

アイソパラメトリック要素を用いたE積分によるエネルギー解放率の有限要素解析

ENERGY RELEASE RATE ANALYSIS USING THE E-INTEGRAL
WITH AN ISOPARAMETRIC FINITE ELEMENT

鱸 洋一*, 矢富盟祥**

Youichi SUZUKI and Chikayoshi YATOMI

*金沢大学大学院博士課程 地球環境科学専攻 (〒920 金沢市小立野二丁目 40-20)

** Ph.D. 金沢大学教授 工学部土木建設工学科 (〒920 金沢市小立野二丁目 40-20)

In this paper, we compute the energy release rate using the E-integral with an isoparametric finite element. A large rectangular domain with a centered crack is modeled with six-noded triangular elements near the crack tips and, at the rest of model, with eight-noded rectangular elements with quadratic shape functions. For a well-known path-independent J-integral, such isoparametric elements have often been employed, in which the integral paths are across the interiors of elements. We find that its method does not give accurate results both for the J-integral and for the E-integral unless the smaller and regular shape of element. Since the evaluation of the E-integral requires only the traction vector and the displacement along the integral paths and does not require the computing of the strain energy as the J-integral, we then examine the use of the integral path which is along the sides of elements and the nodes. As a result, we confirm that, in the analysis of the E-integral, the path-independency and the energy release rate are obtained with a high accuracy and with a shorter time and a smaller memory capacity than the analysis with the constant strain triangular elements.

Key Words : E-integral, energy release rate, isoparametric element

1. はじめに

破壊力学パラメータであるエネルギー解放率を有限要素法によって求めるには、従来、周知のJ積分がよく用いられているが、J積分では、進展き裂が直進して進む、すなわち、き裂と同方向に進む瞬間時のエネルギー解放率しか求められず、また、積分経路内が非均質であったり、応力ないしはひずみが不連続となる界面や複数の近接き裂が存在すると、経路独立性が失われる。これに対して筆者らの1人が提案したE積分¹⁾では、進展き裂先端を囲む任意の積分経路で、特定き裂先端の任意方向折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を有限要素法によって、求めることができる。筆者らはこれまでにE積分の有効性を数多く報告^{2)~6)}してきたが、E積分では経路独立性により、数値誤差の大きい、き裂先端近傍の物理量を用いずにエネルギー解放率を解析できる事を考慮し、これまでの報告では、扱いの比較的容易な定ひずみ三角形要素を用いてきた。しかし、き裂先端近傍の状況が非常に複雑な場合の解析や、計算時間、計算機容量の関係から、要素数の少ないアイソパラメトリック要素を用いたほうがより有利であると考えられる場合がある。しかし、要素数を少なくするために、歪んだ要素形状や種々の大きさの要素を用いることになるが、その場合、J積分を評価する場合汎用されていた要素の中央を通過する経路を用いると、J積分、E積分とも一般に精度が落ちる。そこでE積分では積分経路を要素辺上に設定できる長所を生

かし、要素辺上と節点を通過する経路を活用する方法を試みたところ、経路独立性やエネルギー解放率が非常に良い精度で得られることが分かった。なお本研究では、無限板中央にあるき裂の折れ曲がり時のエネルギー解放率をアイソパラメトリック要素を用いて解析し、理論解やWuの結果等^{7) 8) 9)}と比較検討することにより、アイソパラメトリック要素を用いたE積分による有限要素解析によりエネルギー解放率を得ることの有効性を考察した。

2. E積分によるエネルギー解放率の表示

Fig.1.に示されるような有限変形する2次元非均質、非線形超弾性体B内を準静的に進展するき裂を考える。ただし、Fig.1のように、非均質性が異種材料間の界面や静止き裂による場合は、その基準系での界面およびき裂は時間的に移動しないものとする。

いま、c方向に進展するき裂の一端を含む基準系に固定された正則な閉領域をA、その境界を Γ とする。B内の進展き裂長さを $2l$ とし、き裂は β ($0 \leq \beta \leq \alpha$)をパラメータとした物体Bの境界上で与えられた表面応力sあるいは変位uにより進展しているとする。たとえば単軸集中荷重Pが荷重制御で単調増加するように与えられた場合 $\beta = P$ とおける。この時、次式

$$E(l, \alpha) = \int_{\Gamma} \int_0^{\alpha} \left(\frac{\partial s}{\partial \beta} \frac{\partial u}{\partial l} - \frac{\partial s}{\partial l} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) d\beta d\Gamma \quad (2.1)$$

