直交関数系の調和解析

勘甚裕一

フーリエ級数とフーリエ変換に対してなされてきた豊富な議論が，他の種々の直交関数系でどのように展開されるかを調べることが直交関数系の調和解析である．この論説では，この表題の下に移植定理及び移転定理と呼ばれる定理を論じたい．また，近時調和解析学で得られた大きな成果の1つである実ハーディー空間の理論が，直交関数系の解析にも有力な道具を提供するものであることを解説したい．

まず，第1節で移植定理の考え方を述べ，第2節で一般的設定において移植定理と移転定理を定式化し，両者のかかわりを述べ，考えるべき問題を整理する．移植定理と移転定理の歴史的経緯は第3節で述べる．第4節は，筆者がかかわってきたラゲール級数に関する移植定理とその応用に当てたい．実ハーディー空間の理論が，直交関数系の解析に有効に適用されることは，第5節において見ることにする．

1 移植定理 (Transplantation Theorem)

直交関数系の解析に有効な移植定理 (transplantation theorem) の考え方を説明するために M. Riesz の定理から話を始めたい．この定理はその後，特異積分論などを触発した，調和解析学における極めて重要な定理である．読者にとって周知の定理とは思われるが，以降の話題の動機を語るのに，この定理から始めるのが最適と思われる．

周期 2π を持ち，区間 $(-\pi, \pi)$ で可積分な関数 $f(\theta)$ のフーリエ級数展開を

$$f(\theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta$$

とする．関数 $f(\theta)$ の共役関数 $\tilde{f}(\theta)$ とは，フーリエ級数展開

$$\tilde{f}(\theta) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta)$$

を持つ関数として定義される．積分で表現すれば

$$\tilde{f}(\theta) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\epsilon<|\theta|<\pi} f(t)\cot\frac{\theta - t}{2}\, dt$$

であり，2π 周期関数に対するヒルベルト変換そのものである．M. Riesz が示したのは次の定理である．

定理 A (M. Riesz [43]) $1 < p < \infty$ とする．次の不等式が成り立つ：

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(\theta)|^p \, d\theta \le C \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^p \, d\theta.$$

ここで，C は p のみに依存する定数.

M. Riesz の定理の持つ重要性の 1 つは，この共役関数の L^p 評価から，フーリエ級数の L^p 収束が得られることである．なぜなら，関数 $f(\theta)$ のフーリエ級数の第 N 部分和 $S_N f(\theta) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ に対し，

$$S_N f(\theta) - \frac{1}{2}(a_N \cos N\theta + b_N \sin N\theta) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\epsilon < |\theta| < \pi} f(t) \sin N(\theta - t) \cot \frac{\theta - t}{2} \, dt$$

が成り立ち，これより

$$|S_N f(\theta) - \frac{1}{2}(a_N \cos N\theta + b_N \sin N\theta)| \le |\{f(t) \sin Nt\}^{\sim}(\theta)| + |\{f(t) \cos Nt\}^{\sim}(\theta)|$$

なので，M. Riesz の定理から不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_N f(\theta)|^p \, d\theta \le C \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^p \, d\theta \tag{1}$$

を導くことが出来る．ここで，C は，N, f に関係しない定数である．この不等式より，容易にフーリエ級数の L^p, $1 < p < \infty$ 収束 $\int_{-\pi}^{\pi} |S_N f(\theta) - f(\theta)|^p \, d\theta \to 0$ $(N \to \infty)$ が導かれる.

我々は，M. Riesz の定理を移植定理の視点から書き直すことによって，移植定理の考え方・使いみちを少し丁寧に述べてみたい．作用素 T を 2π 周期偶関数

$$f(\theta) \sim (a_0/2) + a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + a_3 \cos 3\theta + \cdots$$

に対し，Tf が次のフーリエ級数を持つものとして定義する：

$$Tf(\theta) \sim (a_0/\sqrt{2}) \sin \theta + a_1 \sin 2\theta + a_2 \sin 3\theta + a_3 \sin 4\theta + \cdots. \tag{2}$$

もう 1 つの作用素 T' を，こんどは奇関数

$$g(\theta) \sim b_1 \sin \theta + b_2 \sin 2\theta + b_3 \sin 3\theta + \cdots$$

に対し，

$$T'g(\theta) \sim (b_1/\sqrt{2}) + b_2 \cos \theta + b_3 \cos 2\theta + b_4 \cos 3\theta + \cdots \tag{3}$$

と定義する．このとき，

$$\tilde{f}(\theta) \sim a_1 \sin \theta + a_2 \sin 2\theta + \cdots, \qquad \tilde{g}(\theta) \sim -b_1 \cos \theta - b_2 \cos 2\theta - \cdots$$

に注意すると，作用素 T, T' は共役関数を使って

$$Tf(\theta) = f(\theta) \sin \theta + \tilde{f}(\theta) \cos \theta + \{(\sqrt{2} - 1)/2\} a_0 \sin \theta,$$
$$T'g(\theta) = g(\theta) \sin \theta - \tilde{g}(\theta) \cos \theta + \{(\sqrt{2} - 1)/2\} b_1$$

と表現される．定数項に対して，$|a_n|^p$, $|b_n|^p \le C \int_0^{\pi} |f(\theta)|^p \, d\theta$ なので M. Riesz の定理より，$1 <$

$p < \infty$ に対して，不等式

$$\int_0^\pi |Tf(\theta)|^p \, d\theta \le C \int_0^\pi |f(\theta)|^p \, d\theta, \tag{4}$$

$$\int_0^\pi |T'g(\theta)|^p \, d\theta \le C \int_0^\pi |g(\theta)|^p \, d\theta \tag{5}$$

を得ることになる．この不等式の使い方を，Hardy と Littlewood による次の結果を例にとって述べてみよう：

$1 < p < \infty$ とする．係数 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は，条件 $a_{n-1} \ge a_n \to 0$ を満たすものとする．このとき，関数 $f(\theta) = \sum_{n=1}^\infty a_n \cos n\theta$ が p 乗可積分 $\int_0^\pi |f(\theta)|^p \, d\theta < \infty$ である必要十分条件は，$\sum_{n=1}^\infty a_n^p n^{p-2} < \infty$ である．

自然に，sine 級数に対して同様の結果が成り立たないか問題になる．これを，考えてみよう．係数 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ に同じ条件 $b_{n-1} \ge b_n \to 0$ を仮定する．関数 $g(\theta) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin n\theta$ が p 乗可積分であるとする．このとき $T'g(\theta)$ は (3) の形の cosine 級数であり，(5) から p 乗可積分である．これらのことから，関数 $T'g(\theta) - (b_1/\sqrt{2})$ を考えれば，上の結果から $\sum_{n=1}^\infty b_{n+1}^p n^{p-2} < \infty$ が従い，$\sum_{n=1}^\infty b_n^p n^{p-2} < \infty$ を得る．逆に，$\sum_{n=1}^\infty b_n^p n^{p-2} < \infty$ を仮定する．明らかに，$\sum_{n=1}^\infty b_{n+1}^p n^{p-2} < \infty$ なので上の結果から cosine 級数 $f(\theta) = \sum_{n=1}^\infty b_{n+1} \cos n\theta$ は p 乗可積分である．このとき，(4) より sine 級数 $Tf(\theta) = \sum_{n=1}^\infty b_n \sin n\theta$ が p 乗可積分であることがわかる．これで，Hardy と Littlewood の結果が sine 級数についても同じ形で成り立つことがわかった．

ここで利用した作用素 T は，cosine 級数の係数を sine 級数に‘植付け’，作用素 T' は sine 級数の係数を cosine 級数に‘植付け’るものであった．このような作用素を移植作用素 (transplantation operator) という．移植作用素の L^p 有界性，今の場合 (4) と (5)，をいうのが移植定理である．移植定理があれば上で見たように，cosine 級数に対して得られている結果が，そっくり sine 級数に移ることになる．逆に，sine 級数に対して得られている結果が，cosine 級数に移ることにもなる．これが，移植定理の考え方である．

