

# 荷重履歴に伴う摩擦力が存在する進展き裂の E積分の有限要素解析

## Finite Element Analysis of the E-integral for a Frictional Crack under the Several Loading Histories

鱸 洋一\*・矢富盟祥\*\*

Youichi SUZUKI and Chikayoshi YATOMI

\*学生員 工修 金沢大学大学院 自然科学研究科(〒920-8667 金沢市小立野二丁目 40-20)

\*\*正会員 Ph.D. 金沢大学教授 工学部土木建設工学科(〒920-8667 金沢市小立野二丁目 40-20)

In this paper, we analyze the path-independent E-integral for a frictional crack subjected to remote compressive loads using the finite element method. We find that the E-integral of the complementary energy type gives the energy release rate under the proportional compressive loads with a high accuracy. We then obtain the closed form solutions of the work change rate for a frictional crack under the several loading histories, and find that the E-integral also agree well with the obtained solutions for several loading histories.

**Key Words** : compressive loads, crack, friction, E-integral, work change rate, energy release rate, finite element analysis

### 1. まえがき

岩石やコンクリートなどの脆性材料の強度を推定することは工学的に非常に重要な問題であり、それに対するアプローチとしては破壊力学的手法を用いることが有効であると考えられる。岩石、コンクリートなどの材料では圧縮荷重下での強度が問題であり、その圧縮破壊過程のメカニズムは引張り破壊過程に比べて非常に複雑であることが知られている。圧縮荷重下では多くの場合、き裂は閉じて接触し、荷重状態によっては摩擦力に保持されながら滑り、モード I 型とモード II 型(せん断型)の混合モード状態で進展する。また圧縮荷重下にある進展き裂は、たとえ物体全体が弾性体として考えられるとしても、き裂面上に摩擦力が存在するためその圧縮荷重の荷重履歴により、最終状態がひとつには決まらない。このような接触・摩擦や折れ曲がり進展き裂など境界条件の取り扱いの困難さからか、過去に有用な理論的・実験的報告<sup>1)2)3)4)</sup>は幾つか見られるが、圧縮荷重の荷重履歴を考慮した進展き裂に対する理論的な研究報告は筆者の知る限り皆無である。

そこで本研究では破壊力学において破壊規準として重要なパラメータのひとつであるエネルギー解放率や仕事変化率を求めるE積分公式<sup>5)</sup>を; 共役型のE積分公式, ひずみエネルギー型E積分公式, 補ひずみエネルギー型E積分公式なる3つのタイプを導入分離した<sup>6)</sup>。次にその補ひずみエネルギー型E積分公式を用いた有限要素解析

を行い、比例荷重の場合や、荷重履歴の異なった問題を幾つか解析し、その荷重履歴がE積分値に与える影響についての考察を行った。

### 2. E積分の圧縮荷重下への応用

#### 2.1 圧縮荷重下にある進展き裂のE積分の表示

図-1のように超弾性体中(ひずみエネルギーを持つ弾性体)に公称表面力  $\hat{s}$  や変位  $\hat{u}$  による“外荷重”が与えられ、その中に存在するき裂が閉じており、き裂面上に摩擦力が発生している時、外荷重 ( $\hat{s}$ ,  $\hat{u}$ ) の増加に伴い進展しているき裂を考える。以後、き裂面が閉じているような外荷重 ( $\hat{s}$ ,  $\hat{u}$ ) を便宜上圧縮荷重と呼ぶ。物体は超弾性体であるので、 $S$  を第一種 Piola-Kirchhoff 応力,  $H(= \nabla u)$  を変位勾配,  $w$  をひずみエネルギー密度とすると

$$S = \frac{\partial w(H)}{\partial H} \quad (1)$$

と仮定され、物体力の無い準静的な場合を考えると釣り合い式

$$\text{Div } S = 0 \quad (2)$$

がき裂先端を除いた各点で成立している。ここで、各変数は基準系の位置  $X$  の関数でもあるが、記述を簡単に

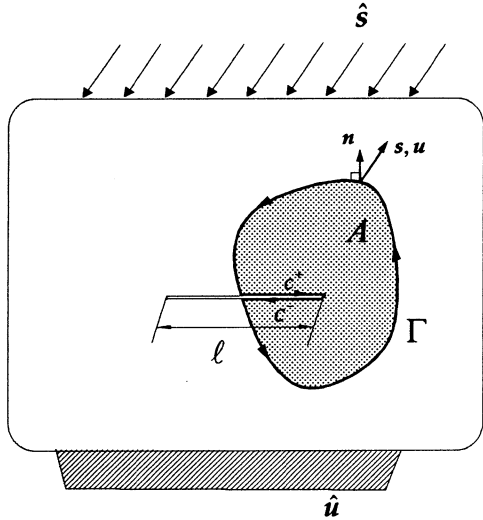


図-1 圧縮荷重下にある超弾性体内を準静的に進展しているき裂

するため省略した。以下同様の記号, また誤解のおそれが無い場合, 全ての変数をも省略する。

この時, き裂が準静的に進展している時のE積分は

$$E(l, \alpha) = \int_{\Gamma \cap C^+} s(l, \alpha) \cdot \frac{\partial u(l, \alpha)}{\partial l} ds - \frac{\partial}{\partial l} \int_A w(l, \alpha) da \quad (3)$$

で定義される。l は基準系でのき裂長さであり  $\partial/\partial l$  は右微分係数をとる。A は物体内にある進展き裂先端を含む基準系での任意の閉領域である。C<sup>+</sup> は A 内のき裂上下面の境界であり, Γ はそれを除いた A の境界である。s は Γ と C<sup>+</sup> 上の公称表面力であり, u は変位である。また  $\beta$  ( $0 \leq \beta \leq \alpha$ ) を荷重パラメータとすると, 一般的なひずみエネルギー密度 w は

$$w(l, \alpha) = \int_0^\alpha S(l, \beta) \cdot \frac{\partial H(l, \beta)}{\partial \beta} d\beta \quad (4)$$