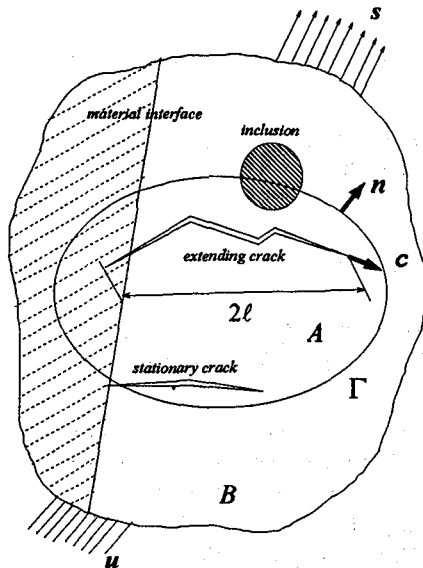


Fig.1. Quasi-statically extending crack

が非均質，非線形物質にも適用可能なエネルギー解放率を求める経路独立な積分公式でE積分といわれる。ここで， $s(x, \beta, \ell)$ ， $u(x, \beta, \ell)$ はそれぞれ Γ 上の表面応力，変位である。一方，周知のJ積分は， W をひずみエネルギー密度， n を Γ の外向き単位法線ベクトルとすると

$$J = \int_{\Gamma} (Wc \cdot n - s \cdot \nabla u c) d\Gamma \quad (2.2)$$

で定義される。

E積分は Γ 上の表面応力 s や変位 u のみで評価出来るが，J積分を評価するためには Γ 上のひずみエネルギー密度 W ，すなわち，ひずみ，また変位勾配をも求める必要があることに注意したい。

3. 解析方法および解析結果

3.1 有限要素法を用いたE積分の数値解析

本研究では線形弾性体を扱うために式(2.1)は次式のように変換できる²⁾。

$$E(\ell, a) = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2} s \cdot \frac{\partial u}{\partial \ell} - \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial \ell} \cdot u \right) ds \quad (3.1)$$

さらに数値解析するために，き裂進展に関する微分項をき裂進展前と進展後の2点差分近似をすると，式(3.1)は次式のようになる。

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ s(\ell) \cdot \frac{u(\ell + \Delta \ell) - u(\ell)}{\Delta \ell} - \frac{s(\ell + \Delta \ell) - s(\ell)}{\Delta \ell} \cdot u(\ell) \right\} \Delta s \quad (3.2)$$

ここに， n は経路における要素辺の数， Δs は各要素辺

の長さ， $\Delta \ell$ はき裂進展長さである。また (ℓ) および $(\ell + \Delta \ell)$ は，それぞれき裂の進展前と進展後の物理量を表している。

J積分に比べ，E積分はき裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を求めることができることなどの多くの優れた点を有している。また有限要素法を用いた数値解析により，複数のき裂の干渉問題や異方性物質，介在物を含むような物質といった複雑かつ重要な実際問題にも応用され，それらの解析においてもE積分を用いることの有効性が示されている。それらの報告における有限要素解析においては，E積分では経路独立性により，数値誤差の大きいき裂先端近傍の物理量を用いずにエネルギー解放率を求めることができる事を考慮し，扱いの比較的容易な定ひずみ三角形要素が用いられてきた。しかし，定ひずみ三角形要素を用いて応力特異性のあるき裂先端を含んだモデルにおいて，E積分値を精度良く得るためには，一般的には，多くの要素数が必要となり計算機容量，計算時間の面からも不利であることが考えられる。また，J積分の解析においては，少ない要素数でも良い精度が得られ，要素形状もかなり自由に設定できる特異要素を用いたアイソパラメトリック要素の使用が汎用されている。