作用素 T，T' を次のように拡張すると，移植定理の考え方と有効性がより鮮明になる．関数系 $\{\cos n\theta\}_{n=0}^\infty$，$\{\sin n\theta\}_{n=1}^\infty$ は，ヤコビ多項式から作られる直交系の特殊な場合と捉えることが出来る．ヤコビ多項式は，$\alpha, \beta > -1$ に対して，

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n+\alpha}{n-j} \binom{n+\beta}{j} \left(\frac{x-1}{2}\right)^j \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-j}$$

で定義される．ここで，$\binom{a}{j}$ は 2 項係数である．また，ロドリーグの公式

$$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\}$$

でも与えられ，次の直交関係を満たす：

$$\int_{-1}^1 P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \, dx$$

$$= \delta_{mn} \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)} = \delta_{mn}(t_n^{(\alpha,\beta)})^{-2} \text{ (とおく)}.$$

パラメータが $\alpha = \beta$ のとき $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ は ultraspherical 多項式またはゲーゲンバウアー多項式と呼ばれる．例えば； $P_n^{(0,0)}(x) = P_n(x)$,

$$P_n^{(-1/2,-1/2)}(x) = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n} T_n(x); \ P_n^{(1/2,1/2)}(x) = 2\frac{1\cdot 3\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots(2n+2)} U_n(x).$$

ここで，$P_n(x)$, $T_n(x)$, $U_n(x)$ は，それぞれルジャンドル多項式，第1種チェビシェフ多項式，第2種チェビシェフ多項式である．ヤコビ多項式については，Szegö [53] を参照．我々は，このヤコビ多項式から作られる次の関数 $R_n^{(\alpha,\beta)}(\theta)$ を考える：

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(\theta) = t_n^{(\alpha,\beta)} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+1/2}.$$

このとき，関数系 $\{R_n^{(\alpha,\beta)}(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$ は $L^2(0,\pi)$ において正規直交基底をなす：

$$\int_0^{\pi} R_m^{(\alpha,\beta)}(\theta) R_n^{(\alpha,\beta)}(\theta)\, d\theta = \delta_{mn}.$$

この基底に対し，区間 $(0,\pi)$ 上の関数 $f(\theta)$ は，次のように展開される：

$$f(\theta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\alpha,\beta)} R_n^{(\alpha,\beta)}(\theta), \qquad c_n^{(\alpha,\beta)} = \int_0^{\pi} f(\theta) R_n^{(\alpha,\beta)}(\theta)\, d\theta. \tag{6}$$

パラメータが $\alpha = \beta$ のとき，簡単のため記号： $R_n^{\alpha}(\theta) = R_n^{(\alpha,\alpha)}(\theta)$, $c_n^{\alpha} = c_n^{(\alpha,\alpha)}$ を使おう．

関数 $R_n^{\alpha}(\theta)$ は，$\alpha = -1/2,\ 1/2$ のとき，

$$R_0^{-1/2}(\theta) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad R_n^{-1/2}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos n\theta, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

$$R_n^{1/2}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(n+1)\theta, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

であり，$R_n^0(\theta) = \sqrt{n+1/2}\, P_n(\cos\theta)\sin\theta$ である．よって，特に $\alpha = -1/2$ のときは余弦展開：

$$f(\theta) \sim \frac{c_0^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1/2}\cos n\theta,$$

$$c_n^{-1/2} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta)\, d\theta, & n = 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta, & n = 1,2,\ldots, \end{cases}$$

を与え，$\alpha = 1/2$ のときは正弦展開：

$$f(\theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{1/2}\sin(n+1)\theta,$$

$$c_n^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin(n+1)\theta\, d\theta, \quad n = 0,1,\ldots$$

を与える．

作用素 $T_{(\gamma,\delta)}^{(\alpha,\beta)}$，$\alpha,\beta,\gamma,\delta>-1$ を定義する．$(0,\pi)$ 上の関数

$$f(\theta)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(\alpha,\beta)}R_n^{(\alpha,\beta)}(\theta)$$

に対し，$T_{(\gamma,\delta)}^{(\alpha,\beta)}f(\theta)$ を次の展開を持つものとして定める：

$$T_{(\gamma,\delta)}^{(\alpha,\beta)}f(\theta)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(\alpha,\beta)}R_n^{(\gamma,\delta)}(\theta).$$

ここでも，$\alpha=\beta$ かつ $\gamma=\delta$ のとき，簡単のため記号：$T_\gamma^\alpha=T_{(\gamma,\gamma)}^{(\alpha,\alpha)}$ を使うことにしよう．作用素 $T_{(\gamma,\delta)}^{(\alpha,\beta)}$ は，cosine 級数と sine 級数との間の移植作用素 T, T' を一般化したものになっており，$T=T_{1/2}^{-1/2}$，$T'=T_{-1/2}^{1/2}$ であり，(4), (5) はこれらの作用素の L^p 有界性を述べている．我々は移植作用素 $T_{(\gamma,\delta)}^{(\alpha,\beta)}$ についてその L^p 有界性，つまり移植定理を期待する：

$$\int_0^\pi|T_{(\gamma,\delta)}^{(\alpha,\beta)}f(\theta)|^p\,d\theta\le C\int_0^\pi|f(\theta)|^p\,d\theta. \tag{7}$$

実際，この形の不等式は初め R. Askey [2] によって得られ，B. Muckenhoupt [39] の精密化を経ることになる．歴史的事柄については後で述べたい．これまでの説明から，この不等式によって，前述の Hardy と Littlewood の結果を含め，フーリエ級数に対して得られているいろんな結果が一般のヤコビ級数に対してもそのまま成り立つことがわかる．

このように移植定理とは，豊富な成果を持つ直交関数系の，その成果をそっくり未だよくわかっていない他の直交関数系へ移してしまおうという考えの定理である．移したい成果の最も重要なものはフーリエ・マルチプライヤー作用素の有界性である．マルチプライヤー作用素は，特異積分作用素などを含む，調和解析における研究対象として重要なものである．マルチプライヤー作用素の有界性に関する研究は，フーリエ級数に関する Marcinkiewicz のマルチプライヤー定理に始まるといってよい．この定理は，実解析における最も深い理論の1つであるリトルウッド・ペーリー理論から導かれた：

定理 B (Marcinkiewicz [35])　数列 $\lambda=\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ が次を満たすとする．

$$|\lambda_n|\le C,\qquad\sum_{2^n\le j<2^{n+1}}|\lambda_j-\lambda_{j+1}|\le C,\quad n=0,1,2,\ldots.$$

このとき，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_nA_n(x)\right|^p dx\le C\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\,dx,\quad 1<p<\infty.$$

ここで，$f(x)\sim a_0/2+\sum_{n=1}^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{n=0}^\infty A_n(x)$ とおいた．

この定理は，$\lambda_n=1\ (0\le n\le N)$，$\lambda_n=0\ (N<n)$ とおくことによって，フーリエ級数の部分和に対する不等式 (1)，フーリエ級数の L^p ノルムによる収束，を含む．移植定理 (7) のおかげで，この定理からヤコビ級数 (6) に関するマルチプライヤー作用素の有界性が同じ形で成り立つことがわかる．そして，ヤコビ級数に関する L^p ノルムによる収束も得られる．ヤコビ級数の L^p 収束自身は，移植定

理の発想なしで H. Pollard [40], [41], [42] によって得られていた.

移植定理からマルチプライヤー作用素の有界性が得られることの説明を兼ねて，次節において移植定理を整理し，マルチプライヤー作用素の有界性に関する移転定理と呼ばれる形の定理とその考え方を述べたい.

2 マルチプライヤー作用素の有界性と移転定理 (Transference Theorem)

この節では，直交関数系の移植定理を一般的に設定し，マルチプライヤー作用素の有界性と移植定理の関係を見る．また，マルチプライヤー作用素の有界性に関する移転定理 (transference theorem) を述べ，その意味する所とそれらが扱う問題を整理する.