のように定義される。ここで荷重パラメータ  $\beta$  とは, き裂を進展させるために物体の境界上に与えられた外荷重 ( $\hat{s}(\beta), \hat{u}(\beta)$ ) の载荷履歴を特定するパラメータのことであり, 例えば単軸集中荷重 P が荷重制御で単調増加するように与えられた場合には  $\beta = P$  とおくことができる。またここでは, き裂面上に摩擦力が存在するため, 超弾性体であってもひずみエネルギー密度は, 一般に外荷重の载荷履歴によって異なる値をとる ( $l, \alpha$ ) の関数となる。超弾性体であるので式(1)が仮定され

$$\frac{\partial w}{\partial l} = S \cdot \frac{\partial H}{\partial l} \quad (5)$$

となるので, 式(3)は領域 A 内に進展き裂先端を含まなければ, 式(5)および, 釣り合い式(2)を考慮すると, 発散定理を使えばゼロとなるので, 式(3)の経路独立性は自明である。(この時, 積分経路には, き裂面 C<sup>+</sup> を含んでいることに注意。)

式(3)内のひずみエネルギーの積分項は

$$\int_A w da = \int_A \int_0^\alpha S \cdot \frac{\partial H}{\partial \beta} d\beta da = \int_{\Gamma \cap C^+} \int_0^\alpha s \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} d\beta ds \quad (6)$$

のように変形できるので, これを式(3)に代入すると

$$E(l, \alpha) = \int_{\Gamma \cap C^+} \int_0^\alpha (s \cdot \frac{\partial u}{\partial l}) d\beta ds - \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \int_{\Gamma \cap C^+} \int_0^\alpha (s \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta}) d\beta ds \right\} \quad (7)$$

のような“ひずみエネルギー型”E積分公式となる。ここで式(7)を変形すると

$$E(l, \alpha) = \int_{\Gamma \cap C^+} \int_0^\alpha \left( \frac{\partial s}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial u}{\partial l} - \frac{\partial s}{\partial l} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) d\beta ds \quad (8)$$

が得られる。これを進展き裂面上に表面力が作用する場合の経路独立な“共役型”E積分公式という。

更に, 式(8)を変形すると次式を得る。

$$E(l, \alpha) = \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \int_{\Gamma \cap C^+} \int_0^\alpha \left( \frac{\partial s}{\partial \beta} \cdot u \right) d\beta ds \right\} - \int_{\Gamma \cap C^+} \left( \frac{\partial s}{\partial l} \cdot u \right) ds \quad (9)$$

ここで

$$w_c(l, \alpha) = \int_{\Gamma \cap C^+} \int_0^\alpha \frac{\partial s}{\partial \beta} \cdot u d\beta ds = \int_A \int_0^\alpha \frac{\partial S}{\partial \beta} \cdot H d\beta da \quad (10)$$

であるから, 式(9)は補ひずみエネルギー密度 (complementary strain energy density) を用いた定義式になっていることより, 式(9)を“補ひずみエネルギー型”E積分公式と呼ぶ。

なお, 式(3)から式(9)を導く際に, 境界  $\Gamma \cap C^+$  による積分と, き裂長さ l による偏微分の入れ替えを行ったが, 進展き裂面上に摩擦力などの表面力が存在する場合は, き裂長さの変化につれてその境界 C<sup>+</sup> の大きさが変化する。その場合, 理論的には式(7), 式(8), 式(9)は同一の値となる事が容易に証明できるが, 数値解析する際には

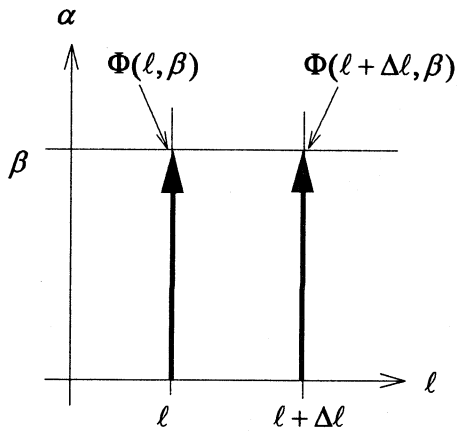


図-2 1)の場合の $(l, \alpha)$ 空間での物理量の変化

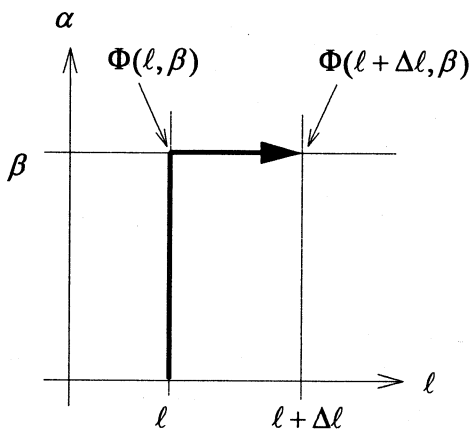


図-3 2)の場合の $(l, \alpha)$ 空間での物理量の変化

補ひずみエネルギー型E積分公式(9)が最も精度が良い事が推察できる<sup>6)</sup>。

ここで、き裂面上に摩擦力が存在し、载荷履歴が比例負荷でない場合  $\frac{\partial s(l, \beta)}{\partial l}$ ,  $\frac{\partial u(l, \beta)}{\partial l}$  などの物理量

