

The finite element method analysis for the stress intensity factors using a path independent \hat{E} -integral formula

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-10-03 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/2297/32065

論文

経路独立 \hat{E} 積分による応力拡大係数の有限要素解析

矢富盟祥* 上田拓哉** 高木慎太郎*** 阿部孝弘****

The Finite Element Method Analysis for the Stress Intensity Factors
Using a Path Independent \hat{E} -integral Formula

by

Chikayoshi YATOMI*, Takuya UEDA**, Shintaro TAKAGI*** and Takahiro ABE****

We present a new numerical path independent \hat{E} -integral for calculating the stress intensity factors using a known auxiliary solution. The integral is path independent in the similar manner to the well known domain independent M-integral for calculating the stress intensity factors. The \hat{E} -integral is, however, path independent even if the path contains any number of crack-tip and the integral may obtain the stress intensity factors at the onset of crack kinking by the path independent integral; therefore, the integral path can be far from the crack-tip around which the numerical solution has noticeable error: The domain M-integral may not obtain the stress intensity factors at the onset of crack kinking and may be very difficult to obtain the stress intensity factors when there exist small cracks in the neighborhood of the crack-tip. For illustrative purposes, by using finite element method, numerical examples obtaining the stress intensity factors are presented for an extending straight crack and a kinking crack.

Key Words: stress intensity factor, path \hat{E} -integral, domain M-Integral, kinking crack

1 緒 言

応力拡大係数 K 値は、特に線形破壊力学における亀裂進展の破壊規準として、また、 K 値を求める公式も破壊に関する数値解析の精度検証において非常に有用である。この K 値を数値解析的に求める積分公式として、経路独立にエネルギー解放率が求まる J 積分¹⁾を基にし、 K 値の理論解が分かっている場合と、 K 値を求めようとする実問題において理論解と同一な亀裂を持つ線形弾性体を併用した領域 M 積分が汎用されている (例えば文献 2)~6)参照)。先に J.Yau, S.Wang and H.Corten²⁾は、経路 J 積分と同様に経路 M 積分を提案・検証している。この時、一般に、次章で詳述するように、これらの経路独立積分による K 値は精度が良くない。そこで、経路積分に解析精度が悪い亀裂先端近傍の積分を無くすための重み関数 $q(x)$ を導入し、精度の良いガウス積分が可能な領域 J 積分^{7),8),9)}や領域 M 積分法が提案されたが、最近では数値解析の検証にも領域 M 積分法が汎用されるようになった^{4),5)}。

本論文では、新たに応力拡大係数を算出する手法として、Yatomi により提案された E 積分公式¹⁰⁾を利用した経路 \hat{E} 積分を提案する。E 積分は積分経路内に界面、介在物、空洞などの応力の不連続面が存在する場合、主亀裂近傍に微小亀裂が数多く存在する場合、亀裂折れ曲がり

り瞬間後である場合でも、経路独立な積分で精度良くエネルギー解放率が求まる¹¹⁾¹²⁾¹³⁾。

それらの E 積分の特性により、経路 \hat{E} 積分は経路および領域 M 積分と同様、経路独立積分であり、経路および領域 M 積分では求める事が困難である、亀裂折れ曲がり瞬間後の応力拡大係数 k_I , k_{II} や亀裂先端極近傍に微小亀裂が存在する場合でも応力拡大係数を経路独立に求める事が可能である。本論文では経路 \hat{E} 積分を用いて、直進進展亀裂の応力拡大係数 K_I , K_{II} および折れ曲がり瞬間後の応力拡大係数 k_I , k_{II} を求める。直進進展亀裂を対象とした問題では、領域 M 積分から得られた解析結果と比較し、精度および経路独立性の検証を行う。また、折れ曲がり瞬間後の亀裂の応力拡大係数は、 Wu の半解析解¹⁴⁾と比較を行う。

2 \hat{E} 積分公式

本論文では、応力-ひずみ関係が $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$ ($C_{ijkl} = C_{klij}$) である線形等方超弾性体を考える。線形等方弾性体に一般的な混合モード荷重が作用する場合、エネルギー解放率 G と応力拡大係数 K_I , K_{II} は次式のように一意に関係付けられる。

$$G = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E^*} \quad (1)$$

+ 原稿受理 平成 年 月 日 Received

* 正会員 金沢大学大学院自然科学研究科 〒920-1192 金沢市角間町, Graduate School of Natural Science & Technology, Kanazawa University, kakuma-machi, kanazawa, 920-1192

** 金沢大学大学院自然科学研究科社会基盤工学専攻 〒920-1192 金沢市角間町, Division of Civil & Environmental Engineering, Graduate School of Natural Science & Technology, Kanazawa University, kakuma-machi, kanazawa, 920-1192