$\{\phi_n(x)\}$, $\{\psi_n(y)\}$ をそれぞれルベーグ測度 dx, dy に関する 2 つの完備な正規直交系とする．定義されている区間は，どこであってもかまわない．直交関数系 $\{\phi_n(x)\}$ による展開

$$f(x) \sim \sum_n (f, \phi_n)\phi_n(x), \quad (f, \phi_n) = \int f(t)\overline{\phi_n(t)}\, dt$$

と，もう 1 つの直交関数系 $\{\psi_n(y)\}$ による展開

$$g(y) \sim \sum_n (g, \psi_n)\psi_n(y), \quad (g, \psi_n) = \int g(s)\overline{\psi_n(s)}\, ds$$

を考える．作用素 T_ψ^ϕ を

$$T_\psi^\phi f(y) \sim \sum_n (f, \phi_n)\psi_n(y)$$

と定義し，ϕ 系から ψ 系への移植作用素 (transplantation operator) と呼ぶ．逆方向への作用素，ψ 系から ϕ 系へのそれ T_ϕ^ψ は，$T_\phi^\psi g(x) \sim \sum_n (g, \psi_n)\phi_n(x)$ で定義される．明らかに； $T_\phi^\psi T_\psi^\phi f = f$, $T_\psi^\phi T_\phi^\psi g = g$ が成り立つ．2 つの直交系として，$\{R_n^{(\alpha,\beta)}\}$, $\{R_n^{(\gamma,\delta)}\}$ を考えた場合が，前節である.

有界数列 $\lambda = \{\lambda_n\}$ に対し，ϕ 系におけるマルチプライヤー作用素 M_λ^ϕ は,

$$M_\lambda^\phi f(x) \sim \sum_n \lambda_n (f, \phi_n)\phi_n(x)$$

で定義され，ψ 系のそれ M_λ^ψ は，同様に $M_\lambda^\psi g(y) \sim \sum_n \lambda_n (g, \psi_n)\psi_n(y)$ と定義される．次の関係が基本的である：

$$M_\lambda^\phi f = T_\phi^\psi M_\lambda^\psi T_\psi^\phi f, \tag{8}$$

$$M_\lambda^\psi g = T_\psi^\phi M_\lambda^\phi T_\phi^\psi g. \tag{9}$$

移植作用素 T_ψ^ϕ, T_ϕ^ψ の L^p 有界性を述べる次の形の定理が移植定理である：

移植定理 (Transplantation Theorem)

$(\phi \to \psi$ 移植$) \qquad \|T_\psi^\phi f\|_p \le C\|f\|_p \quad ; \quad (\psi \to \phi$ 移植$) \qquad \|T_\phi^\psi g\|_p \le C\|g\|_p.$

ここで，$\|\cdot\|_p$ は，考えている空間の L^p ノルムとする.

移植定理の意義の一端については前節で述べた通りである．ここでは，マルチプライヤー作用素の

有界性が移植定理から導かれることを見よう．関係 (8) より，

$$\begin{aligned}\|M_\lambda^\phi f\|_p &= \|T_\phi^\psi M_\lambda^\psi T_\psi^\phi f\|_p \le |T_\phi^\psi|_p \|M_\lambda^\psi T_\psi^\phi f\|_p \\ &\le |T_\phi^\psi|_p |M_\lambda^\psi|_p \|T_\psi^\phi f\|_p \le |T_\phi^\psi|_p |M_\lambda^\psi|_p |T_\psi^\phi|_p \|f\|_p.\end{aligned}$$

ここで，$|\cdot|_p$ は作用素の L^p 空間上での作用素ノルムを表す．

つまり，ψ 系でマルチプライヤー作用素 M_λ^ψ の L^p 有界性 $|M_\lambda^\psi|_p < \infty$ が成り立っているならば ϕ 系でも L^p 有界性 $|M_\lambda^\phi|_p < \infty$ が成り立つということである．関係 (9) もあるので，逆もいえる．即ち，移植定理からマルチプライヤー作用素に関する次の定理が導かれる．我々はこの形の定理を移転定理と呼ぼう．

移転定理 (Transference Theorem)

$(\psi \to \phi$ 型$)$ $|M_\lambda^\psi|_p < \infty$ ならば $|M_\lambda^\phi|_p < \infty$; $(\phi \to \psi$ 型$)$ $|M_\lambda^\phi|_p < \infty$ ならば $|M_\lambda^\psi|_p < \infty$

もし，ψ 系において，マルチプライヤー作用素の L^p 有界性に関し豊富な結果の蓄積があれば，$(\psi \to \phi$ 型$)$ の移転定理を証明することによって，それらがそっくり ϕ 系に持ち込めるということである．移植定理の最大の目的の 1 つは，この有用な移転定理を得ることにある．ただし，移転定理は必ずしも移植定理を必要とはしない (移植定理を介さずに直接別の方法で，移転定理を証明することも行われている)．

課題は，よく研究されている直交関数系からあまり研究が進んでいない直交関数系への移転定理，またそれを導く移植定理を証明することである．

注意として，移転定理では $(\psi \to \phi$ 型$)$ と $(\phi \to \psi$ 型$)$ のそれぞれが独立に有用である．移転定理を移植定理から導くには，$(\psi \to \phi$ 型$)$ 1 つを導くにも，移植定理の $(\psi \to \phi$ 移植$)$ と $(\phi \to \psi$ 移植$)$ が一組となって成り立たなければならない．一方向の移植作用素の有界性が有効に機能する場合もあるが (例えば，[21])，普通は $(\psi \to \phi$ 移植$)$ と $(\phi \to \psi$ 移植$)$ 両方をもって移植定理と呼ぶ．

移転定理を弱 L^p 空間で考えること，また極大型マルチプライヤーに対して考えることも大切である．定義をもう 1 つ与えたうえで，移転定理として定式化される問題の典型的な場合を述べておく．関数 $\lambda(x)$ に対し $\lambda_\epsilon = \{\lambda(\epsilon n)\}$, $\epsilon > 0$ とおく．極大型マルチプライヤー作用素 M_*^ϕ を $M_*^\phi f(x) = \sup_{\epsilon>0} |M_{\lambda_\epsilon}^\phi f(x)|$ とする．典型的な移転定理は，次のように整理される．

1. 普通型：マルチプライヤー作用素 M_λ^ϕ と M_λ^ψ について

(a) Strong type

(i) $(\psi \to \phi$ 型$)$ M_λ^ψ : strong type $(p,p) \Rightarrow M_\lambda^\phi$: strong type (p,p) (ii) その $(\phi \to \psi$ 型$)$

(b) Weak type：上の strong type (p,p) を weak type (p,p) としたもの

2. 極大型：極大型マルチプライヤー作用素 M_*^ϕ と M_*^ψ について上の (a), (b)

ここで，作用素 T が strong type (p,p) であるとは，定数 C があって，$\|Tf\|_p \le C\|f\|_p$ が成り立つこと．また，weak type (p,p) とは，$|\{x : |Tf(x)| > t\}| \le C(\|f\|_p/t)^p$, $t > 0$ が成り立つことである．左辺 $|\{\cdots\}|$ は，集合 $\{\cdots\}$ の測度である．

移植定理については，今のところ普通型，strong type の移転定理を導き出すものしか考えられていない．

上で整理した問題は，そっくりそのまま dual の世界に定式化出来る．数列 $a = \{a(m)\}$, $b = \{b(n)\}$

を $a(m) \sim \int (\sum_k a(k)\overline{\phi_k(x)})\phi_m(x)\,dx$, $b(n) \sim \int (\sum_l b(l)\overline{\psi_l(y)})\psi_n(y)\,dy$ と展開し，移植作用素を

$$\tilde{T}^{\phi}_{\psi} a(n) \sim \int \Big(\sum_k a(k)\overline{\phi_k(t)}\Big)\psi_n(t)\,dt, \qquad \tilde{T}^{\psi}_{\phi} b(m) \sim \int \Big(\sum_l b(l)\overline{\psi_l(s)}\Big)\phi_m(s)\,ds$$

と定義する．マルチプライヤー作用素は,

$$\tilde{M}^{\phi}_{\lambda} a(m) \sim \int \lambda(x)\Big(\sum_k a(k)\overline{\phi_k(x)}\Big)\phi_m(x)\,dx$$