そこで本研究では，E積分の有限要素解析にFig.2に示すような8節点四辺形，および6節点三角形アイソパラメトリック要素を使用し，その有用性の検討を行なった。

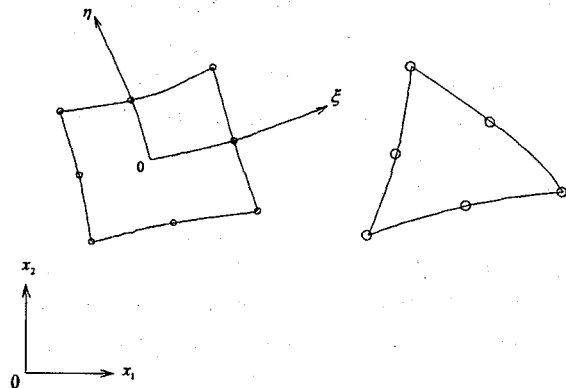


Fig.2 8-noded and 6-noded isoparametric element

3.2 解析モデル

本研究ではFig.3のように，無限板中央にある，き裂の右先端が進展する場合を想定し，縦80cm横80cmの有限板の中央に長さ4cmのき裂がある有限要素近似モデルを解析した。また，Fig.3に示すような要素分割をし，要素数332，節点数920である。積分経路はFig.4，Fig.5に示すように小さい方から(1)要素中央を横切る経路(I-path:点線)1~6(以後単に要素中央経路と呼ぶ)

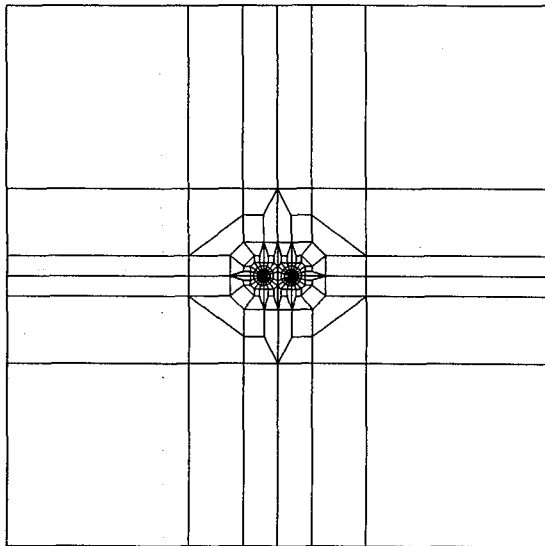


Fig.3 Finite element model with a centered crack

と、(2)要素辺上と節点を通過する経路(O-path : 太実線) 1~8 (以後単に要素辺上節点経路と呼ぶ) の計14本を設定した。ただし、Fig.4では1/4領域しか載せていない。また、Fig.5はFig.4のO-path3で囲まれる進展き裂先端領域を拡大したものである。積分経路についての詳しい説明は次節で行なう。なお一番外側の経路8はモデルの境界上つまり物体表面に設定してある。き裂先端近傍ではFig.6に示すように、 $-9\pi/10$ から $9\pi/10$ まで $\pi/10$ ごとに折れ曲がり角度を変えて計算できるように要素分割し、折れ曲がり角度 θ はき裂が直進する方向から左周りを正の向きとした。また要素は両側き裂先端の近傍のみは6節点三角形アイソパラメトリック要素を使用し、その他の部分は8節点四辺形アイソパラメトリック要素を使用している。なお、J積分を評価する際、き裂先端には8節点アイソパラメトリック要素を変形した $1/\sqrt{r}$ の特異性を示す特異要素の使用が一般的となっているが、E積分を評価する際、き裂が直進する場合はき裂の進展前と進展後のき裂先端近傍の応力やひずみの特異性のオーダーは変わらないのでそのまま特異要素を使用できるが、本研究のようにき裂の折れ曲がり解析するような場合はき裂折れ曲がり後のき裂先端の特異性と折れ曲がり点近傍にも、き裂先端とは異なるオーダーの特異性を持つため、通常用いられている特異要素をそのまま使用するには疑問がある。実際、進展前、折れ曲がり後、両方に特異要素を用いて解析を試みたが、精度の向上は見られなかった。なお、き裂長さ $l=4\text{cm}$ に対してき裂進展長さ $\Delta l=0.03125\text{cm}$ であり、その比は1/128である。全エネルギー法による解析同様、き裂進展長さは試行錯誤的、経験的に最適長さを決定しなければならないが、本研究では1/1024~1/16の範囲で試行解析を行いその比を決定した。

