日本機械学会論文集(A編)
67巻663号(2001-11)

論文 No. 01-0315

成長法を模擬した板殻構造補強リブ形態の創成法*

山崎光悦*1, 小板橋雄也*2

Stiffener Layout Generation of Plate and Shell Structures by Pseudo-Growth Technique

Koetsu YAMAZAKI*3 and Yuya KOITABASHI

*3 Department of Human and Mechanical Systems Engineering, Kanazawa University,
2-40-20 Kodatsuno, Kanazawa-shi, Ishikawa, 920-8667 Japan

Plate and shell structures with stiffeners are frequently adopted to acheive huge and light structures. A new design technique so called as growth method, which acheives a minimum compliance design, is suggested to obtain optimal layout pattern of the stiffeners for the plate and shell structures. The growth method starts from seed points distributed in advance, and grows gradually the stiffener layout along the grid nodes of the finite element by taking into account the design sensitivity of stiffener cross section. The method is applied to decide optimum layouts of stiffeners for square plates undr distributed and concentrated loads, and validity of the suggested technique is discussed.

Key Words: Structural Analysis, Optimum Design, Finite Element Method, Growth Technique, Stiffener Layout

1. 緒言

平板や殻構造物に補強リブを付けた構造形態が, 補強あるいは軽量化の観点から実際の設計に採用されることが多い. そのため, リブ形態の最適化に関するさまざまな研究がなされてきている(1)~(3). しかし, 均質化法などの従来の手法をリブ配置の最適化問題に用いた場合, それらの手法を駆使してもリブ1本1本の明確な形態を得ることが困難で, 特に平板や殻構造物の曲げ問題では, 高密度のリブが荷重点などに集中し, 構造物全体を網羅するようなリブ形態を形成しにくいという難点がある. そのため, リブ配置問題に適した最適化手法を開発する必要がある.

ところで, 自然界でもリブに似た役割を果たす構造形態を見出すことは容易である. 例えば, 広葉樹の葉の葉脈パターンも一種の補強リブ形態と見ることができ(4), また植物の根も成長とともに形態が変化する構造とみなすことができる. 特に, 熱帯雨林の樹木などは, 板根と呼ばれる翼状の根を形成し, 幹の安定性を増加させている.

生物の形態は長い年月を経て形成されているため, その形態はある種の最適化がなされていると考えることができる. さらに, 同じ種類の生物であっても, その形状はその個体の周囲の環境によって大きく異なってくる. つまり, 生物はその遺伝子情報で形態の基本構成が定められており, その基本形態を保ちながら生存目的と外環境条件に適合するように, 細胞組織やホルモン等のミクロ的構造作用によって局部的な最適化が図られ, その形態および形状が決まっていると考えられる.

従来の技術では解決できないと思われる工学上の問題に対して, 以上のような生物の優れた機能を模倣し, これを利用しようとする動きが活発になっており, 生物の形態や形態形成過程を実際の設計に用いる手法が開発されている(5).

そこで本研究では, この成長過程における生物の環境への優れた適応能力に着目し, その成長過程を模擬した,「成長法」と呼ぶべき補強リブ形態創成手法を提案し, 上で述べたようなリブの配置形態の最適化問題に応用した結果を報告する.

* 原稿受付 2001年3月23日.
*1 正員, 金沢大学工学部(〒920-0952 金沢市小立野2-40-20).
*2 准員, 沖電気工業(株)(〒105-0001 東京都港区虎ノ門1-7-12).
E-mail: yamazaki@t.kanazawa-u.ac.jp

2. 成長法

2・1 対象問題 本研究では，あらかじめ与えられた板殻構造の最大剛性を達成するリブ配置問題を考える．解析モデルでは平板をシェル要素で離散化し，図1に示すような剛性にほとんど影響を与えない程度に断面寸法の小さなリブ(はり要素)があらかじめ張り巡らされた基本構造を出発点とする．