で定義される．作用素 $\tilde{M}^{\psi}_{\lambda}$, $\tilde{M}^{\phi}_{*}$, $\tilde{M}^{\psi}_{*}$ も同じように定義する．関係

$$\tilde{M}^{\phi}_{\lambda} a = \tilde{T}^{\psi}_{\phi}\tilde{M}^{\psi}_{\lambda}\tilde{T}^{\phi}_{\psi} a, \quad \tilde{M}^{\psi}_{\lambda} b = \tilde{T}^{\phi}_{\psi}\tilde{M}^{\phi}_{\lambda}\tilde{T}^{\psi}_{\phi} b$$

も同様に成り立つ．よって，先の問題のすべてがこの dual の世界でも問題になる．以上が，移植定理 (transplantation theorem) と移転定理 (transference theorem) の関係及び考えられる典型的な問題の整理である．

3　移植定理と移転定理の歴史的概観

これまでに得られている移植定理と移転定理を概観しよう．まず，移植定理から始める．最初のものといわれているのは，D. L. Guy [22] によるハンケル変換に関するものである．それは，区間 $(0,\infty)$ 上の関数 $f(x)$ の μ 次のハンケル変換

$$F_\mu(x) = \int_0^\infty f(t)J_\mu(xt)\sqrt{xt}\,dt$$

と ν 次のハンケル変換 $F_\nu(x)$ に対して,

$$\int_0^\infty |F_\mu(x)|^p x^\delta\,dx \le C\int_0^\infty |F_\nu(x)|^p x^\delta\,dx,$$
$$1 < p < \infty, \quad -1 < \delta < p-1, \quad \mu,\nu \ge -1/2$$

が成り立つことを主張するものである．ここで，$J_\mu(x)$ は，μ 次の第 1 種ベッセル関数である．前節の設定でいえば $\{\phi_n(x)\}_n$ が $\{J_\mu(xt)\sqrt{xt}\}_t$ に，$\{\psi_n(y)\}_n$ が $\{J_\nu(yt)\sqrt{yt}\}_t$ に対応する．ここでは，さらに重み x^δ 付きで得られている．ハンケル変換は $-1/2$ 次のとき cosine 変換なので，この移植定理により，フーリエ変換における L^p 有界なマルチプライヤーは，すべてのハンケル変換においてもそうなることがわかる．上の，Guy の結果の後に，R. Askey and S. Wainger [6] の ultraspherical 級数に対するものが現れた．第 1 節の移植作用素 T^α_γ を用いて，彼らの結果を述べると：

$$\int_0^\pi |T^\alpha_\gamma f(\theta)|^p(\sin\theta)^\delta\,d\theta \le \int_0^\pi |f(\theta)|^p(\sin\theta)^\delta\,d\theta, \tag{10}$$
$$1 < p < \infty, \quad -1 < \delta < p-1, \quad \alpha,\gamma \ge -1/2$$

である．第 2 節の設定と第 1 節の記号でいうと，$\{\phi_n(x)\}$ が $\{R^\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ に，$\{\psi_n(y)\}$ が $\{R^\gamma_n\}_{n=0}^\infty$ に対応する．指数 $\alpha = -1/2$ の場合が，第 1 節で述べたように，cosine 級数なので，フーリエ級数での L^p 有界なマルチプライヤーは ultraspherical 級数においてもそうなる．特に重要な Marcinkiewicz 型

のマルチプライヤー定理を書いてみよう ([6])：数列 $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ が定理Bの条件を満たすならば,

$$\int_0^{\pi} |M_\lambda^\alpha f(\theta)|^p (\sin\theta)^\delta \, d\theta \le \int_0^{\pi} |f(\theta)|^p (\sin\theta)^\delta \, d\theta.$$

ここで，$1<p<\infty$, $-1<\delta<p-1$, $\alpha \ge -1/2$. また，$M_\lambda^\alpha f(\theta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n c_n^\alpha R_n^\alpha(\theta)$, $f(\theta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n^\alpha R_n^\alpha(\theta)$ である.

上の移植定理 (10) の dual case が同じ R. Askey and S. Wainger [5] によって示された：

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n^\alpha|^p (n+1)^\delta \le C \sum_{n=0}^{\infty} |c_n^\beta|^p (n+1)^\delta, \tag{11}$$

$$1<p<\infty, \quad -1<\delta<p-1, \quad \alpha, \beta \ge -1/2.$$

この結果と，G. Sunouchi [52] によって得られたフーリエ係数に関する Marcinkiewicz 型のマルチプライヤー定理，そしてその重み付きの場合 S. Igari [23] から，次の ultraspherical 係数に関する Marcinkiewicz 型のマルチプライヤー定理が従う ([5])：有界関数 $\lambda(\theta)$ が条件 $\int_{\pi 2^{-n-1}}^{\pi 2^{-n}} |d\lambda(\theta)| \le C$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ を満たすならば,

$$\tilde{M}_\lambda^\alpha a(n) = \int_0^{\pi} \lambda(\theta) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a(n) R_n^\alpha(\theta) \right) R_n^\alpha(\theta) \, d\theta$$

とするとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{M}_\lambda^\alpha a(n)|^p (n+1)^\delta \le C \sum_{n=0}^{\infty} |a(n)|^p (n+1)^\delta,$$

$$1<p<\infty, \quad -1<\delta<p-1, \quad \alpha \ge -1/2.$$

Askey は，上の二つの移植定理 (10), (11) をヤコビ多項式の作る直交関数系へと一般化している：級数の場合が [2]，でありその dual である係数の場合が [1] である．ヤコビ級数に関する移植定理の詳細な議論は，B. Muckenhoupt [39] にある．また，ごく最近 A. Miyachi [36], [37] によって，ヤコビ級数に関する，ハーディー空間上の重み付きの移植定理が得られている.

その他の移植定理としては，Mehler 変換に関するものを S. Schindler [46] が，また彼女はハンケル変換の移植作用素の explicit な表現を得ることによって，Guy の移植定理に別証明を与えている [47]. フーリエ・ベッセル級数などを含むものは，J. E. Gilbert [19] によって，また彼はある特異なスツルム・リューヴィル系の固有関数展開に関する移植定理も示している [20]．ラゲール級数のものは Y. Kanjin [28] によって得られている．この結果と，その応用を次節で述べてみたい.

次に，移転定理を見よう．K. de Leeuw [11] をもって出発点と見るのが一般的のようである．結果は，$\lambda(\xi)$ を実数 $\boldsymbol{R}$ 上の有界関数で regulated (approximate identity $\{u_\epsilon\}$ があって，各点 ξ で $\lambda * u_\epsilon(\xi) \to \lambda(\xi)$) であるものとする．このとき,

$$M_\lambda^{\boldsymbol{R}} f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \, d\xi, \qquad \hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} \, dx$$

が

$$\int_{-\infty}^{\infty} |M_{\lambda}^{\boldsymbol{R}} f(x)|^p \, dx \le C \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx \tag{12}$$

を満たすならば,

$$\int_0^{2\pi} |M_{\lambda_\epsilon}^{\boldsymbol{T}} g(t)|^p \, dt \le C \int_0^{2\pi} |g(t)|^p \, dt, \quad \epsilon > 0 \tag{13}$$

が成り立つ．ここで，$1 \le p \le \infty$, $\boldsymbol{T} = (0, 2\pi)$,

$$M_{\lambda_\epsilon}^{\boldsymbol{T}} g(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda(\epsilon n) \hat{g}(n) e^{int}, \quad \hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} \, dt.$$

前節で，ϕ 系として $\{(1/2\pi)e^{ix\xi}\}_\xi$ を ψ 系として $\{(1/2\pi)e^{int}\}_n$ を考えたものである．この逆を与えたのが S. Igari [24] である．即ち，(13) が成り立つならば，(12) が成り立つ．ここで，C は ϵ, f, g に依存しない定数.