$\Phi(l, \beta)$  のき裂長さ  $l$  による偏微分は、下記のように2通りの方法で求めることができ、その2者でE積分の値の物理的意味が異なることに注意したい。

- 1) 図-2 のように、き裂長さ  $l$  が微小量異なる2つのモデルに対して、 $\beta$  を0から $\alpha$ まで増加させて

$$\frac{\partial s}{\partial l}, \frac{\partial u}{\partial l} \text{ を求める。}$$

- 2) 図-3 のように、 $\beta$  を0から $\alpha$ まで増加させる際、 $\beta$  を固定して  $l$  を微小量変化させて

$$\frac{\partial s}{\partial l}, \frac{\partial u}{\partial l} \text{ を求める。}$$

上記1)の場合のE積分値の物理的意味は、き裂長さが微小量異なる時、最終状態  $\alpha$  になるまでの“仕事変化

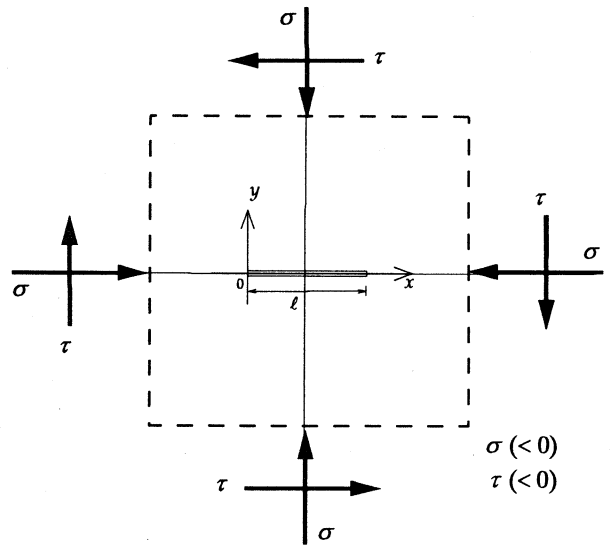


図-4 圧縮荷重下にある2次元無限平面内のき裂

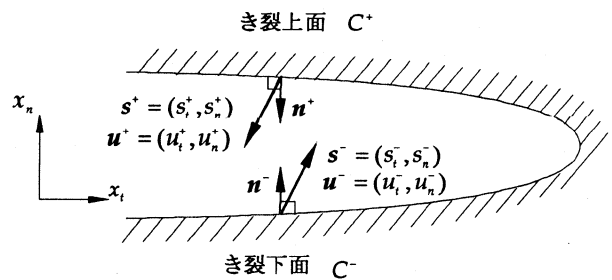


図-5 き裂面上の表面力と変位

率” (すなわち、き裂が単位長さ異なる時、最終荷重状態  $\alpha$  に達するまでの仕事の差<sup>7)</sup>) となり、2) の場合が周知の“エネルギー解放率”の意味を持つ。両者とも、き裂が不安定進展を開始する限界値をもって破壊靱性値、すなわち、き裂が不安定進展する規準物性値としての物理的意味を持ち得る。本報告では、解析の簡便性のため、比例負荷でない場合は、一般に仕事変化率となる1)の解析を行い2)のエネルギー解放率の場合は別途報告する予定である。

## 2.2 境界条件

本研究では、図-4 に示すように無限遠から一様圧縮応力  $\sigma (< 0)$  と一様せん断力  $\tau (< 0)$  が作用している微小変形する線形等方弾性体中を、き裂右先端のみが準静的に進展している場合の2次元平面問題を考える。また、ここでは引張りを正とする。

進展き裂面上の状態は、圧縮応力  $\sigma$  やせん断力  $\tau$  の大きさやその载荷履歴などにより、いろいろな状態が考えられるが、ここではその状態を、固着接触状態、滑り

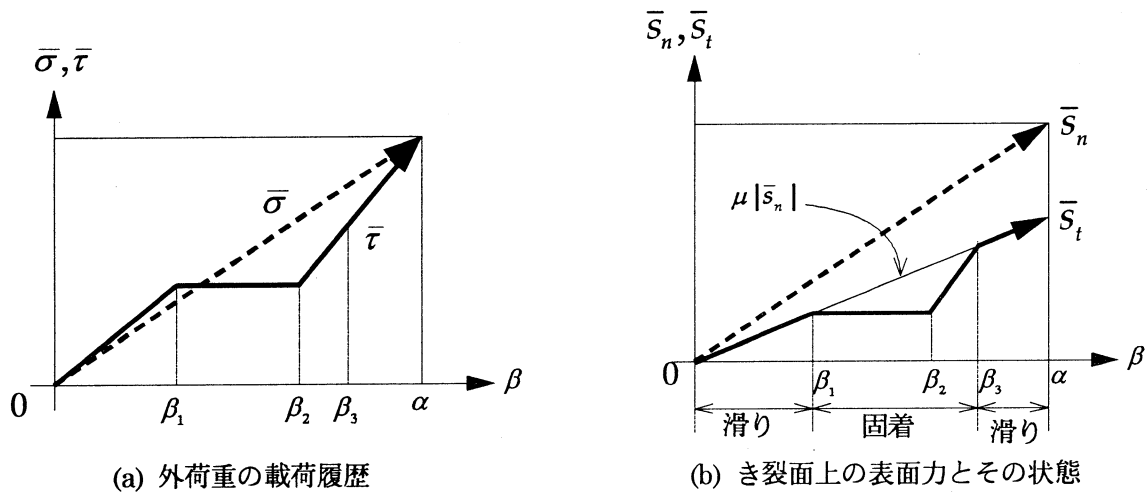


図-6 き裂面に摩擦がある場合の外荷重の载荷履歴と、き裂面上の表面力の関係

接触状態、開き状態の3つに大きく分けて考える。ただし、滑り接触状態の時、滑り方向とは逆向きに摩擦力が発生するが、摩擦力は Coulomb の摩擦法則に従うものとし、そのときの摩擦係数は  $\mu$  (定数) とする。