基本構造におけるリブ形態の基本配置を図2に示す．すなわち基本構造では離散化された板殻構造の有限要素の節点を縦横に結合する微小なリブが存在するモデルを考える．この基本構造の各リブの断面積を増減させることによってリブ配置問題を取扱うことができる．以下ではリブの断面形状を図3に示すような形状と仮定した．リブの断面積を更新する際には，リブ幅を板厚 t と等しくし，リブの高さ h のみを変化させることでリブの断面積を更新する方法を採用する．したがって，対象とするリブ配置の最大剛性設計問題は，設計変数をリブ体積 $V_i\,(i=1,2,\cdots,k)$ にとると以下のように示される．

$$\text{目的関数}\quad U\rightarrow \min \qquad (1)$$
$$\text{制約条件}\quad V\leq V_{\max}$$

ここで，k は総リブ数，U は全ひずみエネルギー，$V_{\max}$ はあらかじめ規定されるリブの最大体積とする．

以上のリブ配置設計問題に対して，あらかじめ配置した種(起点)から体積を徐々に増加させながら後述する成長規則に従って徐々にリブを成長させることにより最適なリブ配置形態を最終的に得る手法を考える．

2・2 成長法 次に成長法の基本的な考えについて述べる．植物は種から発芽した後，周囲の環境に適応しながら成長する．これと同様に成長法では，荷重点や支持点などにあらかじめ配置した板殻上の起点からリブの成長を開始し，板殻の全体剛性を増加するようにリブ配置を徐々に変化させ，最終的なリブの配置形態を得る．具体的には以下に示すような解析を考える．

まず先に述べた基本リブ構造を持つ板殻において，荷重点や支持点などにリブを配置する起点をあらかじめ決定し，この起点に接続する成長可能なすべてのリブの断面積を以下の式で導出されるエネルギー感度に比例して徐々に増加させて更新するものとする．

$$\frac{dU}{dV_i}=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{f}_j\left(\frac{d\boldsymbol{u}_j}{dV_i}\right) \qquad (2)$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dV_i}=-\boldsymbol{K}^{-1}\frac{d\boldsymbol{K}}{dV_i}\boldsymbol{u} \qquad (3)$$

ここで $\boldsymbol{K}$ は剛性マトリックス，$\boldsymbol{u}$ は節点変位，V_i は各リブ要素の体積を表す．i は感度を計算するリブの番号であり，$\boldsymbol{f}$ は節点力である．

また断面積を更新する際，エネルギー感度の大きいリブの断面積を増加させ，かつ全体の体積増加量を一定に保つため，以下の式により増加体積を各リブに割り振るものとする．これを成長則と呼ぶ．

$$\Delta A_i=\frac{\Delta V\left(\dfrac{dU}{dV_i}-w\overline{\dfrac{dU}{dV}}\right)}{\sum_{j=1}^{m}\dfrac{dU}{dV_j}l_j-w\overline{\dfrac{dU}{dV}}\sum_{j=1}^{m}l_j} \qquad (4)$$

ただし，平均感度 $\overline{dU}/dV$ を次式で与える．

$$\overline{\frac{dU}{dV}}=\frac{\sum_{j=1}^{m}\dfrac{dU}{dV_j}}{m} \qquad (5)$$

ここで m は断面積を更新するリブ数であり，w は重み係数，ΔV はステップごとのリブ体積の全増加量である．また ΔA_i はリブ i の断面積の増加量で，l_j はリブ長さである．断面積を更新する際に，式(4)を用いることによって，断面積を単に増加させて成長させるだけでなく，すでに成長したリブでも，感度の値が小さければリブ断面積を減少させることも可能である．すなわち，式(4)の中で，式(5)で得られた感度の平均値と重み係数 w を乗じたものを閾値として，

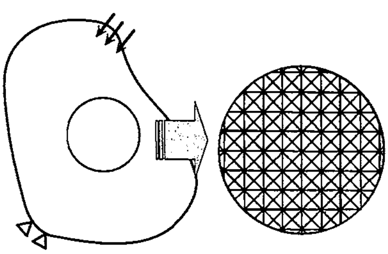


Fig. 1 Discrete structure

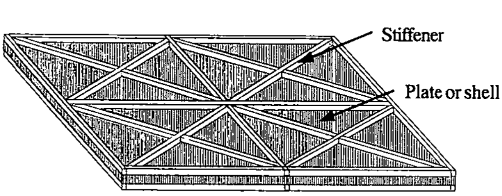


Fig. 2 Grand structure of stiffener layout

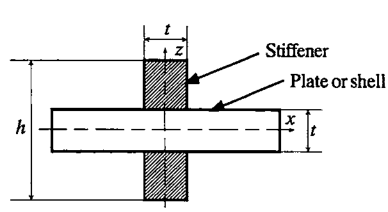


Fig. 3 Cross section of stiffener

この値を感度が上回るリブの断面積は増加し，下回るものは断面積が減少することとなる．以上の過程を繰返すことにより断面積が更新されて行き，必要な部分はリブが成長し，リブ形態の成長に伴って逆に不要になった部分のリブは退化することになる．