C. Kenig and P. A. Tomas [34] は，極大型のものを扱った：

$$M_*^{\boldsymbol{T}} g(t) = \sup_{\epsilon > 0} |M_{\lambda_\epsilon}^{\boldsymbol{T}} g(t)|, \quad M_*^{\boldsymbol{R}} f(x) = \sup_{\epsilon > 0} |M_{\lambda_\epsilon}^{\boldsymbol{R}} f(x)| = \sup_{\epsilon > 0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(\epsilon\xi) \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \, dx \right|$$

とするとき，$M_*^{\boldsymbol{T}}$ が strong type (p, p) であることと，$M_*^{\boldsymbol{R}}$ がそうであることとは同値である．また，weak type (p, p) に関しても同様である．ただし，p の範囲は $1 < p < \infty$ である．

その後，関連するいくつかの結果の後に M. Kaneko [26] によるベクトル値関数上への一般化がなされた．そこには, Kenig and Tomas で残っていたものの 1 つ '$M_*^{\boldsymbol{T}}$: weak type $(1,1) \Rightarrow M_*^{\boldsymbol{R}}$: weak type $(1,1)$' も示されている．今 1 つ残っていたその逆 '$M_*^{\boldsymbol{R}}$: weak type $(1,1) \Rightarrow M_*^{\boldsymbol{T}}$: weak type $(1,1)$' は N. Asmar, E. Berkson and J. Bourgan [7] で示された．その別証明は，K. Woźniakowski [59] にある．

実数 $\boldsymbol{R}$ とトーラス $\boldsymbol{T}$ とは別の設定では，例えば，A. H. Dooley and G. I. Gaudry [13] がある．これは，$\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{R}$ の代わりにそれぞれ $SO(n+1)$, $M(n)$ を考えたものである．また，2-series field における移転定理は J. Tateoka [54], J. Tateoka and W. R. Wade [55] で研究されている．

ヤコビ級数からハンケル変換への移転定理は S. Igari [25] によって示された．この Igari の結果の weak type のものは W. C. Connett and A. L. Schwartz [10] が示した．極大型の strong type のものは Y. Kanjin [27] にある．そして，ローレンツ空間へ一般化したものが E. Sato [45] にある．また，この Igari の手法によるラゲール級数からハンケル変換への移転定理は，K. Stempak [49], [50] にある．

その他に，ハーディー空間 $H^p(\boldsymbol{R}^n)$ と $H^p(\boldsymbol{T}^n)$ の間の移転定理が D. Fan and Z. Wu [15] によって調べられている．そして，J. J. Betancor and K. Stempak [9], D. Fan and S. Sato [14] などの結果が続いている．

4 ラゲール級数の移植定理とその応用

この節においては，筆者がかかわってきたラゲール多項式の作る直交関数系に関する移植定理と，それを適用して得られるマルチプライヤー定理，また移植定理の応用としての fractional integration の定理を述べたい．

まず，扱う対象をきっちり述べるために少し記号を用意する．指数 $\alpha > -1$ を持つ次数 n のラゲール多項式 $L_n^\alpha(x)$ は

$$L_n^\alpha(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}x^{n+\alpha}) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{(-x)^k}{k!}$$

で与えられる．これは，次の直交関係式を満たす：

$$\int_0^\infty L_m^\alpha(x)L_n^\alpha(x)e^{-x}x^\alpha\,dx = \delta_{mn}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}.$$

これより，

$$\mathscr{L}_n^\alpha(x) = \sqrt{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}}\,L_n^\alpha(x)e^{-x/2}x^{\alpha/2}$$

とおくと，関数系 $\{\mathscr{L}_n^\alpha\}_{n=0}^\infty$ は $L^2((0,\infty),dx)$ で正規直交基底となる．この基底に関して，区間 $(0,\infty)$ 上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^\infty a_n^\alpha(f)\mathscr{L}_n^\alpha(x), \qquad a_n^\alpha(f) = \int_0^\infty f(x)\mathscr{L}_n^\alpha(x)\,dx \tag{14}$$

と展開する．関数 $f(x) \in L^p(0,\infty)$ に対するラゲール展開の係数 $a_n^\alpha(f)$ は，$\alpha \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$ または $-1 < \alpha < 0$, $(1+\alpha/2)^{-1} < p \leq \infty$ であるとき有限値として確定する．これは，Hölder の不等式から得られる $|a_n^\alpha(f)| \leq \|f\|_p\|\mathscr{L}_n^\alpha\|_{p'}$, $1/p + 1/p' = 1$ と，次の事実からわかる：$\alpha \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$ または $-1 < \alpha < 0$, $(1+\alpha/2)^{-1} < p \leq \infty$ のとき $\|\mathscr{L}_n^\alpha\|_{p'} < \infty$．この節では，$\|f\|_p$ は区間 $(0,\infty)$ 上の L^p ノルム：$\|f\|_p = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$ を表すものとする．

上のラゲール級数に対して，移植定理を得ることが目的である．移植定理の直接の応用は，ハイゼンベルグ群の解析から J. Długosz [12] によって得られた，次に述べる，Marcinkiewicz 型のマルチプライヤー定理の補完である．

有界な数列 $\lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ と α 次のラゲール級数 (14) に対して，マルチプライヤー λ を持つマルチプライヤー作用素 M_λ^α は，

$$M_\lambda^\alpha f(x) \sim \sum_{n=0}^\infty \lambda_n a_n^\alpha(f)\mathscr{L}_n^\alpha(x)$$

で定義される．ここでは，マルチプライヤー作用素 M_λ^α が $L^p(0,\infty)$ 有界 $\|M_\lambda^\alpha f\|_p \leq C\|f\|_p$ であるとき，マルチプライヤー λ を指数 α のラゲール級数に対する L^p マルチプライヤーであると呼ぼう．Długosz は次を得た：

定理 C ([12]) 区間 $(0,\infty)$ 上の関数 $\lambda(x)$ が

$$\lambda(x) \in C^4(0,\infty), \qquad \sup_{x>0}|\lambda^{(j)}(x)x^j| < \infty, \quad j = 0,1,2,3,4$$

を満たすとする．このとき，$\lambda = \{\lambda(n+1)\}_{n=0}^\infty$ は，指数 $\alpha = 0,1,2,\ldots$ に対してラゲール級数の L^p マルチプライヤー，$1 < p < \infty$ である．

我々が考えたいのは，ラゲール級数に関する移植定理を証明し，それを適用することによって，$\alpha =$

$0,1,2,\dots$ で成り立っている定理 C を，任意の α とすることである．指数 α の考えるべき自然な範囲は $-1<\alpha$ であるが，前の注意により $-1<\alpha<0$ の場合には，考える空間 $L^p(0,\infty)$ に $(1+\alpha/2)^{-1}<p$ なる条件が必要である．ラゲール級数の移植作用素 T_α^β，$\alpha,\beta>-1$ は，

$$T_\alpha^\beta f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n^\beta(f)\mathscr{L}_n^\alpha(x)$$

で定義される．この移植作用素 T_α^β の L^p 有界性がマルチプライヤー作用素 M_λ^α の L^p 有界性に関して，$\alpha=0,1,2,\dots$ の間を埋めることは，第 1, 2 節で説明した通りである．

実際，移植作用素 T_α^β の L^p 有界性を示すことが出来た：

定理 1 ([28]) 指数 $\alpha,\beta>-1$ に対して，$\gamma=\min\{\alpha,\beta\}$ とする．このとき，$\gamma\geq 0$ ならば $1<p<\infty$ において，$-1<\gamma<0$ ならば $(1+\gamma/2)^{-1}<p<-2/\gamma$ で $\|T_\alpha^\beta f\|_p\leq C\|f\|_p$ が成り立つ．

注意として，$T_\alpha^\beta T_\beta^\alpha f=f$ なので，定理は $\|f\|_p\sim\|T_\alpha^\beta f\|_p$ をいっていることになる．また，$\int_0^\infty T_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx=\int_0^\infty T_\beta^\alpha g(x)f(x)\,dx$ なので，T_α^β の L^p 有界性があれば，$\|T_\beta^\alpha g\|_{p'}\leq C\|g\|_{p'}$，$1/p+1/p'=1$ が従う．そして，$-1<\gamma<0$ の場合の制限 $p<-2/\gamma$ は，条件 $(1+\gamma/2)^{-1}<p'$ のことである．

上の定理は，S. Thangavelu [56] によって $x^{p/4-1/2}\,dx$ なる重みに対しても示された．さらに，K. Stempak and W. Trebels [51] によって重み $x^\delta\,dx$ に拡張された．ただし，$0\leq\gamma$，$-1<\delta<p-1$ または $-1<\gamma<0$，$-1-\gamma p/2<\delta<p-1+\gamma p/2$ である．