*** 金沢大学大学院自然科学研究科環境科学専攻 〒920-1192 金沢市角間町, Division of Environmental Science & Engineering, Graduate School of Natural Science & Technology, Kanazawa University, kakuma-machi, kanazawa, 920-1192

**** 正会員 福井工業高等専門学校環境都市工学科 〒916-8507 鯖江市下司町, Department of Civil Engineering, Fukui National College of Technology, geshi-cho, sabae, 916-8507

ここで、 E^* は材料係数 E (ヤング係数)、 ν (ポアソン比) によって次のように定義される。

$$E^* = \begin{cases} E & \text{(Plane Stress)} \\ E/(1-\nu^2) & \text{(Plane Strain)} \end{cases} \quad (2)$$

エネルギー解放率 G は非線形超弾性体内にある亀裂が単位長さ進展するのに必要なエネルギーであるから、その物理的意味が明解であるため亀裂進展の破壊規準として汎用されている。

しかしながら、実際の物質中の亀裂進展の実験結果では、この単一パラメータでは説明できず、個々の応力拡大係数を使用した K_I , K_{II} 空間における破壊条件や、亀裂が折れ曲がる場合には、折れ曲がり瞬間後の応力拡大係数 k_I , k_{II} が重要なパラメータとなった。

エネルギー解放率を求めるための経路独立積分は多々あるが、なかでも次の J 積分¹⁾が著名である。

$$J = \int_{\Gamma} \left(W \delta_{ij} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) n_j d\Gamma \quad (3)$$

ここで、 W はひずみエネルギー密度、 Γ は亀裂の先端の一方を含む任意の閉経路である。なお、本論文では議論を簡単にするため、亀裂面の表面力は 0 とする。

J. Yau, S. Wang and H. Corten²⁾は、この経路 J 積分を用いて応力拡大係数を得るために次式の経路 M 積分を提案した。

$$M = \int_{\Gamma} \left\{ W^{(1,2)} \delta_{ij} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} \right\} n_j d\Gamma \quad (4)$$

ここで、 $W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}$ である。また、 $(\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)})$ は新しく応力拡大係数を得ようとする実問題の変数を表す。一方、 $(\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)})$ は実問題と同一な亀裂が存在する場合の理論解である。

ここで、一般に、式(3)や式(4)の経路独立積分の経路には、その被積分項に応力が存在しているため、経路独立性を利用し、数値解析の誤差が大きい亀裂先端から出来るだけ離れた遠方のガウス点を通じた経路に設定される。とはいえ、式(3)や式(4)の経路積分の被積分項の特異性のオーダーは $1/r$ であるから、それらの経路独立性は他の亀裂先端が存在するまでの範囲内の大きさに限定される。また、ガウス積分は、その被積分項がガウス点で評価された場合の領域 (2次元の場合は面) 積分の値が高精度に積分できることが保証されているのであって、この点を通る経路積分の精度に関しては何も保証されていない。

そのため、経路 M 積分に対して解析精度が悪い亀裂先端近傍の解の影響を無くすための重み関数 $q(x)$ を導入し、次式のガウス積分が有効な領域 M 積分法が提案され、最近では、数値解析の検証にもこの領域 M 積分法が汎用されるようになった^{4),5)}。

$$M = \int_A \left\{ \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} - W^{(1,2)} \delta_{ij} \right\} \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (5)$$

領域 M 積分における積分領域 A は Fig.1 に示す亀裂先端を含む境界 Γ 、亀裂の両面 C_+ , C_- および Γ の外側にあ

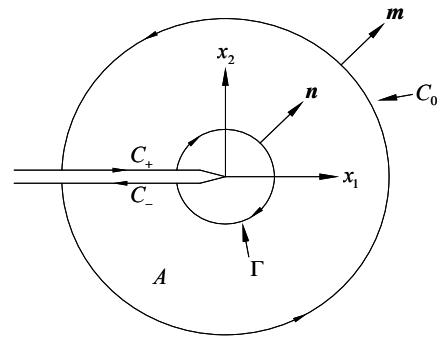


Fig.1 A domain of M-integral.