2・3　分岐則と成長過程　成長過程において，リブ断面積 A_i があらかじめ設定した規定値 A_{branch} に達した場合に，そのリブは分岐能力があるとみなし，起点と同様な手順によりそのリブ端に接続する成長可能なすべての方向のリブの断面積を，更新する範囲に含めるものとする．すなわち，リブ R_i の断面積 A_i が規定のリブ断面積 A_{branch} を超えるとき，その両端に分岐点とする分岐可能リブ集合 R_{branch} に加え，逆に A_{branch} 以下に退化したリブは分岐可能集合から除く．これらの判断を分岐則と呼ぶ．リブの成長過程を模式的に図4に示す．リブは次のような過程を経て成長する．

step 1：構造物上に起点を配置する．

step 2：起点に接するすべての方向のリブの断面積を更新する．

step 3：リブの断面積が規定値を満たしたものに関しては，そのリブを分岐可能であるとみなし，その両端を分岐点とする分岐可能リブ集合に加える．

step 4：分岐点に接続するすべての方向のリブの断面積を更新する．

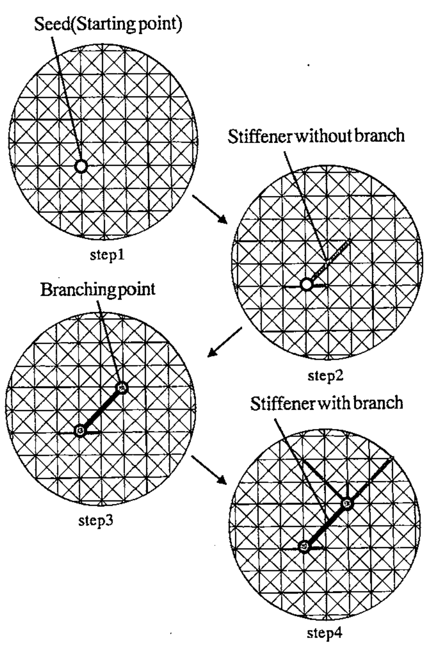


Fig. 4　Process of stiffener growth

以上の成長則，分岐則に従った，本研究で提案する成長法の流れを図5に示す．最初に FEM 解を行い，得られた節点変位を利用してリブ断面積の感度解析を行う．この感度により一定の体積増加のもとで起点(種)を含むすべての分岐可能点周りのリブ断面積を更新する．この過程を規定の繰返し回数を満たすまで行う．

3.　手法の応用と検討

3・1　曲げを受ける平板の補強リブ

（1）　集中荷重を受ける四隅支持平板　まず基本的な数値例について述べる．解析モデルとして図6に示すような四隅支持された正方形板の中心に集中荷重 P が負荷される場合を考える．平板の初期体積を V_0 とするとき，リブ配置による最終的な体積増加を $V_{max}=0.8\,V_0$ と規定して，基本構造におけるリブの断面積を A_0 としたときの分岐の規定値を $A_{branch}=10^4A_0$ とする．ここで，平板の曲げ剛性を $K_p=Et^3/12(1-\nu^2)$（E はヤング率，ν はポアソン比）とすると，仮定した断面積 A_0 のリブの曲げ剛性は $K_0=0.91\times10^{-10}K_p$ で，初期モデルのリブの影響をほとんど無視できるモデルである．また，重み係数を $w=$

