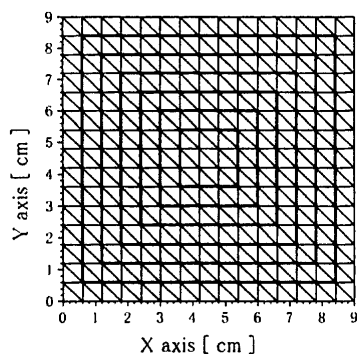


Fig. 7. Finite element mesh and the integral paths.

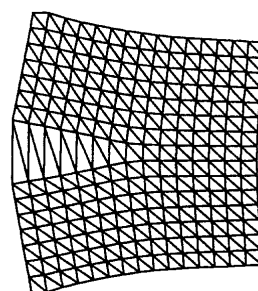


Fig. 8. Deformed mesh.

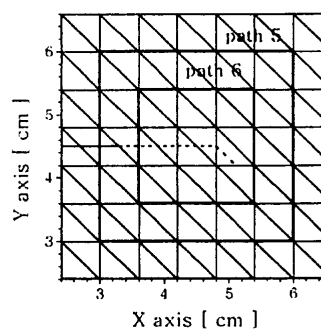


Fig. 9. An extended crack and the cohesive zone.

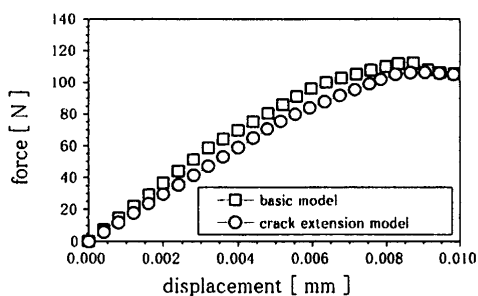


Fig. 10. Force - displacement curve.

ことが分かる。そして式 (22) の E 積分公式を用い、Fig. 7 に図示されている積分経路を用いて E 積分値を求めたものを Fig. 11 に図示する。

Fig. 11 において図中の点線は Table I の解析の入力値である破壊エネルギー  $G_f$  を示しており、前述のように、この破壊エネルギーが J 積分や E 積分により精度良く求まるかによって強不連続解析の精度検証を行うことが出来る。Fig. 11 で明らかなように、図中の□印は点線と一致しておらず、経路ごとに値がばらついていることが分かる。また図中の○印と点線は良く一致しており、実際 E 積分値と破壊エネルギー  $G_f$  との相対誤差は各経路において約 0.25% 以下と非常に精度良い値が得られた。また横軸の経路番号による E 積分の値のばらつきも見られなかった、即ち E 積分の経路独立性が数値解析によって確認出来た。一方、不連続面折れ曲がり時の状態で公式 (9) を用いて計算された J 積分の値は誤差が大きく、経路独立性が失われている。この理由は、J 積分公式 (9) には、ひずみエネルギーの項が含まれ、経路上の応力ないしひずみを計算する必要がある。従って、要素辺に積分経路を設定した場合には、応力、ひずみを計算するのに要素辺上の値を求める補間（面積補正等が使用される<sup>11)</sup>）が必要になり、結局 J 積分値の精度が落ちてしまう。一方 E 積分の方は、式 (23)~(25) から分かるように、精度良く求めることが容易な節点変位と節点力のみでエネルギー解放率

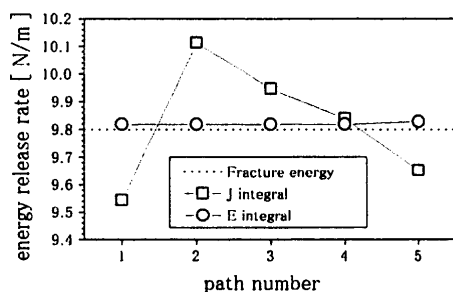


Fig. 11. Energy release rate by the J integral and the E integral.

が計算出来るので、非常に精度の良いエネルギー解放率が得られることになる。著者らは、このことが、強不連続解析のみならず、き裂面が要素辺上に設定される通常のき裂モデルにおいてさえも、J 積分法により、エネルギー解放率を精度良く求めることが出来なかった要因と考える。<sup>12)</sup>

以上より、E 積分により破壊エネルギーが経路独立にかつ精度良く求められたことにより、不連続面の折れ曲がり瞬間後も、強不連続解析の妥当性が検証され、強不連続解析の精度が良いものであることが立証された。

## 6 結 言

本研究において、工学上重要かつより興味深い問題であり、実際のき裂進展において頻繁に生じる不連続面の折れ曲がり瞬間後の強不連続解析を行い、そして破壊エネルギーの精度検証により、Oliver<sup>3), 4)</sup>の提案する強不連続解析の妥当性検討を試み、以下の知見を得た。

(1) 不連続面の折れ曲がり瞬間後の強不連続解析に対しても、エネルギー解放率の意味において、強不連続解析での入力値である破壊エネルギーとの相対誤差が約 0.25% であることから、Oliver の強不連続解析<sup>3), 4)</sup>は精度の良いものであることが分かった。

(2) 上記の精度検証において、積分経路内で不連続面が折れ曲がる場合でも、周知の J 積分に比べ E 積分は経路独立かつ精度良くエネルギー解放率が求められることから、E 積分による解析は強不連続解析の精度検証に極めて有用な手法であることが分かった。

## 参 考 文 献

- 1) M. Ortiz, Y. Leroy and A. Needleman, *Comput. Meths. Appl. Mech. Eng.*, **61**, 59 (1987).
- 2) J. C. Simo and S. Rifai, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **29**, 1595 (1990).
- 3) J. Oliver, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **39**, 3575 (1996).
- 4) J. Oliver, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **39**, 3601 (1996).
- 5) R. Larsson and K. Runesson, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **36**, 2087 (1993).
- 6) 杉本 環, 鱸 洋一, 矢富盟祥, *応用力学論文集*, **3**, 351 (2000).
- 7) J. D. Eshelby, "The continuum theory of lattice defect, vol. III", p.79 (1956) Academic press.
- 8) J. R. Rice, *J. Appl. Mech.*, **35**, 376 (1968).
- 9) J. R. Rice, "Fracture Vol. II", p.191 (1968) Academic press.
- 10) C. Yatomi, *Int. J. Solid. Structure*, **19**, 183 (1983).
- 11) 鷲津久一郎, 宮本 博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦, "有限要素法ハンドブック II", p.317 (1983) 培風館.
- 12) 鱸 洋一, 矢富盟祥, *構造工学論文集*, **43A**, 437 (1997).