3.3 積分経路の検討

8節点アイソパラメトリック要素では、2次の形状関数を用いており、要素内では変位は2次的に、ひずみ、応力は線形に変化し分布している。そのため要素内各所でも変位、応力が求まり、要素内に積分経路を取る方法が提案されている¹⁰⁾。しかしJ積分では、要素内でしか経路を取ることができないのに対して、E積分では、要素辺上や境界上でも経路を設定することが出来る。そこで本研究では要素中央経路と要素辺上節点経路の2つの方法を用いて解析し、その結果を比較することにより、E積分を用いてエネルギー解放率を精度良く解析する方法について検討した。

(1)要素中央経路

8節点アイソパラメトリック要素を使用してJ積分を解析する際に提案されている方法で、Fig.7に示すように経路を要素内の局所座標系 (ξ, η) の軸上を通るようにとり、ガウスの1次元数値積分公式を利用して計算する方法である。8節点アイソパラメトリック要素では、要素内においてガウスの積分点が最もひずみ、応力の評価点にふさわしいと言われているため用いられている方法であり、また要素剛性マトリクスを作成する際の積分点数と、経路上の積分点数が同数であるため精度が良くなることが考えられるため汎用されている方法である。

ガウスの1次元数値積分公式は

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^r H_i f(\xi_i) \quad (3.3)$$

で与えられる。ただし、 H_i は重み係数であり3点積分($r=3$)の場合は

$$H_i = \begin{cases} \frac{8}{9} & (\xi=0) \\ \frac{5}{9} & \left(\xi = \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \end{cases} \quad (3.4)$$

である。

(3.2)式を1次元数値積分公式を利用して各要素内ごとのE積分(E^e)に変形すると

$$E^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 H_i \left[t_i(\xi) \cdot \frac{u_i(\xi+\alpha) - u_i(\xi)}{\Delta l} - \frac{t_i(\xi+\alpha) - t_i(\xi)}{\Delta l} \cdot u_i(\xi) \right] \left(\frac{ds}{d\eta} \right) \quad (3.5)$$

となる。ここで、 η は積分経路に沿う局所座標である。

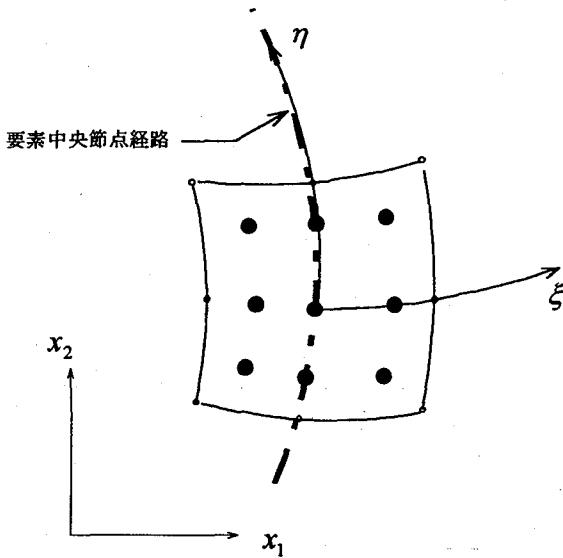


Fig.7 Integral path across the center of an element

ただし、
$$t\left(\frac{dx}{d\eta}\right) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \left(\frac{dy}{d\eta}\right) - \tau_{xy} \left(\frac{dx}{d\eta}\right) \\ \tau_{xy} \left(\frac{dy}{d\eta}\right) - \sigma_x \left(\frac{dx}{d\eta}\right) \end{Bmatrix}$$

である。

同様に J 積分も要素ごとに表すと

$$J^e = \sum_{i=1}^3 H_i \frac{1}{2} \left[\left[W - \left(\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \left(\tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \right] \quad (3.6)$$