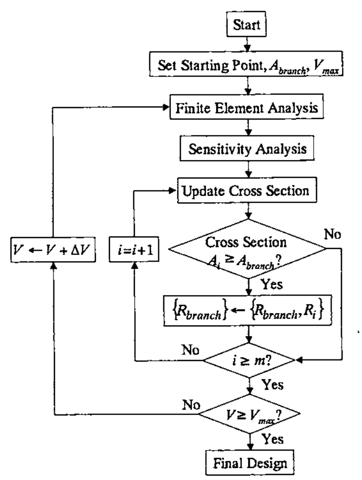


Fig. 5　Flowchart of growth technique

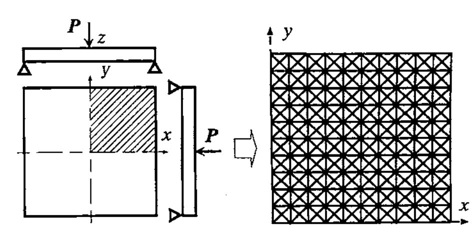


Fig. 6　Corner supported plate under concentrated load

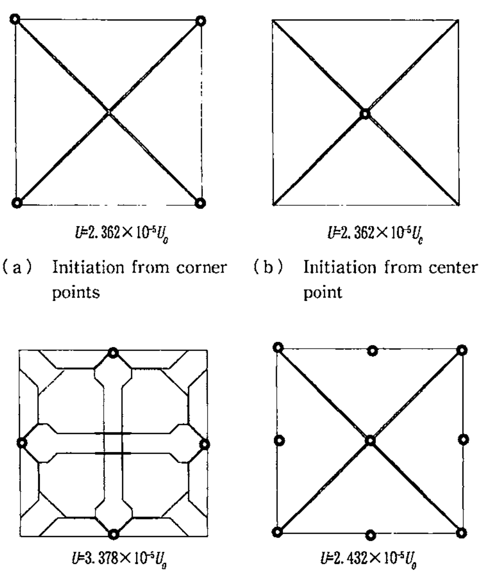
0.7, 最大繰返し回数を $N=200$ 回とした.

4 種類の起点(種)から開始した解析結果の例 4 種類を, 図 7 に示す. 図中に起点位置を○印で示した.

(a)図は正方形板の四隅を, (b)図は正方形板の中心を, (c)図は正方形板の外周辺の中点を, (d)図は正方形板の四隅, 中点, 外周辺の中点を同時に起点として開始した解析結果である.

(a)図では四隅から中心に向けてリブが伸び, (b)図では中心から四隅に向けてリブが伸びた. (c)図では外周辺の中点から成長を始めたリブは途中で分岐し, 片方は正方形板の中心点に向けて, もう片方は四隅に向けて成長するパターンを得た. また(d)図では成長の初期では各起点からリブが伸びるものの最終的には(a), (b)図と同様, 四隅と中心部を結ぶようにリブが配置された.

次に解析結果のひずみエネルギー値を比較する. 初期モデルのひずみエネルギーを U_0 とすると, (a), (b)図のパターンではひずみエネルギー値が最終的に $2.362\times10^{-5}U_0$ に, (d)図では $2.432\times10^{-5}U_0$ に減少した. また(c)図のパターンは特異ではあるが最終的なエネルギー値は $3.378\times10^{-5}U_0$ となった. ここで平板のひずみエネルギー値は板厚の 3 乗に反比例するので, 体積増加分をすべて板厚増加に用いた等価な平板モデルでは, エネルギー値が $0.171U_0$ となり, (a)〜(d)図のいずれもこの値をはるかに下回っている. このことからこれらのリブ配置形態は有効であると考えられる.



(a) Initiation from corner points　(b) Initiation from center point

(c) Initiation from center of edges　(d) Initiation from center of edges,corner and center point

Fig. 7 Simulation results for coner supported plate under concentrated load ($V_{max}=0.8V_0$, $w=0.7$, $A_{branch}=10^4A_0$, $N=200$)

以上の解析結果より, (a), (b)および, (d)図におけるリブパターンは最終的に得られた断面積分布にわずかな差はみられるものの, 同様の形態に配置され, ひずみエネルギー値も非常に近い値をとった. 一方で, 開始点を外周辺の中点とした解析では, 全く異なったリブ配置形態となり, この結果より, 提案した手法では起点の配置に依存して異なったリブ形態が得られること, また, 複数の起点配置から開始することにより, 最も効果的なリブ配置が得られる可能性が明らかとなった.

(2) 等分布荷重を受ける周辺単純支持平板　解析モデルとして図 8 に示すような周辺単純支持された正方形板に一様分布荷重が負荷される場合を考える. 平板の初期体積を V_0 とするときの, リブ配置による最終的な体積増加を $V_{max}=0.8V_0$ と規定した. また, 分岐の規定値を $A_{branch}=10^4A_0$ とし, 最大繰返し回数を $N=200$ 回とした.