る境界 C_0 により閉じられた部分である。なお、 C_+ , C_- , C_0 において、単位法線ベクトルは Fig.1 にあるように外向き単位法線ベクトル $m = n$ であり、 Γ においては内向き単位法線ベクトル $m = -n$ である。重み関数 $q(x)$ は Γ 内で大きさ 1 の値を持ち、 C_0 の外側で 0 となる閉じられた領域で区分的に滑らかな関数である。

さて、エネルギー解放率を求める経路独立積分に、著者の一人である Yatomi が提案した E 積分¹⁰⁾がある。この積分は本来、非線形弾性体の場合でもエネルギー解放率を精度良く求めることが可能な経路積分であるが、本論文では K 値を求める関係から、元の E 積分公式を微小変形の線形等方超弾性体の場合に簡便化した公式を利用して、 K 値を求める新たな経路積分を求める。この積分は、経路および領域 M 積分と同様、経路独立積分であるが、経路および領域それぞれの J 積分や M 積分では求める事が困難である亀裂折れ曲がり瞬間後の応力拡大係数 k_I , k_{II} や亀裂先端近傍に微小亀裂が存在する場合でも応力拡大係数を経路独立に求める事が可能である。

亀裂面に表面力が作用しない場合、線形等方超弾性体の E 積分公式は次式で表される¹⁰⁾¹¹⁾¹²⁾¹³⁾。

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ t(x, \ell) \cdot \frac{\partial u(x, \ell)}{\partial \ell} - \frac{\partial t(x, \ell)}{\partial \ell} \cdot u(x, \ell) \right\} d\Gamma \quad (6)$$

ここで、 t は表面力ベクトル ($t = \sigma n$)、 u は変位ベクトル、 ℓ は亀裂長さである。上式を用いて式(4)の右辺に相当するものとして次の積分を考える。

$$\hat{E} = \int_{\Gamma} \left\{ t^{(2)}(x, \ell) \cdot \frac{\partial u^{(1)}(x, \ell)}{\partial \ell} - \frac{\partial t^{(1)}(x, \ell)}{\partial \ell} \cdot u^{(2)}(x, \ell) \right\} d\Gamma \quad (7)$$

この式を経路 \hat{E} 積分と呼ぶ。領域 A 上で力の釣合式が成立していれば、式(7)の右辺にガウスの発散定理を適用すると次式が得られる。

$$\int_A \left\{ C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(2)}(x, \ell) \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(1)}(x, \ell)}{\partial \ell} - C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(1)}(x, \ell) \frac{\partial \varepsilon_{ij}^{(2)}(x, \ell)}{\partial \ell} \right\} dA \quad (8)$$

ゆえに、領域 A 上で実問題と理論解の弾性係数が等しければ、式(8)の値は 0 となる。また、その場合、主亀裂先端近傍内に他の静止亀裂先端があっても、静止亀裂に対しては ℓ で偏微分しても特異性のオーダーは変わらないから、式(8)の被積分項の特異性のオーダーは $1/r$ であり、面積分に対して可積分であるため、同様に式(8)の値は 0 となる。したがって、そのような場合には、経路 \hat{E} 積

分(7)は経路独立積分となるので、数値解析の誤差が大きい亀裂先端から十分に離れた経路 Γ で積分が可能である。実問題に介在物、空隙など理論解の弾性係数と異なる領域がある場合は、式(8)より、式(7)の積分経路から、それらの閉経路を除いた経路にすれば、式(7)は経路独立となることが分かる。また、ここで領域 M 積分のように重み関数 $q(x)$ を考えず経路積分のままにしたのは、経路 \hat{E} 積分(7)の被積分項は J 積分や M 積分とは異なり、その被積分項には応力は無く、有限要素法では精度が良い表面力と変位のみで表現されているから、この積分の経路独立性を利用して数値解析誤差が大きい亀裂先端から遠く離れた要素辺に沿って積分すれば、良い精度が得られると考えたからである。このことは、今まで数多くの経路 E 積分から得られた解により実証済みである。以下、経路 \hat{E} 積分(7)が経路独立であることを利用して、実問題と理論解の応力拡大係数で表現するための誘導を行う。亀裂が直進する場合は、亀裂が折れ曲がる特別な場合であるから、誘導は亀裂が折れ曲がる場合で説明する。Fig.2のように、主亀裂と微小長さだけ折れ曲がった亀裂先端部を囲む経路 Γ を、折れ曲がり亀裂先端を囲む一定幅 h の多角形に変形し最終的に h を 0 にすると、Fig.3のように経路 \hat{E} 積分は折れ曲がり亀裂面を含む次式の線積分となる。

$$\hat{E} = 2 \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \int_{\ell}^{\ell+\Delta\ell} \left\{ \sigma_{\theta}^{(2)}(r, \theta, \ell) \frac{u_{\theta}^{(1)}(r, \ell + \Delta\ell) - u_{\theta}^{(1)}(r, \ell)}{\Delta\ell} + \sigma_{r\theta}^{(2)}(r, \theta, \ell) \frac{u_r^{(1)}(r, \ell + \Delta\ell) - u_r^{(1)}(r, \ell)}{\Delta\ell} \right\} dr \quad (9)$$