固着接触状態とは、進展き裂面上での法線方向表面力成分  $s_n$  が圧縮状態にあり、かつ接線方向表面力成分  $s_t$  が限界摩擦力以下の時、すなわち

$$s_n^+ > 0, \quad s_n^- < 0 \quad \text{かつ} \quad |s_t^+| < \mu |s_n^+| \quad (11)$$

である時、進展き裂面上の各点では、表面力と変位の連続性が成立している場合、すなわち

$$\begin{cases} s_t^+ + s_t^- = 0 \\ s_n^+ + s_n^- = 0 \\ u_t^+ - u_t^- = 0 \\ u_n^+ - u_n^- = 0 \end{cases} \quad (12)$$

の様な関係が成立している状態のことをいう。以後、進展き裂面上の各物理量は図-5 に示すように、き裂下面に対して接線方向に  $x_t$ 、法線方向に  $x_n$  という軸をとると、 $s$  は表面力成分、 $u$  は変位成分であり、上付き±はそれぞれき裂上下面での物理量であり、また下付き  $t, n$  はそれぞれ進展き裂面上の接線・垂直方向の物理量を示している。

滑り接触状態とは、外力の負荷により進展き裂面上での接線方向表面力成分が限界摩擦力になった時、すなわち

$$s_n^+ > 0, \quad s_n^- < 0 \quad \text{かつ} \quad |s_t^+| = \mu |s_n^+| \quad (13)$$

である時、

$$\begin{cases} s_t^+ + s_t^- = 0 \\ s_n^+ + s_n^- = 0 \\ |s_t^+| = \mu |s_n^+| \\ u_n^+ - u_n^- = 0 \end{cases} \quad (14)$$

のように上下面において垂直方向変位成分は等しいが、接線方向変位成分は滑りの発生により未知量となっているような接触状態である。このとき式(12)<sub>3</sub> のかわりに(14)<sub>3</sub> のように接線方向表面力成分は滑りながら限界摩擦力に保持される条件が必要となる。

開き状態とは、負荷後の変形によって非接触化する状態をいい、負荷前に接触していた点の法線方向表面力成分が引張りになる条件、すなわち

$$s_n^+ \leq 0, \quad s_n^- \geq 0 \quad (15)$$

であるような時、自由境界となるのであるから

$$s_t^+ = s_t^- = s_n^+ = s_n^- = 0 \quad (16)$$

のようになる状態である。

ここで、き裂面上に摩擦力が存在する場合は、外荷重の载荷履歴により、き裂面上の表面力が非線形な挙動をする一つの例として、外荷重  $(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$  が図-6(a)の様に与えられた場合を考える。ここで物理量の上に  $\bar{\quad}$  があるものは最終状態での  $\sigma^f$  で無次元化した量であることを示している。すなわち無限遠での一様圧縮荷重  $\bar{\sigma}$  は荷

重パラメータ $\beta$ が0から $\alpha$ の間、 $\beta$ に比例するものとし、一様せん断荷重 $\tau$ は0から $\beta_1$ の間、直線的に増加するが、 $\beta_1$ から $\beta_2$ の間は一定であり、その後 $\beta_2$ から $\alpha$ まで再度直線的に増加する。その時、き裂面上の表面力の法線方向成分 $\bar{s}_n$ は無遠での一様圧縮荷重 $\bar{\sigma}$ と同様、 $\beta$ に比例して大きくなるが、表面力の接線方向成分 $s_t$ は図-6(b)のように無遠での一様せん断荷重と多少異なった挙動をする。 $\beta$ が0から $\beta_1$ の間は摩擦力に保持され、滑り接触状態となり、 $s_t$ は一様せん断荷重 $\tau$ まで大きくなり、Coulombの摩擦法則に従い、滑り方向とは逆向きに大きさ $\mu|s_n|$ となる。 $\beta_1$ から $\beta_2$ の間は無遠での一様せん断荷重は一定であるため、き裂面での $s_t$ の増加もない。 $\beta_2$ を過ぎると無遠では再び一様せん断荷重が増加し始めるが、き裂面上ではすぐ滑り出さず依然固着状態を保持しつつ、 $s_t$ は増加する。そして $s_t$ が $\mu|s_n|$ に達した $\beta_3$ を過ぎると $\alpha$ まで再び滑り接触状態となり、 $s_t$ は $\mu|s_n|$ 以上へは上がらず、その経路に沿って変化する。この様に圧縮荷重下でき裂面に摩擦力が存在する場合、このような簡単な荷重載荷の例を挙げても載荷履歴によってき裂面の表面力は複雑に挙動する。

### 2.3 比例圧縮荷重下にある進展き裂のエネルギー解放率の理論解

無限板内にある進展き裂は、圧縮応力下では閉じて接触し、き裂面上の各点でCoulombの摩擦法則、すなわち式(14)に従いながら、滑り進展する。この時のき裂が直進方向に進展する場合のエネルギー解放率の理論解を導く。簡単の為、圧縮荷重が比例負荷されている時のみを考えると、き裂が閉じて接触し、滑り進展しているき裂先端の特異応力はモードIIのみであるので、無遠でのせん断力 $\tau$  ( $< 0$ )による応力拡大係数は、