4 種類の起点(種)から開始した解析結果の例 4 種類を, 図 9 に示す. 図中に起点の位置を○印で示した.

(a)図は正方形板の四隅を, (b)図は正方形板の中心を, (c)図は正方形板の外周辺の中点を, (d)図は正方形板の四隅, 中点, 外周辺の中点を同時に起点として開始した解析結果であり, (a)図では重み係数を $w=0.7$, (b)図では $w=0.8$, (c)図では $w=0.6$, (d)図では $w=0.8$ とした. これらはリブの成長過程を表しており, リブの体積がそれぞれ $V=0.2V_0$, $0.4V_0$, $0.8V_0$ と成長してゆく過程を示している.

(a)図では四隅から中心に向かうリブと, 正方形板の縦横にリブが配置された. (b)図では正方形板全体に及ぶ多角形のリブを形成し, (c)図では辺の中点と中点を結ぶようにリブが伸びて菱形を形成した. また(d)図では(a)図とほとんど同様の形状にリブが配置された.

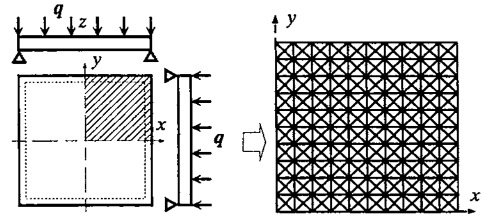
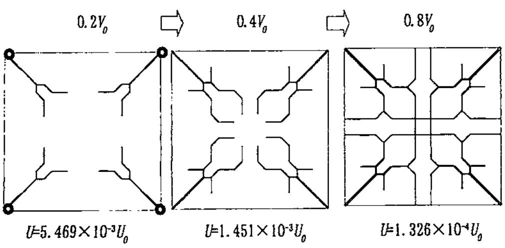


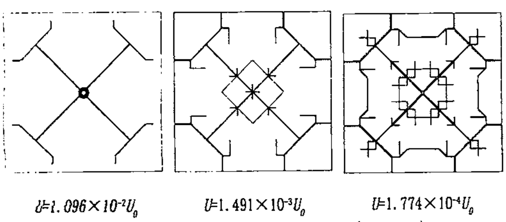
Fig. 8 Simply supported plate under uniformly distributed load

次に解析結果のひずみエネルギー値を比較する．初期モデルのひずみエネルギーを U_0 とすると，(a)図のパターンはひずみエネルギー値が最終的に $1.326\times10^{-4}U_0$ に，(b)図のパターンは $1.774\times10^{-4}U_0$ にそれぞれ変化した．また(c)図のパターンの最終的なエネルギー値は $2.668\times10^{-4}U_0$ に，(d)図では $1.543\times10^{-4}U_0$ に減少した．体積増加分をすべて板厚増加に用いた等価な平板モデルを考えると，エネルギー値が $0.171U_0$ となり，(a)～(d)図のいずれもこの値をはるかに下回り，このことから得られたリブ配置形態は有効であると考えられる．

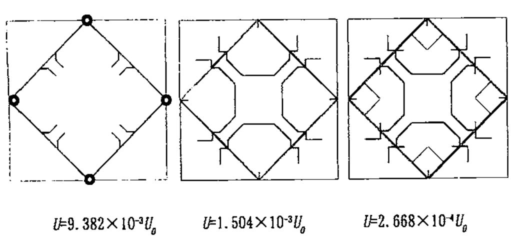
以上の解析結果より，出発点の違いにより，そのリブパターンとひずみエネルギー値に違いが発生した．これは初期段階に配置されたリブがその後の感度解析に影響を及ぼしているためであると考えられる．その影響を避けるには，支持点や荷重点を含む多数の起点から同時に出発することが有効であることが判明した．



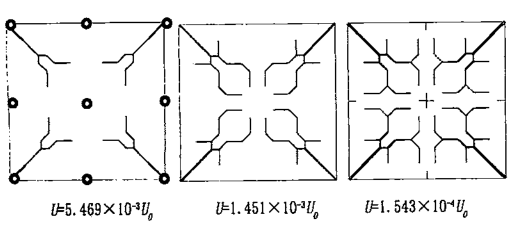
(a) Initiation from corner points ($w=0.7$)