ここで、右辺が 2 倍してあるのは亀裂上下面の積分が必要であり、亀裂先端近傍の応力と変位は、亀裂面上下でそれらの絶対値が同一なためである。次に、Fig.3のように $u_{\theta}^{(1)}(r, \ell)$ 、 $u_r^{(1)}(r, \ell)$ は積分範囲 $(\ell, \ell + \Delta\ell)$ では亀裂面上下で連続であるため、式(9)は次式となる。

$$\hat{E} = 2 \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \int_{\ell}^{\ell+\Delta\ell} \left\{ \sigma_{\theta}^{(2)}(r, \theta, \ell) \frac{u_{\theta}^{(1)}(r, \ell + \Delta\ell)}{\Delta\ell} + \sigma_{r\theta}^{(2)}(r, \theta, \ell) \frac{u_r^{(1)}(r, \ell + \Delta\ell)}{\Delta\ell} \right\} dr \quad (10)$$

ここで、式(10)の被積分項は次式で表せる。

$$\sigma_{\theta}^{(2)}(r, \theta, \ell) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \{ K_I(\theta) \Sigma_{\theta}^I(\theta) + K_{II}(\theta) \Sigma_{\theta}^{II}(\theta) \} \quad (11)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(2)}(r, \theta, \ell) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \{ K_I(\theta) \Sigma_{r\theta}^I(\theta) + K_{II}(\theta) \Sigma_{r\theta}^{II}(\theta) \} \quad (12)$$

$$u_{\theta}^{(1)}(r, \ell + \Delta\ell) = \frac{k_I(\ell + \Delta\ell)}{\sqrt{\pi E^*}} 2\sqrt{2(\Delta\ell - r)} \quad (13)$$

$$u_r^{(1)}(r, \ell + \Delta\ell) = \frac{k_{II}(\ell + \Delta\ell)}{\sqrt{\pi E^*}} 2\sqrt{2(\Delta\ell - r)} \quad (14)$$

上式を式(10)に代入して積分すると、次式が得られる。

$$\hat{E} = \frac{2}{E^*} \left[\{ K_I \Sigma_{\theta}^I(\theta) + K_{II} \Sigma_{\theta}^{II}(\theta) \} k_I(\ell) + \{ K_I \Sigma_{r\theta}^I(\theta) + K_{II} \Sigma_{r\theta}^{II}(\theta) \} k_{II}(\ell) \right] \quad (15)$$

上式の Σ_{θ}^I 、 Σ_{θ}^{II} 、 $\Sigma_{r\theta}^I$ 、 $\Sigma_{r\theta}^{II}$ は、亀裂先端近傍応力の特

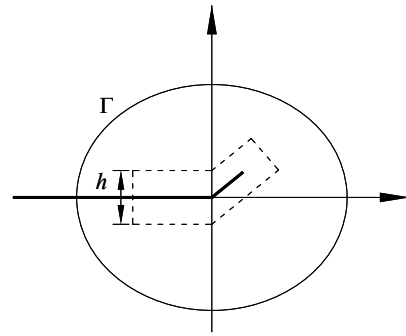


Fig.2 A shrinking path to a kink crack.

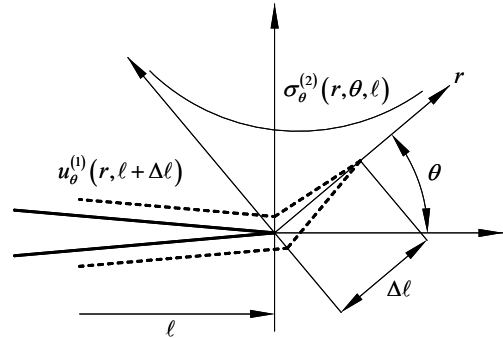


Fig.3 An integral path for a path independent \hat{E} .

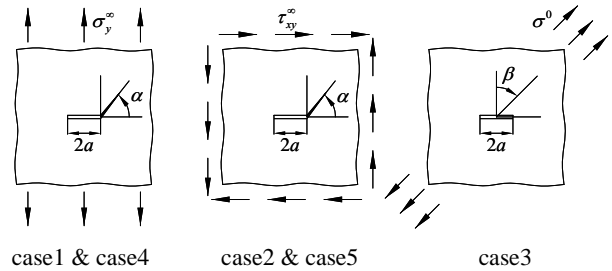


Fig.4 Loading conditions.