$$K_{II_0} = \tau \sqrt{\pi \frac{\ell}{2}} \quad (17)$$

と表すことができ、き裂面上の摩擦力 $\tau_c$  ( $> 0$ )は垂直応力、すなわち、無遠での $\sigma$  ( $< 0$ )により

$$\tau_c = -\mu\sigma \quad (18)$$

と表せるので、このき裂面上の摩擦力による応力拡大係数は

$$K_{IIc} = -\mu\sigma \sqrt{\pi \frac{\ell}{2}} \quad (19)$$

となる。よって最終的に、き裂先端での応力拡大係数は次式のように表せる。

$$\begin{aligned} K_{II} &= K_{II_0} + K_{IIc} \\ &= (\tau - \mu\sigma) \sqrt{\pi \frac{\ell}{2}} \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、この式の符号について物理的意味を考えてみると、右辺の括弧内がゼロの時は外荷重によるせん断力 $\tau$ と、進展き裂面上の摩擦力 $\tau_c$ が釣り合っている時であり、すなわち限界摩擦力状態であることを表している。また、右辺括弧内が正となる時は、摩擦力がせん断力を上回っている時であり、進展き裂面は動き出さず静止している状態であることを表している。よって式(20)は次のように書ける。

$$\begin{cases} K_{II} = (\tau - \mu\sigma) \sqrt{\pi \frac{\ell}{2}} & \text{for } (\tau - \mu\sigma) \leq 0 \\ K_{II} = 0 & \text{for } (\tau - \mu\sigma) > 0 \end{cases} \quad (21)$$

考えている物体は微小変形する線形等方弾性体であるので、応力拡大係数とき裂が直進方向に進展する場合のエネルギー解放率 $G$ の間には一意なる関係がありヤング率を $E$ 、ポアソン比を $\nu$ とすると

$$G = \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (22)$$

$$E' = \begin{cases} E & \text{(plane stress)} \\ \frac{E}{(1-\nu)} & \text{(plane strain)} \end{cases}$$

であるので、式(21)をエネルギー解放率で書くと

$$\begin{cases} G = \frac{\pi \ell}{2E'} (\tau - \mu\sigma)^2 & \text{for } (\tau - \mu\sigma) \leq 0 \\ G = 0 & \text{for } (\tau - \mu\sigma) > 0 \end{cases} \quad (23)$$

となる。

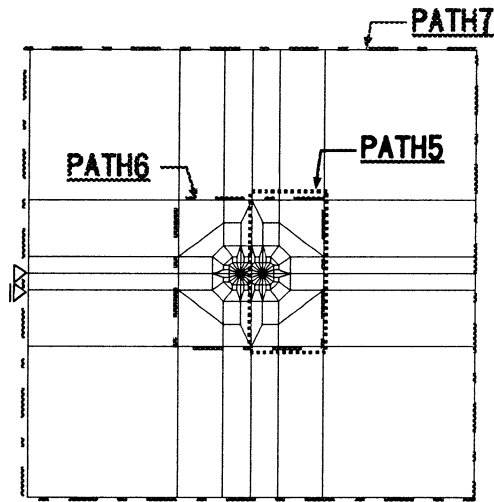


図-7 中央き裂がある有限要素モデルと積分経路

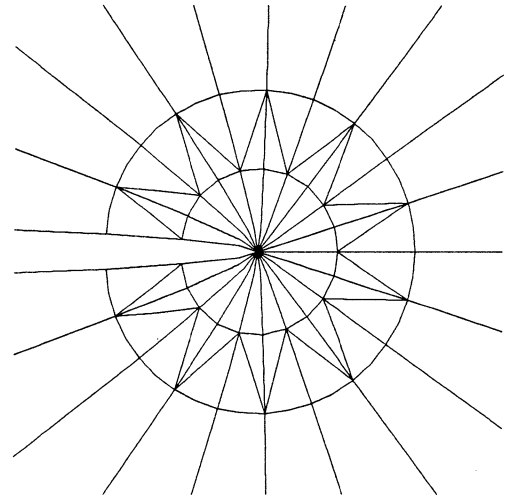


図-9 き裂進展側先端付近の要素分割

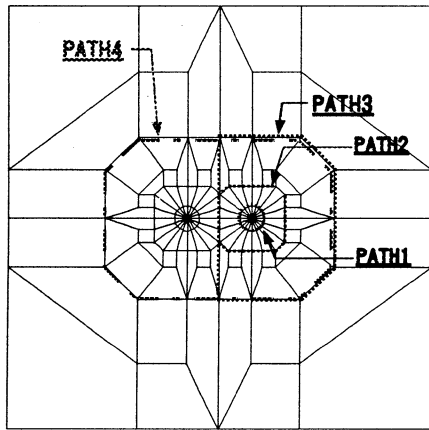


図-8 中央き裂付近の要素分割と積分経路

### 3. 有限要素モデルと解析方法

式(9)を数値解析し、仕事変化率(比例負荷時はエネルギー解放率)を求める際に、式中の $l$ による偏微分項は2点差分近似、荷重積分は台形公式、経路積分は表面力と変位をそれぞれ離散化した等価節点表面力 $s_i$ と節点変位 $u_i$ を積分経路上の全節点で和をとることにより、次式を用いた。

$$E = \sum_{j=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^n \left[ \left\{ \frac{s_i^j(l+\Delta l) - s_i^{j-1}(l+\Delta l)}{\Delta \beta} \cdot \frac{u_i^j(l+\Delta l) + u_i^{j-1}(l+\Delta l)}{2\Delta l} - \frac{s_i^j(l) - s_i^{j-1}(l)}{\Delta \beta} \cdot \frac{u_i^j(l) + u_i^{j-1}(l)}{2\Delta l} \right\} \Delta \beta \right] - \sum_{i=1}^n \left[ \frac{s_i(l+\Delta l) - s_i(l)}{\Delta l} \cdot u_i(l) \right] \quad (24)$$