移植定理によってラゲール級数のマルチプライヤー定理は次のようになる：

定理 2 ([12], [28], [57], [51]) 指数 α は $\alpha>-1$，関数 $\lambda(x)$ は

$$\lambda(x)\in C^2(0,\infty),\quad \sup_{x>0}|\lambda^{(j)}(x)x^j|<\infty,\quad j=0,1,2$$

を満たすとする．このとき，$\lambda=\{\lambda(n+1)\}_{n=0}^\infty$ は指数 α のラゲール級数に対する L^p マルチプライヤーである．ただし，$\alpha\geq 0$，$1<p<\infty$ または $-1<\alpha<0$，$(1+\alpha/2)^{-1}<p<-2/\alpha$ である．

前に述べた通り，Długosz [12] によって微分が 4 回，α が $\alpha=0,1,2,\dots$ の場合が得られた．Kanjin [28] によって任意の α に拡張され，Thangavelu [57] で微分が 2 回に下がった．上の定理の記述はこの場合である．続いて，Stempak–Trebels [51] で微分が 1 回かつ条件が $\sup_{x>0}|\lambda(x)|^2+\sup_{N>0}\int_N^{2N}|\lambda'(x)|^2\,dx<\infty$ に弱められた．

移植定理のもう 1 つの応用として，ラゲール級数に関する fractional integration の定理に触れたい．フーリエ級数やフーリエ変換でよく知られた，fractional integration に関する Hardy–Littlewood–Sobolev の定理をラゲール展開で考えてみることである．

フーリエ級数の形で述べると，$I_\sigma f(x)=\sum_{n\neq 0}|n|^{-\sigma}\hat{f}(n)e^{inx}$ に対して，

$$\|I_\sigma f\|_{L^q(0,2\pi)}\leq C\|f\|_{L^p(0,2\pi)},\quad 0<\sigma<1,\ \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\sigma,\ 1<p<q<\infty$$

が成り立つ．ここで，$\hat{f}(n)=(1/2\pi)\int_0^{2\pi}f(x)e^{-inx}\,dx$ であり $\|f\|_{L^p(0,2\pi)}=(\int_0^{2\pi}|f(t)|^p\,dt)^{1/p}$ である．評価 $\sum_{n\neq 0}|n|^{-\sigma}e^{inx}\sim|x|^{\sigma-1}$ $(x\to 0)$ があるので，$1/q>(1/p)-\sigma$ ならば Young の畳み込みについての不等式から，上の不等式はすぐに得られる．実際には，$1/q=(1/p)-\sigma$ まで不等式

が成立する．これをいうのが fractional integration の定理である．

ラゲール展開に関して，fractional integration の定理を示すことが出来た：

定理 3 ([29]) 指数 α は $\alpha > -1$，そして $0 < \sigma < 1$ とする．区間 $(0, \infty)$ 上の関数 $f(x)$ に対して，

$$I_\sigma^{(\alpha)} f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} a_n^\alpha(f) \mathscr{L}_n^\alpha(x)$$

とする．このとき，パラメータ α, σ, p, q が範囲 $\alpha \geq 0$, $1 < p < q < \infty$, $1/q = (1/p) - \sigma$ にあるか，または範囲 $-1 < \alpha < 0$, $(1 + \alpha/2)^{-1} < p < q < -2/\alpha$, $1/q = (1/p) - \sigma$ にあるならば，$\|I_\sigma^{(\alpha)} f\|_q \leq C\|f\|_p$ が成り立つ．

この結果は，[29] とは独立に，G. Gasper, K. Stempak and W. Trebels [17] によっても得られている．彼らの証明はラゲール級数に関する畳み込み構造を使ったものである．[29] の証明は，以下に概略を述べるが，移植定理を使ったものである．さらに，G. Gasper and W. Trebels [18] は Riemann–Liouville fractional integral と Weyl fractional integral (これらの定義については，同論文参照) の評価を使った別証明を与えている．

移植定理を使った証明に触れてみたい．我々は，フーリエ級数の fractional integration の定理をラゲール級数のそれへ移すという考えを採る．

有界数列 $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ に対して，フーリエ級数のマルチプライヤー作用素 $\mathscr{M}_\Lambda$ を次で定義する：$\mathscr{M}_\Lambda g(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \hat{g}(n) e^{int}$ ただし，$g(t)$ は区間 $(0, 2\pi)$ 上の関数で，$\hat{g}(n)$ はそのフーリエ係数である．数列 Λ に対して，$\lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ とおく．次の命題がいえる：

命題 1 作用素 $\mathscr{M}_\Lambda$ が $L^p(0, 2\pi)$ から $L^q(0, 2\pi)$ への有界作用素，即ち Λ がフーリエ級数の (p, q) マルチプライヤーであるとする．このとき，M_λ^α は $L^p(0, \infty)$ から $L^q(0, \infty)$ への有界作用素になる．即ち，λ は指数 α のラゲール展開に関する (p, q) マルチプライヤーである．

ただし，$\alpha \geq 0$, $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ または，$-1 < \alpha < 0$, $(1 + \alpha/2)^{-1} < p \leq 2 \leq q < -2/\alpha$ である．

指数が $\alpha \geq 0$ のときに，この命題から定理が従うことを見てみよう．作用素 $I_\sigma^{(\alpha)}$ のパラメータ σ を複素化

$$I_z^{(\alpha)} f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} a_n^\alpha(f) \mathscr{L}_n^\alpha(x), \quad z = \sigma + i\theta$$

して，Stein の複素補間定理を使う．点 $(1/p, 1/q)$ と σ を，$0 < \sigma < 1$, $1 < p < q < \infty$, $1/q = (1/p) - \sigma$ であるように与える．2 点 $(1/p_0, 1/q_0)$, $(1/p_1, 1/p_1)$, $1 < p_0 \leq 2 \leq q_0 < \infty$, $1 < p_1 < \infty$ を，それらを結ぶ線分の内点が点 $(1/p, 1/q)$ を含むように取る．いうべきは，点 $(1/p_1, 1/p_1)$ での $I_{i\theta}^{(\alpha)}$ の (L^{p_1}, L^{p_1}) 有界性と，点 $(1/p_0, 1/q_0)$ での $I_{\sigma_0+i\theta}^{(\alpha)}$ の (L^{p_0}, L^{q_0}) 有界性である．ただし，ここで $\sigma_0 = 1/p_0 - 1/q_0$ である．点 $(1/p_1, 1/p_1)$ での有界性は，前述のマルチプライヤー定理より $\{n^{-i\theta}\}_{n=1}^{\infty}$ が指数 α のラゲール展開の L^p, $1 < p < \infty$ マルチプライヤーであることより従う．点 $(1/p_0, 1/q_0)$ でのそれは，$I_{\sigma_0+i\theta}^{(\alpha)} = I_{\sigma_0}^{(\alpha)} I_{i\theta}^{(\alpha)}$ なので，$I_{i\theta}^{(\alpha)}$ については今述べたのと同じ理由で有界である．そして，$I_{\sigma_0}^{(\alpha)}$ については，命題からフーリエ級数の場合の有界性がこちらに移ってきている．

以上で，$\|I_{i\theta}^{(\alpha)}f\|_{p_1}\le C_\theta\|f\|_{p_1}$ と $\|I_{\sigma_0+i\theta}^{(\alpha)}f\|_{q_0}\le C_\theta\|f\|_{p_0}$ が成り立つことになる．定数 C_θ に求められる，θ に関し admissible growth であるという条件も確かめられるので，複素補間定理より，$I_\sigma^{(\alpha)}$ の有界性がいえる．

命題の証明は，移植定理があるので，$\|M_\lambda^0 f\|_q\le C\|f\|_p$ ($\alpha=0$ の場合) を示せば十分である．次のような補題を考える：

補題 1 (1) 区間 $(0,2\pi)$ 上の関数 $g(t)$ に対し，区間 $(0,\infty)$ 上の関数 $Ug(x)$ を

$$Ug(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\hat{g}(n)\mathscr{L}_n^0(x)$$