異項の θ の関数であり、次のように与えられている。

$$\Sigma_{\theta}^I = \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (16)$$

$$\Sigma_{\theta}^{II} = -\frac{3}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (17)$$

$$\Sigma_{r\theta}^I = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (18)$$

$$\Sigma_{r\theta}^{II} = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (19)$$

今、Fig.4 に示すように無限板中央に長さ $2a$ の亀裂があるものとし、無限遠で一様引張応力 σ_y^{∞} 、およびせん断応力 τ_{xy}^{∞} が作用している場合の亀裂右先端の折れ曲がり瞬間後の応力拡大係数を求めたい問題を考える。

折れ曲がり角度 θ における k_I を求めたい場合は式(15)で、

$$\begin{cases} K_I \Sigma_{\theta}^I(\theta) + K_{II} \Sigma_{\theta}^{II}(\theta) = 1 \\ K_I \Sigma_{r\theta}^I(\theta) + K_{II} \Sigma_{r\theta}^{II}(\theta) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

となるようにすればよいから、理論式の境界応力 σ_y^{∞} 、および τ_{xy}^{∞} を次式のように置いて式(7)を数値解析で求めればよい。

$$\sigma_y^\infty = \frac{3\cos(\theta)-1}{2\sqrt{\pi a} \cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \tau_{xy}^\infty = -\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\pi a} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (21)$$

一方, k_{II} を求めたい場合は式(15)で,

$$\begin{cases} K_I \Sigma'_\theta(\theta) + K_{II} \Sigma''_\theta(\theta) = 0 \\ K_I \Sigma'_{r\theta}(\theta) + K_{II} \Sigma''_{r\theta}(\theta) = 1 \end{cases} \quad (22)$$

となるようにすれば良いから, 結局, 理論式の境界応力を次式のように置いて式(7)を数値解析で求めればよい.

$$\sigma_y^\infty = \frac{3\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\pi a} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \tau_{xy}^\infty = \frac{1}{\sqrt{\pi a} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (23)$$

3 応力拡大係数の有限要素解析

3.1 解析概要

応力拡大係数を求める解析の対象としたモデルは Fig.4 に示すように無限板中央に長さ $2a$ の亀裂があるものとする. まず, 亀裂が直進する場合における, 無限遠で一樣引張応力 σ_y^∞ (case1), せん断応力 τ_{xy}^∞ (case2), および亀裂面に垂直な方向から時計回りを正とした角度 β で斜向した一樣引張応力 σ^θ が作用する場合 (case3) を検証する. 次に, 亀裂の折れ曲がる場合における, 無限遠で一樣引張応力 σ_y^∞ (case4), せん断応力 τ_{xy}^∞ (case5) が作用する場合の検証を行う.

有限要素メッシュは Fig.5 のように一辺 40cm の正方形板として, その中央に長さ 4cm の亀裂があるものとした. なお, 材料定数はヤング係数 $E = 210\text{GPa}$, ポアソン比 $\nu = 0.3$ とした. 使用した要素は 8 節点 4 辺形アイソパラメトリック要素と 6 節点 3 角形アイソパラメトリック要素であり, 亀裂先端を構成する要素に対して特異要素^{15),16)}を使用した. 亀裂進展前の節点数は 12376 であり, 亀裂進展後は節点数が 2 つ増加する. 要素数は進展前後に関わらず 4024 である. 式(7)の亀裂長さ l での偏微分項を, 後述するように差分近似するが, 積分値は当然その際の亀裂進展長さ Δl によって異なる値となる. ここでは, Wu の半解析解¹⁴⁾と比較する関係上, それに近い値が得るよう Δl を元の亀裂長さの $1/40000$ とした.

経路 \hat{E} 積分における積分経路, Path1, 2, 3 を Fig.6 に示す. Fig.6 は亀裂先端部を拡大したものである. これら 3 つの積分経路に加え, 物体の境界を積分経路としたものを Path4 として, 計 4 本の積分経路で検証を行う. 領域 M 積分の積分領域は, 重み関数 $q(\mathbf{x})$ を, \hat{E} 積分における積分経路内で $q = 1$, その 1 要素外側で 1 から 0 に単調減少する関数として, その外側では $q = 0$ とした. 例えば, Fig.6 における斜線部が領域 M 積分の (path3 の) 積分領域である. 物体境界を経路とした場合は, 境界の 1 つ内側の全ての要素で, q が 1 でない値を持つ領域を path4 とする.

式(7)を有限要素解析するために亀裂長さ l に対する偏微分を, 前進差分で置き換えた次式で積分を行う.

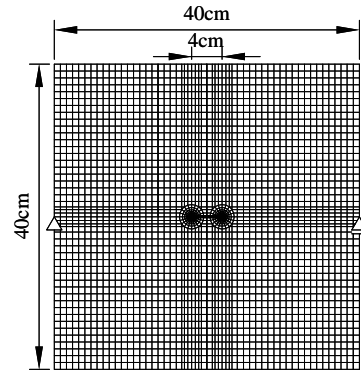


Fig.5 Finite element mesh.