ここで $n$ は積分経路上の節点の数であり、 $\alpha$ は全荷重増分ステップ数、 $\Delta \beta$ は荷重増分量、 $\Delta l$ は基本モデル

と、き裂進展モデルの進展き裂長さの差である。また式(24)内の変数の $(l)$ および $(l+\Delta l)$ は、それぞれ基本モデル、き裂進展モデルの物理量であることを表している。E積分によって、仕事変化率を求める方法は、全エネルギー法とよばれる方法を経路独立型積分に一般化した方法であり、このように進展き裂長さの異なる2つのモデルを解析する必要がある。全エネルギー法では進展き裂長さと、その変化量との比 $\Delta l/l$ は0.001~0.006が良いとの報告<sup>8)</sup>がある。本研究では幾つかのモデルで試行解析し、 $\Delta l/l$ が0.00012~0.1250の範囲で理論解との誤差を調べた結果、 $\Delta l/l$ が0.0044~0.0625の範囲で誤差が2%以内であり、 $\Delta l/l=0.0078$ の時、誤差が最も少なく約0.3%であった。そこで $\Delta l/l$ として0.0078を採用した。

使用した有限要素モデルは図-7、図-8、図-9に示すような8節点アイソパラメトリック要素を基本とした要素分割を行っており、基本モデルの要素数は332、節点数は920である。また、き裂進展モデルは節点を解除することにより実現しているため、要素数は同数であるが、節点数は922となる。弾性係数 $E$ は花崗岩を想定し68.6Gpa、ポアソン比 $\nu$ は0.3とした。進展き裂はモデル中央に存在し、き裂長さ $l=4$ cmに対して横寸法80cm、縦寸法80cmで無限板を近似している。このモデルと同一幅の一樣引張り荷重を受けた等方線形弾性体無限長帯板の中央き裂の級数解と、無限板の厳密解との差は、エネルギー解放率においては0.25%程度であった。また本研究では、き裂右先端のみが進展することを想定しており、図-9に示すように要素分割を行った。また、き裂先端には $r^{-1/2}$ の特異性を表現できる特異要素を用い、精度の向上を計った。

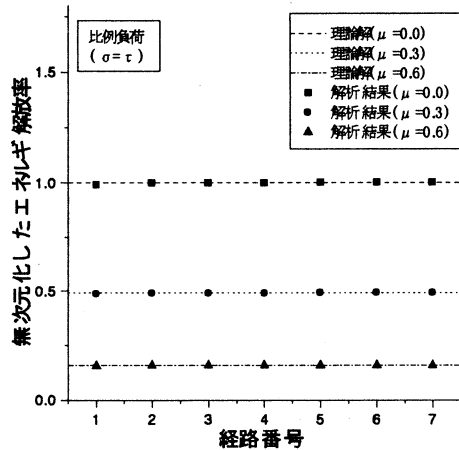


図-10 圧縮荷重により接触した進展き裂のエネルギー解放率の理論解と解析結果

積分経路は要素辺上に設定しており、き裂右側先端を囲む経路(図中点線)を小さい方から1,2,3,5、き裂両側先端を囲む経路(図中一点鎖線)を小さい方から4,6,7としてある。またここでの各積分経路中にき裂面C<sup>+</sup>の要素辺も積分経路に含めなければならない。特に進展き裂両先端を囲む経路には全き裂面が経路に含まれている。なお、E積分では周知のJ積分と異なり、積分経路を要素辺上に設定し、節点での表面力、変位を直接積分公式の中に代入し計算することができ、精度を上げることができる<sup>9)</sup>。

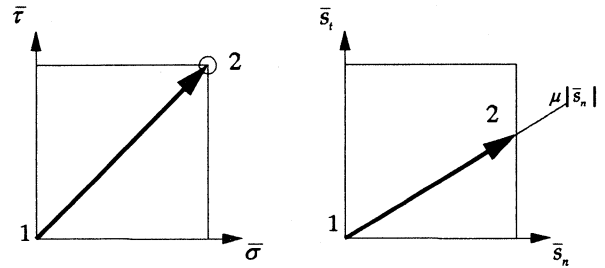
## 4. 解析結果

### 4.1 比例圧縮荷重下にある進展き裂のエネルギー解放率の解析結果

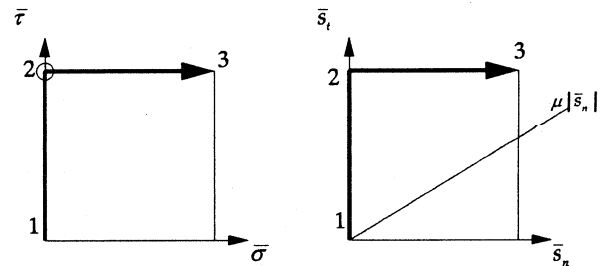
図-10は圧縮荷重 $\sigma (< 0)$ とせん断荷重 $\tau (< 0)$ を $\sigma = \tau$ となるように比例的に荷重した時に、き裂が直進する場合のエネルギー解放率(=仕事変化率)を、補ひずみエネルギー型E積分公式(9)の数値解公式(24)により求めたものである。横軸は経路番号であり、縦軸は無限度からの全圧縮荷重 $\sigma^f$ を用いた

$$G_0 = \frac{(\sigma^f)^2 \pi l}{2E} \quad (25)$$

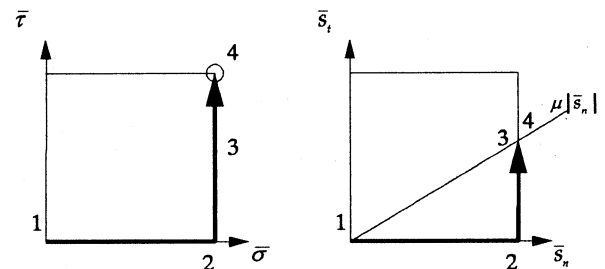
で無次元化してある。以後すべて無次元化したエネルギー解放率とは、補ひずみエネルギー型E積分公式(9)の数値解公式(24)の値を、式(25)で無次元化したものである。図-10からわかるように、進展き裂右先端のみを囲む経路1,2,3,5、および進展き裂両先端を囲む経路4,6,7のどの経路においても、一定の値となっており経路独立性が