となる。

これらを経路が通過するすべての要素について計算し総和をとる。

この方法を用いて破壊力学における基本的問題である、無限遠に一樣引張り応力を受ける、無限板中央に存在するき裂右先端が、直進する場合のエネルギー解放率を解析した。ただし解析はすべて2次元平面応力状態を仮定した。この積分経路を用いた解析結果が Fig.8 である。横軸は経路番号で、縦軸は無限板の理論解で得られるエネルギー解放率で除して正規化してある。図中●で示してあるのが E 積分値、■で示してあるのが J 積分値である。進展き裂先端を囲んだ経路 1~3 においては J 積分での値の方が理論解に近い値（誤差 3~7% 程度）となっているが、経路 4~6 においては J 積分では、き裂両端の特異性の影響が合計されてしまいエネルギー解放率が零となっている。J 積分ではこのように注目しているき裂先端以外のき裂先端を領域内に含むとエネルギー解放率が合計されてしまい、積分経路の設定の仕方に注意が必要と

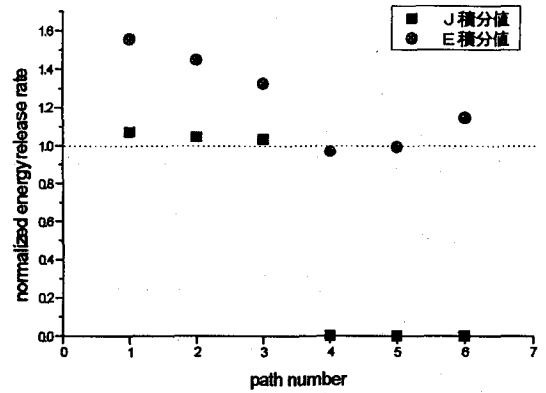


Fig.8 The energy release rate on several integral paths across the elements

なる。E 積分値は、進展き裂先端だけを囲む経路 1~3 では理論解よりも大きな値となっているが、き裂両端を囲む経路 4~6 では経路 1~3 よりき裂先端から離れて経路が取っているために理論解に近い値（0.6~3% 程度）となっている。しかし、経路独立性においてはどちらの積分においてもあまりよい結果は得られていない。これは積分経路上の要素の形状の違いの影響が出ているためであると思われる。すなわち、要素内でガウスの積分点での応力、ひずみと変位勾配しか計算に使用しない J 積分では影響が少ないが、さらに変位を陽に計算に使う E 積分では節点変位を要素中央の経路上にあるガウスの積分点における変位に変換するときの誤差が大きく影響すると考えられる。これはモデル全体を均等な分割をすれば改善されることが予想されるが、そうすると要素数は必然的に増え、少ない要素で精度よく解析できるアイソパラメトリック要素を使用するメリットが少なくなる。

(2) 要素辺上節点経路

Fig.9 に示すように積分経路を要素辺上に設けて、節点での変位、節点力（節点での表面応力）を直接用いて

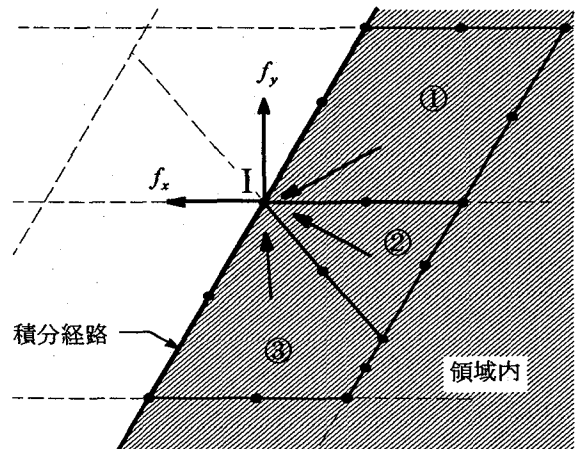


Fig.9 Integral path along the sides of element and the nodes

積分する方法である。(1)の方法と違い、表面応力を求める際に要素内の応力による近似を必要としない。J積分ではひずみエネルギー密度をその計算の際に必要とするが、節点での応力、ひずみは精度が非常に悪いので節点でのひずみエネルギー密度は精度よく求まらない。そのため、J積分には明らかに不適当な方法であり本研究ではJ積分をこの方法で求めていない。