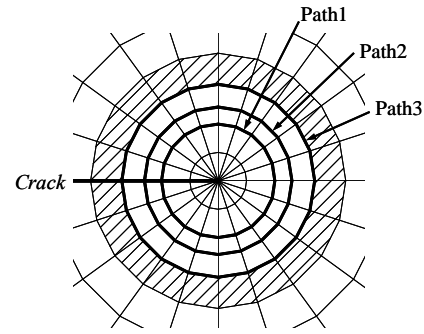


Fig.6 Integral paths.

$$\hat{E} = \sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{t}^{(2)}(\ell) \cdot \frac{\mathbf{u}^{(1)}(\ell + \Delta\ell) - \mathbf{u}^{(1)}(\ell)}{\Delta\ell} - \frac{\mathbf{t}^{(1)}(\ell + \Delta\ell) - \mathbf{t}^{(1)}(\ell)}{\Delta\ell} \cdot \mathbf{u}^{(2)}(\ell) \right\} \quad (24)$$

ここで, n は積分経路上の節点数, \mathbf{t} は節点力ベクトル, \mathbf{u} は変位ベクトルである. (ℓ) , $(\ell + \Delta\ell)$ はそれぞれ基本モデルおよび亀裂進展モデルの物理量を表す^{10),11),12),13)}. ただし, 上式の差分表示は形式的な表現であることに注意したい. 実際は, 右辺の第 1 項の表面応力には理論解が使用される. したがって, この差分表示には Simpson 公式を使用した. 第 2 項は変位が理論解である. したがって, この場合, 経路上の変位を, 節点変位を用いて $\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{N}\mathbf{u}_e^{(2)}$ のように近似し, 式(7)に代入すれば, 式(24)の第 2 項の表面応力が等価節点力に置き換えられた式となる. この節点力は, その点を共有する経路内側の要素剛性マトリクスと節点変位より求める. なお, 本論文では, 理論解の応力・変位は Westergaard の応力関数より得られた解¹⁷⁾を用いた.

3.2 直進進展解析結果

case1, case2 の解析結果をそれぞれ積分経路ごとに Fig.7, 8 に示す. 縦軸の応力拡大係数は, 対象とする問題の直進進展する場合の応力拡大係数の厳密解 ($K_I = \sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}$, $K_{II} = \tau_{xy}^\infty \sqrt{\pi a}$) で除して正規化してある.

case1 における \hat{E} 積分の K_I の最大相対誤差は 0.69% であり, 最大経路間誤差は 0.007% である. 一方, 領域 M 積分の K_I の最大相対誤差は 1.39% であり, 最大経路間誤差は 0.001% である.

また、case2 における \hat{E} 積分の K_{II} の最大相対誤差は 0.63% であり、最大経路間誤差は 0.008% である。領域 M 積分の K_{II} の最大相対誤差は 0.80% であり最大経路間誤差は 0.002% である。

このように、同一メッシュでも K 値に関しては、領域 M 積分よりも \hat{E} 積分の方が精度の良い値が得られている。また、両者の経路間誤差は非常に微小なものであり、経路独立性を有していると言える。ただし、領域 M 積分を用いる方法では、重み関数 $q(x)$ の勾配が 0 でない環状領域の内部に、 K 値を求めようとする亀裂（主亀裂）先端以外の亀裂先端を含めば、経路独立性は成立しなくなる。したがって、両亀裂先端を含む path4 では、その対称性から、たまたま両亀裂先端の特異性が打ち消しあって、解析値の正規化された M 積分値は 0 となっている。一方、経路 \hat{E} 積分は求めようとする亀裂先端以外に他の亀裂先端を何個含むかが経路独立であるから、Fig.7 や Fig.8 の正規化された \hat{E} 積分値は Path4 の経路でも 1 になっている。このことから、領域 M 積分では亀裂先端極近傍に微小亀裂が（数多く）あれば、重み関数 $q(x)$ の勾配が 0 で無い環状領域内部に、微小亀裂の亀裂先端を含まないようにするのが困難となるため、主亀裂の K 値を求めることが難しくなる。

亀裂面に垂直な方向から時計回りを正とした角度 β で斜向した一様引張応力 σ^0 が作用する場合（case3）の解析結果を Fig.9 に示す。Fig.9 における縦軸は、 σ_y^0 が作用する場合の直進進展する応力拡大係数の厳密解（ $K_I = \sigma_y^0 \sqrt{\pi a}$ ）で除して正規化した応力拡大係数である。なお、積分経路は Path1 を採用した。 \hat{E} 積分の K_I の最大相対誤差は 0.68%， K_{II} は 0.63%，領域 M 積分の K_I の最大相対誤差は 1.71%， K_{II} は 0.80% であった。