(a) 荷重載荷径路 (b) き裂面上の表面力成分  
図-11 Case 1 (比例荷重)



(a) 荷重載荷径路 (b) き裂面上の表面力成分  
図-12 Case 2

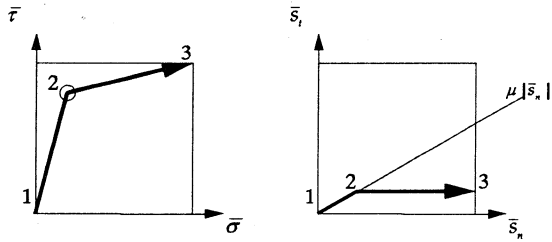


(a) 荷重載荷径路 (b) き裂面上の表面力成分  
図-13 Case 3

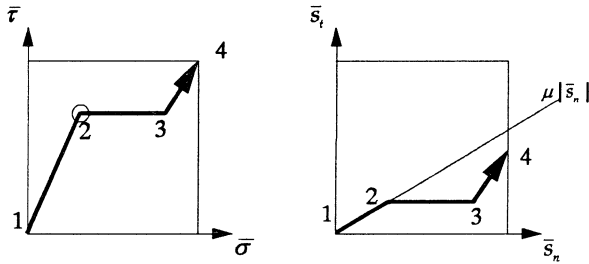
示されている。またき裂面上での摩擦係数 $\mu$ は0.0, 0.3, 0.6の3つの場合を解析したが、どの摩擦係数でも経路独立性が示されていることがわかる。また図中の点線は式(23)で表される、き裂面上に摩擦力が存在する場合のエネルギー解放率の理論解であり、本研究の方法によるエネルギー解放率と非常に良く一致していることがわかる。また、その誤差は摩擦係数の大きさに関わらず、どの経路においても約0.3%程度と、無限板を有限板にした差と一致しており、非常に良い精度で解析できていることが分かる。

### 4.2 摩擦力の存在する進展き裂の荷履歴の違いによる仕事変化率の理論解

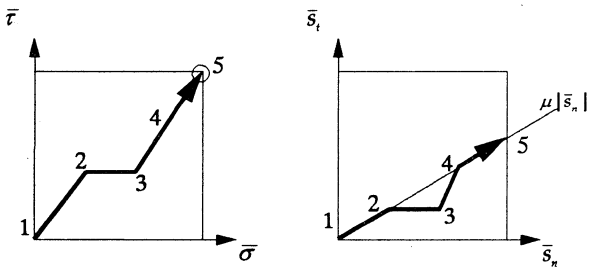
前節で外荷重が比例荷重である場合に摩擦力が存在する直進き裂のエネルギー解放率を解析し、理論解と



(a) 荷重載荷経路 (b) き裂面上の表面力成分  
図-14 Case 4



(a) 荷重載荷経路 (b) き裂面上の表面力成分  
図-15 Case 5



(a) 荷重載荷経路 (b) き裂面上の表面力成分  
図-16 Case 6

比較することにより本研究の方法が有効であることが確かめられたので、次に様々な載荷履歴が仕事変化率にどのように影響するかを調べるため、図-11から図-16の左側の図(a)のような6つの載荷経路を考えた。なお、本報告ではせん断荷重が一方向に増加する場合のみを扱ったが、繰り返し疲労破壊等で問題になる荷重履歴内で逆方向にもせん断荷重が加わる場合は別途報告予定である。図の縦軸、横軸はそれぞれ外荷重である圧縮荷重 $\sigma$ 、せん断荷重 $\tau$ を最終的な全圧縮荷重 $\sigma'$ で無次元化したものである。また右図(b)はその時の、き裂面上の表面力成分の変化を表したものである。

まず Case1は比例負荷の場合であり1から2の間すべてで、き裂面は滑り接触状態であり結局、仕事変化率(=エネルギー解放率)の理論解は式(23)で与えられ、式(23)の $\sigma$ 、 $\tau$ として図-11(a)内の丸印で示された最終

Case	式(26)	解析結果	誤差
1	0.1600	0.160458	約0.3%
2	1.0000	1.003229	約0.3%
3	0.1600	0.160515	約0.3%
4	0.4624	0.463806	約0.3%
5	0.2704	0.271175	約0.3%
6	0.1600	0.160457	約0.3%

表-1  $\mu=0.6$  の摩擦が存在する進展き裂の仕事変化率の荷重経路による違い

Case	式(26)	解析結果	誤差
1	0.4900	0.491530	約0.3%
2	1.0000	1.003229	約0.3%
3	0.4900	0.491579	約0.3%
4	0.5476	0.549285	約0.3%
5	0.4900	0.491506	約0.3%
6	0.4900	0.491534	約0.3%

表-2  $\mu=0.3$  の摩擦が存在する進展き裂の仕事変化率の荷重経路による違い

的な圧縮荷重 $\sigma'$ 、せん断荷重 $\tau'$ を代入すれば良い事が分かる。

次に Case2について考えると1から2の間はせん断荷重により、K値は増加するが圧縮荷重が無いので、き裂面上には摩擦力が発生せず、また2から3の間は圧縮荷重だけのため、き裂面は滑らず仕事変化率には寄与しないと考えられるので最終的なK値は図中の丸印の荷重状態で決定される。