で定義する．このとき，$\|Ug\|_q\le C\|g\|_{L^q(0,2\pi)}$，$2\le q<\infty$ が成り立つ．

(2) 区間 $(0,\infty)$ 上の関数 $f(x)$ に対し，区間 $(0,2\pi)$ 上の関数 $Vf(t)$ を

$$Vf(t)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n^0(f)e^{int}$$

で定義する．このとき，$\|Vf\|_{L^p(0,2\pi)}\le C\|f\|_p$，$1<p\le 2$ が成り立つ．

この補題より，命題が出ることは次のようにしてわかる．U, V の定義より $M_\lambda^0=U\mathscr{M}_\Lambda V$ であることと，補題 (1) より，$\|M_\lambda^0 f\|_q=\|U\mathscr{M}_\Lambda Vf\|_q\le C\|\mathscr{M}_\Lambda Vf\|_{L^q(0,2\pi)}$ である．命題の仮定から $\|\mathscr{M}_\Lambda Vf\|_{L^q(0,2\pi)}\le C\|Vf\|_{L^p(0,2\pi)}$ であり，補題 (2) から $\|Vf\|_{L^p(0,2\pi)}\le C\|f\|_p$ である．以上から，求める不等式 $\|M_\lambda^0 f\|_q\le C\|f\|_p$ を得る．補題を示そう．ここでは，(2) を見ておく．指数 α が $\alpha=0$ なので，$Vf(t)$ が直接計算出来て，

$$Vf(t)=\frac{ie^{-it/2}}{2\sin(t/2)}\int_0^\infty f(x)e^{-i(x/2)\cot(t/2)}\,dx$$

である．そして，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|Vf(t)|^p\,dt&=2^{2-p}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^\infty f(x)e^{-ixu}\,dx\right|^p(1+4u^2)^{p/2-1}\,du\\&\le C\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(u)|^p|u|^{p-2}\,du\le C\int_0^\infty|f(x)|^p\,dx\end{aligned}$$

となる．最後の不等式は，一般化されたプランシュレルの定理である．これで，補題 (2) の不等式を得る．

以下，いくつかの注意を述べて本節を終わる．(1)：関数 $f(x)\in L^p((0,\infty),e^{-x}x^\alpha\,dx)$ に対して，展開

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}c_n^\alpha(f)L_n^\alpha(x),\quad c_n^\alpha(f)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\int_0^\infty f(x)L_n^\alpha(x)e^{-x}x^\alpha\,dx$$

を扱うのが自然に見える．しかし，部分和 $\mathscr{S}_N f(x)=\sum_{n=0}^N c_n^\alpha(f)L_n^\alpha(x)$ の $L^p((0,\infty),e^{-x}x^\alpha\,dx)$ での収束を考えると，$p=2$ でしか収束しない．文献 H. Pollard [41] 参照．さらに，総和法を考えても，$p=2$ でしか収束しない．これは，R. Askey and I. I. Hirshman Jr. [3] による．(2)：ラゲール級数に関する，最も基本的な結果は R. Askey and S. Wainger [4] による部分和の収束に関する次の

結果である：$S_N f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n^\alpha(f)\mathscr{L}_n^\alpha(x)$ とおくとき，$\|S_N f - f\|_p \to 0$ $(N \to \infty)$，$4/3 < p < 4$ である．(3)：ここで扱ったラゲール級数への展開は，the standard Laguerre expansion と呼ばれるものである．ラゲール級数への展開に対しては，さらに the Laguerre expansion of convolution type と the Laguerre expansion of Hermite type と呼ばれる 2 つの型の展開が議論されている．これらの展開を含む，エルミート級数とラゲール級数の調和解析に関しては S. Thangavelu [58] がある．

5 実ハーディー空間における直交関数系

本節においては，近時調和解析学で得られた大きな成果の 1 つである実ハーディー空間の理論 (例えば，[16], [48]) が，直交関数系の解析にも有力な道具を提供するものであることに，簡単に触れてみたい．題材としては，1 つ目として単位円盤上の古典ハーディー空間においてよく知られた Paley の不等式を選ぶ．以下に述べるような実解析的手法が開発される以前の，複素解析的手法を使った直交関数系の調和解析に関するまとまった研究は，B. Muckenhoupt and E. M. Stein [38] にある．

複素平面における単位開円盤 D 上のハーディー空間 $H^1(D)$ とは，次の条件を満たす D 上の正則関数 $F(z)$ 全体から成る空間である：$\|F\|_{H^1} = \sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|\,d\theta < \infty$．Paley の不等式とは，ハーディー空間 $H^1(D)$ に属する関数 $F(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ に対して成り立つ次の不等式をいう：$\{\sum_{k=1}^\infty |a_{n_k}|^2\}^{1/2} \le C\|F\|_{H^1}$．ここで，数列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ はアダマール数列，即ち $1 < \rho \le n_{k+1}/n_k$ を満たす数列である．

我々は，この不等式を第 1 節で述べたヤコビ級数に対して考えたい．ヤコビ級数は，直接的には解析的構造とは結びつき難い．そこで，考える空間を実ハーディー空間 $\Re H^1$ に取ることを考える．実ハーディー空間 $\Re H^1$ とは，関数 $F(z) \in H^1(D)$ の実部 $\Re F(z)$ の境界関数 $f(\theta) = \lim_{r\to 1}\Re F(re^{i\theta})$ から成る空間である．ノルム $\|f\|_{\Re H^1}$ は $f(\theta)$ を与える $F(z)$ のうち，$F(0)$ が実数であるものを使って $\|f\|_{\Re H^1} = \|F\|_{H^1}$ で与える．Paley の不等式は，実ハーディー空間について述べた次のものと同値である：$f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^\infty c_n e^{in\theta} \in \Re H^1$ ならば，$\{\sum_{k=1}^\infty (|c_{n_k}|^2 + |c_{-n_k}|^2)\}^{1/2} \le C\|f\|_{\Re H^1}$．さらに，我々はヤコビ関数 $R_n^{\alpha,\beta}(\theta)$ の定義域を考慮して，次の空間 $H^1(0,\pi)$ を考える：

$$H^1(0,\pi) = \{h|_{(0,\pi)};\ h \in \Re H^1,\ \text{偶関数}\}.$$

ノルムは，$\|f\|_{H^1(0,\pi)} = \|h\|_{\Re H^1}$ で与える．ただし，$f = h|_{(0,\pi)}$ である．

実ハーディー空間には，(H^1, BMO)-duality，アトム分解による特徴づけ等の実解析的な道具が揃っている．つまり，複素解析的手法の使用が困難な対象に対して，有効な解析を可能にする舞台を提供する．我々は，BMO 関数が H^1 上の連続汎関数を与えることを利用してヤコビ級数に関する Paley の不等式を得ることが出来た．

定理 4 ([33]) パラメータ (α,β) は，$\alpha,\beta \ge -1/2$ を満たすものとする．数列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ をアダマール数列とする．このとき，関数 $f(\theta) \sim \sum_{n=0}^\infty c_n^{(\alpha,\beta)} R_n^{(\alpha,\beta)}(\theta) \in H^1(0,\pi)$ における係数 $c_n^{(\alpha,\beta)}$ は，次の不等式を満たす：

$$\left\{\sum_{k=1}^\infty |c_{n_k}^{(\alpha,\beta)}|^2\right\}^{1/2} \le C\|f\|_{H^1(0,\pi)}. \tag{15}$$

ハーディー空間において成り立つ，もう1つのよく知られた不等式は関数 $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^1(D)$ に対して成り立つ不等式：$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|/(n+1) \leq C\|F\|_{H^1}$ である．ハーディー空間における Hardy の不等式と呼ばれている．実ハーディー空間 $\Re H^1$ で述べれば：$f(\theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \in \Re H^1$ ならば，$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_n|/(|n|+1) \leq C\|f\|_{\Re H^1}$．この不等式も，実ハーディー空間におけるアトム分解の力を借りて，各種の直交関数系において同様の形で成り立つことが知られている．これに関して，いくつかの文献をあげて本稿を終わりたい．ヤコビ級数における Hardy の不等式は Y. Kanjin and K. Sato [32] において準備中である．エルミート級数とラゲール級数に関する Hardy の不等式は [30]，M. Satake [44] にある．ハンケル変換に関するものは [31] にあり，少し違った設定での結果は J. J. Betancor and L. Rodríguez-Mesa [8] にある．

文献

[1] R. Askey, A transplantation theorem for Jacobi coefficients, Pacific J. Math., **21** (1967), 393–404.