(b) Initiation from center point ($w=0.8$)



(c) Initiation from center of edges ($w=0.6$)



(d) Initiation from center of edges, corner and center points simultaniously ($w=0.8$)

Fig. 9 Simulation results for simply supported plate under distributed load (Constant volume increment) ($A_{\mathrm{branch}}=10^4A_0$, $N=200$)

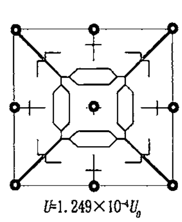
3·2 増分体積制御の効果

3·1 節では 1 step ごとの増加体積を一定として実施した解析結果を示した．しかし，増加体積を一定とした場合，成長が進むにつれてリブの本数が増えるため，成長が抑制される傾向がみられた．そこで 1 step ごとの増加体積を変化させてその効果を検討した．

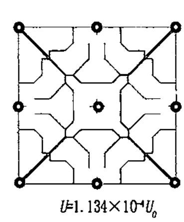
まず，体積増分条件 1 として，1 step ごとの体積増分を，体積を更新するリブ数に比例させた解析を考える．すなわち，体積増分は初期段階では徐々に増加し，成長が進むにつれて増加量が大きくなり，リブ総体積があらかじめ与えた目標値に到達した段階で計算を停止させる．解析モデルは等分布荷重を受ける周辺単純支持平板で，リブ配置による最終的な体積増加を $V_{\mathrm{max}}=0.8\,V_0$，分岐の規定値を $A_{\mathrm{branch}}=10^4A_0$，重み係数を $w=0.8$ とした．

解析結果を図 10(a)に示す．これは，正方形板の四隅，中点，外周辺の中点を同時に開始点とした解析結果である．四隅からリブが伸び，中心部に八角形のリブを形成した．また，外周辺の中点からもリブが成長を始めた．

次に，体積増分条件 2 として，断面積が規定値 A_{branch} に達したリブ数に，1 step ごとの体積増分を比例させた解析を実施した．体積増分の増加傾向は体積増分条件 1 とほぼ同様であるが，体積増分条件 1 よりもなだらかに変化する．解析モデルは体積増分条件 1 と同様のモデルを用い，リブ配置による最終的な体積増加を $V_{\mathrm{max}}=0.8\,V_0$，分岐の規定値を $A_{\mathrm{branch}}=0.7\times10^4A_0$，重み係数を $w=0.8$ とした．



(a) Volume increment condition 1 ($A_{\mathrm{branch}}=10^4A_0$, $N=527$)



(b) Volume increment condition 2 ($A_{\mathrm{branch}}=0.7\times10^4A_0$, $N=2\,501$)

Fig. 10 Simulation results for simply supported plate under distributed load (Variable volume increment) ($V_{\mathrm{max}}=0.8\,V_0$, $w=0.8$)

解析結果を図10(b)に示す．これは，正方形板の四隅，中点，外周辺の中点を同時に開始点とした解析結果である．四隅からリブが伸び，中心部に正方形状のリブを形成した．また，中心に向かったリブから外周辺に向かってリブが形成した．

次にひずみエネルギー値について比較する．体積増分条件1の最終的なひずみエネルギー値は $1.249\times10^{-4}U_0$ に，体積増分条件2では $1.134\times10^{-4}U_0$ に変化した．ここで，体積増分一定のモデルのひずみエネルギー値は $1.774\times10^{-4}U_0$ で，体積増分を変化させたモデルのほうが明らかに低い値を示し，このことから，1 step ごとの体積増分が一定のモデルよりも，体積増分を体積を更新するリブ数や，規定値 A_{branch} に達したリブ数に比例させたモデルのほうが有効であると考えられる．

3・3 曲げ・ねじり荷重を受ける片持平板　実際の設計では，荷重条件としてねじりや曲げ，あるいはその両方の荷重を考慮した設計を行う必要がある．そこで，成長法を用いて以下のような設計を考える．