Case3は1から2まで圧縮荷重のみなので、き裂面は滑り出さず、2から3までせん断荷重を受け、き裂面でも $s_t$ は増加するが依然滑り出さず、3から4で $s_t$ は一定値であるが、き裂面は滑り出し最終的なK値は図中丸印で示された4の荷重状態で決定される。

残りのCaseについても、き裂面での滑り状態などの考察より式(23)で示された理論式を上記のような荷重履歴がある場合に拡張して考えると、結局、仕事変化率の理論解は

$$G = \frac{\pi l}{2E'} (\tilde{\tau} - \mu \tilde{\sigma})^2 \quad (26)$$

となる事が分かる。ここで $\tilde{\tau}$ 、 $\tilde{\sigma}$ は各Caseでの図(a)内に丸印で示されたせん断荷重と圧縮荷重である。

式(26)の理論値とE積分を用いた有限要素法による解析結果が表-1、表-2である。表-1は摩擦係数が0.6の場合で、表-2は摩擦係数が0.3の場合である。表からわかるように、どのCaseにおいても式(26)と解析結



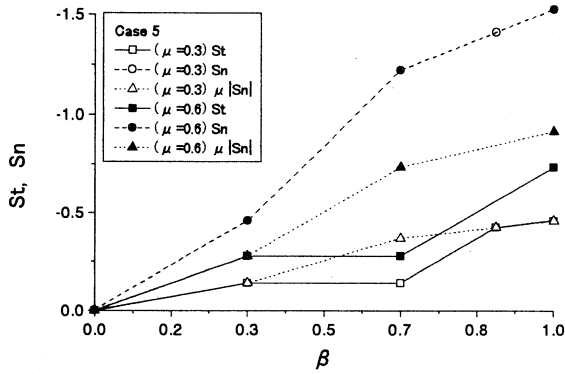


図-17 Case 5の時の、き裂面上の表面力成分の変化

果の誤差は約 0.3%と、比例負荷の場合とほぼ同じ程度の誤差であり、非常に良い精度で解析できていることがわかる。

なお Case5の場合、摩擦係数が  $\mu=0.6$  の時は図-15(b)の 3 から 4 のように  $s_i$  が  $\mu|s_n|$  に達せず固着接触状態であるため 2 の状態で仕事変化率は求められるが、 $\mu=0.3$  と摩擦係数が小さくなると図-17 のように 3 から 4 の途中で  $s_i$  が  $\mu|s_n|$  に達してしまい Case6の場合と同様になってしまう。この様に荷重履歴だけではなく摩擦係数との相互関係が仕事変化率に影響してくることが分かった。

## 5. まとめ

- I. 共役型、ひずみエネルギー型、補ひずみエネルギー型なる3つのタイプのE積分公式を導入分離し、進展き裂面に摩擦があるような比例負荷圧縮荷重の下でのエネルギー解放率が、補ひずみエネルギー型E積分を用いて有限要素解析すれば、き裂面を含む経路独立な積分で、理論解と非常に良く一致することが確かめられた。
- II. 圧縮荷重下で進展き裂面に摩擦がある時、比例負荷の場合だけでなく、種々の荷重履歴が与えられた場合の仕事変化率の理論解を求めた。また得られた理論解による仕事変化率も補ひずみエネルギー型E積分の有限要素解析により、非常に精度良く求められることが分かった。
- III. 荷重履歴だけではなく摩擦係数との相互関係が仕事変化率に影響してくることが分かった。

本研究のE積分による方法は、さらに複雑な種々の状

況(圧縮荷重下での干渉き裂など)の場合や弾塑性体などの非線形物質への応用も可能である。今後、それらの基本的なき裂破壊の研究が、コンクリートや岩盤などの破壊メカニズムの解明や、更には、地震の発生メカニズムや前兆現象の解明(すなわち地震予知)などにも役立つことを期待する。

## 参考文献

- 1) 小林昭一: 圧縮によるぜい性き裂の発生と伝ば, 材料, 20-209, pp.164-173, 1971.
- 2) Ashby, M.F. and Hallam, S.D.: The fracture of brittle solids containing small cracks under compressive stress state, *Acta metall*, Vol.34, No.3, pp.497-510, 1986.
- 3) Atkinson, C., Smelser, R.E. and Sanchez, J.: Combined mode fracture via the cracked Brazilian disk test, *Int.J.Fracture*, Vol.18, No.4, pp.279-291, 1982.
- 4) Nemat-Nasser, S. and Horii, H.: Compression induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation, and rockburst, *J.Geo-phys.Res.*, Vol.87, No.8, pp.6805-6821, 1982.
- 5) Yatomi, C.: The energy release rate and the work done by the surface traction in quasi-static elastic crack growth, *Int.J.Solids Structures*, Vol.19, No.2, pp.183-187, 1983.
- 6) 矢富盟祥, 鱸 洋一: 圧縮荷重下にある進展き裂のE積分によるエネルギー解放率の有限要素解析, 土木学会論文集(投稿中).
- 7) 矢富盟祥: エネルギー解放率の新公式とその応用—多軸荷重の場合の簡便評価式—, 材料, 35-394, pp.767-771, 1986.
- 8) Rongshin Li and Alexander Chudnovsky: Energy release rate of crack kinking within an an-isotropic inclusion, *Int.J.Fracture*, Vol.65, pp.3-10, 1994.
- 9) 鱸 洋一, 矢富盟祥: アイソパラメトリック要素を用いたE積分によるエネルギー解放率の有限要素解析, 構造工学論文集, Vol.43A, pp.437-444, 1997.

(1998年4月24日 受付)