[2] R. Askey, A transplantation theorem for Jacobi series, Illinois J. Math., **13** (1969), 583–590.

[3] R. Askey and I.I. Hirshman Jr., Mean summability for ultraspherical polynomials, Math. Scand., **12** (1963), 167–177.

[4] R. Askey and S. Wainger, Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series, Amer. J. Math., **87** (1965), 695–708.

[5] R. Askey and S. Wainger, A transplantation theorem for ultraspherical coefficients, Pacific J. Math., **16** (1966), 393–405.

[6] R. Askey and S. Wainger, A transplantation theorem between ultraspherical series, Illinois J. Math., **10** (1966), 322–344.

[7] N. Asmar, E. Berkson and J. Bourgan, Restrictions from $\boldsymbol{R}^n$ to $\boldsymbol{T}^n$ of weak $(1,1)$ multipliers, Studia Math., **108** (1994), 291–299.

[8] J. J. Betancor and L.Rodríguez-Mesa, On Hankel transformation, convolution operators and multipliers on Hardy type spaces, J. Math. Soc. Japan, **53** (2001), 687–709.

[9] J. J. Betancor and K. Stempak, Relating multipliers and transplantation for Fourier–Bessel expansions and Hankel transform, Tohoku Math. J., **53** (2001), 109–129.

[10] W. C. Connett and A. L. Schwartz, Weak type multipliers for Hankel transforms, Pacific J. Math., **63** (1976), 125–129.

[11] K. de Leeuw, On L^p multipliers, Ann. of Math. (2), **81** (1965), 364–379.

[12] J. Długosz, L^p multipliers for Laguerre expansions, Colloq. Math., **54** (1987), 287–293.

[13] A. H. Dooley and G. I. Gaudry, An extension of de Leew's theorem to the N-dimensional rotation group, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **34** (1984), 111–135.

[14] D. Fan and S. Sato, Transference on certain multiliner multiplier operators, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, **70** (2001), 37–55.

[15] D. Fan and Z. Wu, Transference of maximal multipliers on Hardy spaces, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 3169–3174.

[16] J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, Weighted Norm Inequalities and Related Topics, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[17] G. Gasper, K. Stempak and W. Trebels, Fractional integration for Laguerre expansions, Methods Appl. Anal., **2** (1995), 67–75.

[18] G. Gasper and W. Trebels, Norm inequalities for fractional integrals of Laguerre and Hermite expansions, Tohoku Math. J., **52** (2000), 251–260.

[19] J. E. Gilbert, Maximal theorems for some orthogonal series I, Trans. Amer. Math. Soc., **145** (1969), 495–515.

[20] J. E. Gilbert, Maximal theorems for some orthogonal series II, J. Math. Anal. Appl., **31** (1970), 349–368.

[21] J. J. Guadalupe and V. I. Kolyada, A transplantation theorem for ultraspherical polynomials at critical index, Studia Math., **141** (2001), 51–72.

[22] D. L. Guy, Hankel multiplier transforms and weighted p-norms, Trans. Amer. Math. Soc., **95** (1960), 137–189.

[23] S. Igari, On the decomposition theorems for Fourier transforms with weighted norms, Tohoku Math. J., **15** (1963), 6–36.

[24] S. Igari, Lectures on Fourier series of several variables, Lecture Note, Univ. of Wisconsin, 1968.

[25] S. Igari, On the multipliers of Hankel transform, Tohoku Math. J., **24** (1972), 201–206.

[26] M. Kaneko, Boundedness of some operators composed of Fourier multipliers, Tohoku Math. J., **35** (1983), 268–288.

[27] Y. Kanjin, Convergence and divergence almost everywhere of spherical means for radial functions, Proc. Amer. Math. Soc., **103** (1988), 1063–1069.

[28] Y. Kanjin, A transplantation theorem for Laguerre series, Tohoku Math. J., **43** (1991), 537–555.

[29] Y. Kanjin and E. Sato, The Hardy–Littlewood theorem on fractional integration for Laguerre se-

ries, Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995), 2165–2171.

[30] Y. Kanjin, Hardy's inequalities for Hermite and Laguerre expansions, Bull. London Math. Soc., **29** (1997), 331–337.

[31] Y. Kanjin, On Hardy-type inequalities and Hankel transforms, Monatsh. Math., **127** (1999), 311–319.

[32] Y. Kanjin and K. Sato, On the inequalities of Hardy and Paley for Jacobi expansions, in preparation.

[33] Y. Kanjin and K. Sato, Paley's inequality for the Jacobi expansions, Bull. London Math. Soc., **33** (2001), 483–491.

[34] C. Kenig and P. A. Tomas, Maximal operators defined by Fourier multipliers, Studia Math., **68** (1980), 79–83.

[35] J. Marcinkiewicz, Sur les multiplicateurs des séries de Fourier, Studia Math., **8** (1939), 78–91.

[36] A. Miyachi, A transplantation theorem for Jacobi series in weighted Hardy spaces, preprint.

[37] A. Miyachi, A transplantation theorem for Jacobi series in weighted Hardy spaces, II, preprint.

[38] B. Muckenhoupt and E. M. Stein, Classical expansions and their relation to conjugate harmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc., **118** (1965), 17–92.

[39] B. Muckenhoupt, Transplantation theorems and multipliers for Jacobi series, Mem. Amer. Math. Soc., No. 356, 1986.

[40] H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series. I, Trans. Amer. Math. Soc., **62** (1947), 387–403.

[41] H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series. II, Trans. Amer. Math. Soc., **63** (1948), 355–367.

[42] H. Pollard, The mean convergence of orthogonal series. III, Duke Math. J., **16** (1949), 189–191.

[43] M. Riesz, Sur les fonctions conjuguée, Math. Z., **27** (1928), 218–244.

[44] M. Satake, Hardy's inequalities for Laguerre expansions, J. Math. Soc. Japan, **52** (2000), 17–24.

[45] E. Sato, Lorentz multipliers for Hankel transforms, preprint.

[46] S. Schindler, Some transplantation theorems for the generalized Mehler transform and related asymptotic expansions, Trans. Amer. Math. Soc., **155** (1971), 257–291.

[47] S. Schindler, Explicit integral transform proofs of some transplantation theorems for the Hankel transform, SIAM J. Math. Anal., **4** (1973), 367–384.

[48] E. M. Stein, Harmonic Analysis, Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1993.

[49] K. Stempak, On connections between Hankel, Laguerre and Heisenberg multipliers, J. London Math. Soc. (2), **51** (1995), 286–289.

[50] K. Stempak, Transplanting maximal inequalities between Laguerre and Hankel multipliers, Monatsh. Math., **122** (1996), 187–197.

[51] K. Stempak and W. Trebels, On weighted transplantation and multipliers for Laguerre expansions, Math. Ann., **300** (1994), 203–219.

[52] G. Sunouchi, Discrete analogue of theorem of Littlewood–Paley, Tohoku Math. J., **13** (1961), 320–328.

[53] G. Szegö, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., XXIII (4th edn, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975).

[54] J. Tateoka, On Hardy–Bessel potential spaces over the 2-series field, Math. Nachr., **168** (1994), 279–298.

[55] J. Tateoka and W. R. Wade, On the strong approximation and summability by Cesàro means on the Besov spaces over the 2-series field, Acta Sci. Math. (Szeged), **60** (1995), 685–703.

[56] S. Thangavelu, Transplantation, summability and multipliers for multiple Laguerre expansions, Tohoku Math. J., **44** (1992), 279–298.

[57] S. Thangavelu, A note on a transplantation theorem of Kanjin and multiple Laguerre expansions, Proc. Amer. Math. Soc., **119** (1993), 1135–1143.

[58] S. Thangavelu, Lectures on Hermite and Laguerre expansions, Math. Notes, No. 42, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1993.

[59] K. Woźniakowski, A new proof of the restriction theorem for weak type $(1,1)$ multipliers on $\boldsymbol{R}^n$, Illinois J. Math., **40** (1996), 479–483.

(2002年7月29日提出)

(かんじん ゆういち・金沢大学工学部)