3.3 折れ曲がり進展解析結果

亀裂折れ曲がり瞬間時の応力拡大係数 k_I, k_{II} は、前述したように領域 M 積分（経路 J 積分も同様）では求めることが困難である。したがって、ここでは、亀裂折れ曲がり瞬間時の応力拡大係数 k_I, k_{II} を無限遠で一様引張応力 σ_y^∞ (case4)、せん断応力 τ_{xy}^∞ (case5) が作用する場合の \hat{E} 積分によって解析した結果を、Wu の半解析解¹⁴⁾と比較する。Fig.10, 11 にそれぞれ case4, case5 における正規化した応力拡大係数を示す。正規化は、対象とする問題の直進進展する場合の応力拡大係数の厳密解（ $K_I = \sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}$, $K_{II} = \tau_{xy}^\infty \sqrt{\pi a}$ ）で除して行った。なお、積分経路は Path4 を採用した。

得られた応力拡大係数 k_I, k_{II} の値は、折れ曲がり角度 $\alpha = 0.3\pi$ 付近までは、相対誤差は 0.1% から 5% 程度であり、折れ曲がり角度が大きくなるほど大きくなる。Wu の解も完全な理論解ではなく、角度が 0.4π までしか求まっておらず、その程度の折れ曲がり角度以上は Wu の解にも信頼性が無いので、この程度の誤差であれば、 \hat{E} 積分で折れ曲がり瞬間時の解も非常に良く求められたと考えられる。

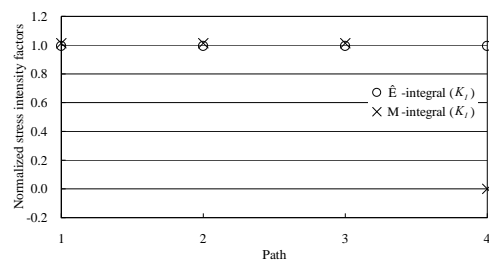


Fig.7 Normalized stress intensity factors (case1).

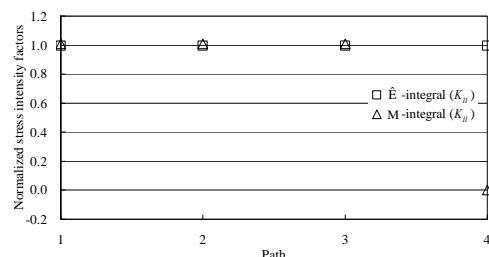


Fig.8 Normalized stress intensity factors (case2).

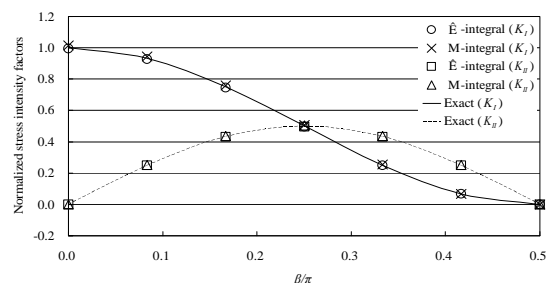


Fig.9 Normalized stress intensity factors (case3).

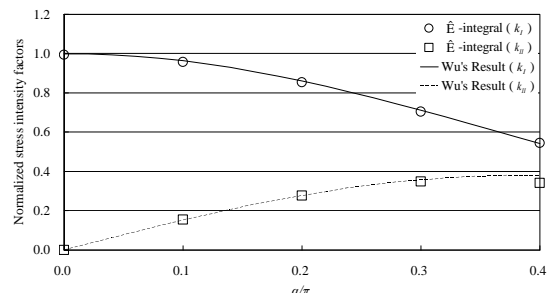


Fig.10 Normalized stress intensity factors (case4).

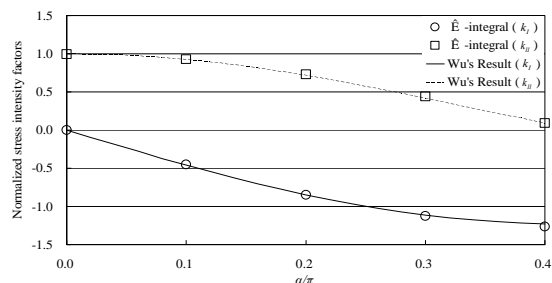


Fig.11 Normalized stress intensity factors (case5).

4 結 言

本論文では、E 積分を応用して亀裂が直進する場合だけでなく、折れ曲がり瞬間時の応力拡大係数をも経路独立な積分で求めることが可能な経路 \hat{E} 積分公式を提

案した。直進進展亀裂を対象とした問題では、経路 \hat{E} 積分公式および領域 M 積分を用いて応力拡大係数 K_I , K_{II} を算出し、両手法の解析精度および経路独立性の検証を行った。また、亀裂折れ曲がり瞬間時の応力拡大係数 k_I , k_{II} を求め、 Wu の半解析解と比較した。その結果、以下のことが明らかとなった。