一辺を固定された片持平板で，図11に示すような，先端にねじりや曲げ荷重を受ける正方形板を考えた．(a)図はねじり荷重，(b)図は曲げ荷重，(c)図は(a)図と(b)図の荷重条件を重ね合わせた荷重を受ける片持平板である．また，感度の面で設計モデル(a)と設計モデル(b)の荷重条件を組合わせた解析も考える．具体的には，感度解析を(a)図と(b)図の二つの荷重条件によって行い，各リブについて2種類の荷重による感度を算出し，体積更新の際には，この感度の大きい方を式(4)に代入し，リブの太さを更新する．

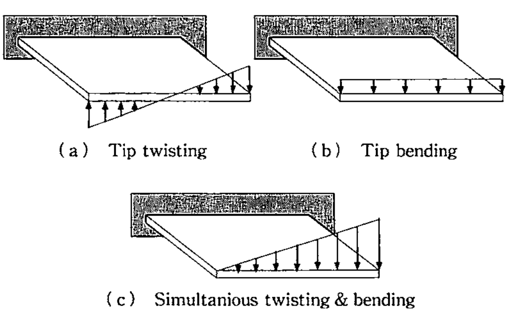
以上四つの解析において，リブ配置による最終的な体積増加を $V_{\max}=0.25\,V_0$，最大繰返し回数を $N=100$ 回として解析を行った．さらに，(a)図では分岐の規定値を $A_{\mathrm{branch}}=10^5A_0$，重み係数を $w=0.6$ とし，(b)図では $A_{\mathrm{branch}}=10^4A_0$, $w=0.7$，(c)図では $A_{\mathrm{branch}}=10^5A_0$, $w=0.6$ とした．また，複数の荷重条件による解析では，分岐の規定値を $A_{\mathrm{branch}}=10^4A_0$，重み係数を $w=0.6$ とした．

図11(a)～(c)の解析結果を図12(a)～(c)に示す．また，荷重条件を組合わせた解析結果を図12(d)に示す．これらの解析結果はすべて正方形板の四隅と外周辺の中点を起点として開始した解析結果である．

(a)図ではリブは正方形板の支持辺以外の外周を取り巻くように成長し，(b)図ではリブが支持辺の中点から先端に向かい，途中で枝分かれしてなだらかに先端の両隅に向かっている．(c)図のリブは正方形板の右上の起点から先端に向かって成長し，さらに先端の辺を横切る形で成長した．また(d)図では支持辺の中点からリブが先端に向かい，途中で枝分かれして先端の両隅に到達した．

次に最終のひずみエネルギー値を比較して示す．(a)図では最終的に $4.595\times10^{-2}U_0$ に変化し，(b)図では $8.942\times10^{-3}U_0$ に変化した．また，(c)図のひずみエネルギー値は最終的に $1.252\times10^{-2}U_0$ に減少した．感度を組合わせた解析では，曲げに対するひずみエネルギー値は $U=4.659\times10^{-2}U_0$，ねじりに対して $U=9.235\times10^{-3}U_0$ となった．

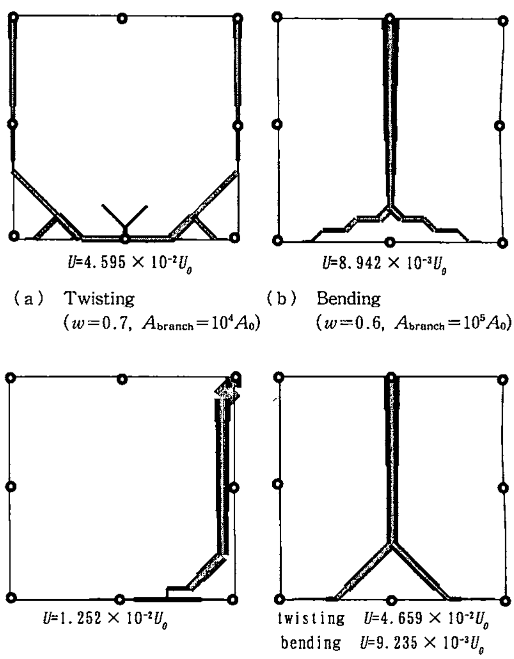
以上より，ねじりに対しては(a)図のパターンが最も低い値を示し，曲げに対しては(b)図のパターンが