1) 純 Mode I, 純 Mode II および斜向荷重下の解析より得られた領域 M 積分を用いた応力拡大係数と、経路 \hat{E} 積分公式を用いて得られた応力拡大係数を比較すると、 \hat{E} 積分公式の方が領域 M 積分よりも高精度であり、両手法ともかなり良い精度で経路独立性を有している。

2) 経路 \hat{E} 積分公式による、折れ曲がり瞬間後の応力拡大係数 k_I , k_{II} は Wu の半解析解が存在する範囲では、その解と非常に良く一致していることが分かった。

以上のように、経路 \hat{E} 積分公式を用いた手法は直進進展亀裂、および折れ曲がり瞬間後の亀裂の応力拡大係数を精度良く求めることができる。なお、経路 \hat{E} 積分は、 K 値を求めようとする亀裂先端以外に他の亀裂先端を何個含もうが経路独立であるから、主亀裂先端近傍に微小亀裂がある場合にも、経路を、それらを含む大きな経路をとることにより K 値を精度良く求められる。一方、領域 M 積分では、主亀裂先端近傍に微小亀裂が（数多く）ある場合には K 値を求めることが困難となる。また、介在物、空隙などがある場合は、経路 \hat{E} 積分の積分経路から、それらの閉経路を除いた経路にすれば経路独立となるなど、領域 M 積分より汎用性が高い。なお、この経路 \hat{E} 積分に対し、本論文と同様な重み関数 $q(x)$ を導入しガウスの発散定理を用いれば領域 \hat{E} 積分が得られる。

また、本論文では、解析手法による誤差を避ける意味で古典的な特異要素を使用した有限要素法で解析を行ったが、亀裂進展長さ Δl を任意にとれる意味では拡張有限要素法 (X-FEM) の方が便利である。この領域積分公式、および X-FEM を使用した解析に関しては別途報告する。

参 考 文 献

- 1) J.R.Rice, "Mathematical analysis in the mechanics of fracture", In Fracture : An Advanced Treatise, H.Liebowitz(ed.), Vol.2, Academic Press, pp.191-311 (1968).
- 2) J.Yau, S.Wang and H.Corten, "A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity", Journal of Applied Mechanics, Vol.47, pp.335-341 (1980).
- 3) C.Shih and R.Asaro, "Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces part I—small scale yielding", Journal of Applied Mechanics, Vol.55, pp.299-316 (1988).
- 4) T.Belytschko and T.Black, "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.45, pp.602-620 (1999).
- 5) N.Moes, J.Dolbow and T.Belytschko, "A finite element method for crack growth", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.46, pp.133-150 (1999).
- 6) K.Numashiba and T.Utsunomiya, "Proposal on approximation of path independent M-integral by mapping and analyses of kinked or curved crack using X-FEM", Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering (A), Japan, Vol.64, No2, pp.303-316 (2008).
- 7) F.Z.Li, C.F.Shih and A.Needleman, "A comparison of methods for calculating energy release rates", Engineering Fracture Mechanics, Vol.21, No.2, pp.405-421 (1985).
- 8) T.Nakamura, C.F.Shih and L.B.Freund, "Analysis of a dynamically loaded three-point-bend ductile fracture specimen", Engineering Fracture Mechanics, Vol.25, No.3, pp.323-339 (1986).
- 9) B. Moran and C. F. Shih, "General treatment of crack tip integrals", International Journal of Fracture, Vol.35, pp.295-310 (1987).
- 10) C.Yatomi, "The energy release rate and the work done by the surface traction in quasi-static elastic crack growth", International Journal of Solids and Structures, Vol.10, No.2, pp.183-187 (1983).
- 11) C.Yatomi, K. Hashimoto, and H. Ishida, "Finite element analysis of the energy release rate for a kinked crack using the E-integral", Lecture Notes in Numerical and Applied Analysis, Kinokuniya, Vol.13, pp.61-74 (1994).
- 12) C.Yatomi, and K.Hashimoto, "On the energy release rate by the path-independent E-integral and J-integral for quasi-static crack growth", edited by K.Ohtsuka Theoretical Studies on Fracture Mechanics in Japan, Hiroshima-Denki Institute of Technology, pp.87-98 (1998).
- 13) C.Yatomi and Y.Suzuki, "Crack extension behavior under the compressive loads using the maximum energy release rate criterion", Proceeding of the 1st International Symposium of the Kanazawa University 21st-Century COE Program, pp.80-84 (2003).
- 14) C.H.Wu, "Explicit asymptotic solution for the maximum-energy-release-rate problem", International Journal of Solids and Structures, Vol.15, pp.561-566 (1978).
- 15) R.S.Barsoum, "On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.10, pp.25-37 (1976).
- 16) R.S.Barsoum, "Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.11, pp.85-98 (1977).
- 17) H.Okamura, "Introduction to linear fracture mechanics", pp.191-194 (1976) Baifukan, Japan.