(a) Tip twisting　(b) Tip bending

(c) Simultanious twisting & bending

Fig. 11 Cantilever plate under tip loading



(a) Twisting ($w=0.7$, $A_{\mathrm{branch}}=10^4A_0$)　(b) Bending ($w=0.6$, $A_{\mathrm{branch}}=10^5A_0$)

(c) Simultanious loading ($w=0.6$, $A_{\mathrm{branch}}=10^4A_0$)　(d) Multiple loading ($w=0.6$, $A_{\mathrm{branch}}=10^5A_0$)

Fig. 12 Simulation results for cantilever plate under tip loading ($V_{\max}=0.25\,V_0$, $N=100$)

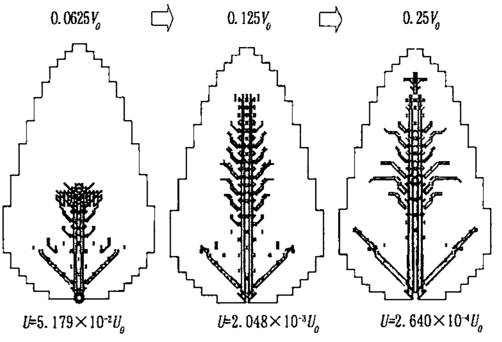


Fig. 13 Simulation results for reaf model ($w=0.5$, $A_{branch}=10^4A_0$, $N=60$)

最も低い値を示した．しかし，どちらの結果においても，感度を組合わせた解析のエネルギー値と非常に近い値を示し，このことから，感度を組合わせた解析が有効であると考えられ，この解析によって得られたリブ形態は，ねじりと曲げの両荷重に対して高い剛性を持つといえる．

3・4 木の葉モデルへの適用 成長法は生物の成長過程を模擬した手法であり，生物の形態をモデル化することができると考えられる．そこで，広葉樹の葉脈パターンのモデル化も試みた．

解析モデルとして，木の葉の形を模擬した平板に，一様分布荷重が負荷される場合を考え，支持条件として枝との接合部分である木の葉の根元部分の2要素を固定した．ここで，リブ配置による最終的な体積増加を $V_{max}=0.25V_0$，分岐の規定値を $A_{branch}=10^4A_0$ とした．また，最大繰返し回数を $N=60$ 回とし，重み係数を $w=0.5$ とした．

解析結果を図13に示す．これらは支持点を開始点としたときの解析結果であり，リブの体積がそれぞれ $V=0.0625V_0$, $0.125V_0$, $0.25V_0$ と成長してゆく様子を示している．まず，支持点から先端に向かってリブが成長し，リブの先端部分に細かなリブが無数に分布した．次に，先ほど分布した細かなリブが退化し，そのほとんどが消滅した．最終的に支持点から先端に向かうリブと，そこから斜めに延びる何本ものリブを形成した．また，このときの最終的なひずみエネルギー値は $2.640\times10^{-4}U_0$ となった．

以上の解析により得られたリブの形状は実際の葉脈パターンによく似た形状となったが，実際の葉脈パターンに比べてリブの本数が少ない．これはリブの本数を減らし，他のリブの断面積を増加させることにより，リブ1本1本の剛性を増加させているためであると考えられる．

4. 結　言

以上より，本報で提案した成長法で得られた解析結果は，明確なリブ形状を示し，リブ形態創成法として有効であることを明らかにした．また，いずれの解析モデルにおいても，起点の位置によって最終的なリブパターンとひずみエネルギー値に違いが生じたが，起点を複数点にすることでひずみエネルギー値の減少が最も大きくなる起点からのリブが成長し，それ以外の起点は成長が抑制され，「淘汰」のような現象が発生した．よって，今後，より一般的な問題に対しても，起点を複数点にすることでより複雑なリブパターンを得ることができると考えられる．

文　献

(1) 山崎光悦・小林篤司，薄板のスティフナ形態の最大剛性設計法，機論，54-501, A(1989), 1165-1171.
(2) Rozvany, G. I. N., *Topology Optimization in Structural Mechanics*, (1997), Springer Wien New York.
(3) Bendsoe, M. P., *Optimization of Structural Topology Shape, and Material*, (1995), Springer.
(4) 田中基八朗，植物のデザイン，(1983)，共同科学ブックス.
(5) 吉村允孝・泉井一浩，生物の形態および形態形成を模擬した創成的機構形状設計法，64-627, C(1998), 397-402.