積分経路上の節点での表面力成分 f_x, f_y を求めるには積分経路内にあるその節点を含むすべての要素 (図の節点 I の場合は要素①②③) において、

$$\{f\}_m = [K]_m \{u\}_m, m = ①, ②, ③ \quad (3.7)$$

ただし、 $[K]_m$: 要素 m の剛性マトリクス

$\{f\}_m$: 要素 m の節点力 (表面応力)

$\{u\}_m$: 要素 m の節点変位

によって節点力を計算した後、合計する。

その値と積分経路上での節点変位を、き裂長さの異なるモデルでそれぞれ求めて

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[f_i(t) \cdot \frac{u_i(t+\Delta t) - u_i(t)}{\Delta t} - \frac{f_i(t+\Delta t) - f_i(t)}{\Delta t} \cdot u_i(t) \right] \quad (3.8)$$

に代入して計算する。ここで n は積分経路上の節点数である。

この要素辺上節点経路の方法を用いた解析結果 Fig.10 を見てみると、き裂先端のみを囲む経路 1~5 およびき裂両先端を囲む 6, 7 とすべての経路において一定の値となっており経路独立性が非常に良い精度で成立していることがわかる (経路誤差 0.001% 以下)。また、無限板の理論解との誤差も 0.2% 以下とエネルギー解放率の精度も非常に良いことがわかる。境界上の経路 8 においても同様に経路独立性があり理論解との誤差も 0.2% 程度である。

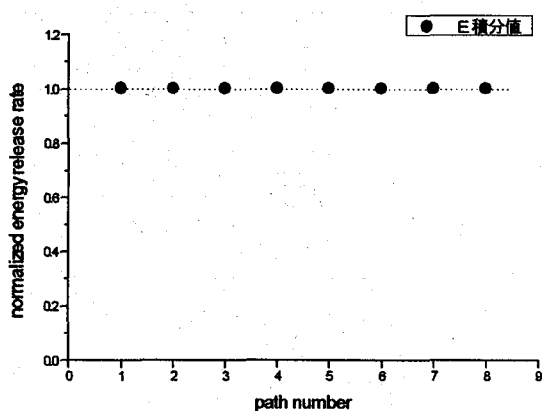


Fig.10 The energy release rate on several integral paths along the sides of the element and the nodes

このことはE積分では、J積分と違い、境界上つまり物体表面での荷重—荷重点変位関係を測定すれば、構成式が分からなくてもエネルギー解放率を求めることができるという、実験にも有用であるE積分の大きな特徴を数値解析的に表している。

この要素辺上節点経路を用いた方法であると、E積分により進展き裂先端を囲み、先端近傍から離れた任意の経路で、ほとんど経路誤差なしで非常に精度よくエネルギー解放率が求められることがわかる。

3.4 斜向荷重を載荷した時のき裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率の解析

この要素辺上節点経路の方法を用いて、き裂経路がジグザグであったり、き裂の分岐現象などを解明する上でも基礎的かつ重要な問題である、無限遠に存在する一様応力の載荷軸が斜向した場合 (すなわち、モード I とモード II の混合モードとなる場合) を解析した。

Fig.11 のように一様引張り応力の載荷軸がき裂面に垂直な方向に対してなす角度を γ として、き裂の右先端が折れ曲がって進展する瞬間時のエネルギー解放率を、一番外側の経路 7 で求めた。

Fig.12 は $\gamma = 0.0\pi$ の場合、すなわち、き裂面に垂直な方向に一様引張り応力を載荷した場合のき裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を求めた結果であり、横軸はき裂折れ曲がり角度 θ 、縦軸はき裂がまっすぐ進む場合の理論解により求めたエネルギー解放率で正規化してある。折れ曲がり角度が負方向の値は、結果が正方向と同一となる対称性を確認したため、図では省略してある。図中●で示してあるのが本解析結果であり、破線で示したものが Wu の解析解 η である。なお、文献 7) には、 $\theta \leq 0.4\pi$ までしか得られていない。このき裂の折れ曲がりの問題はモード III 以外厳密な理論解が存在しないが、

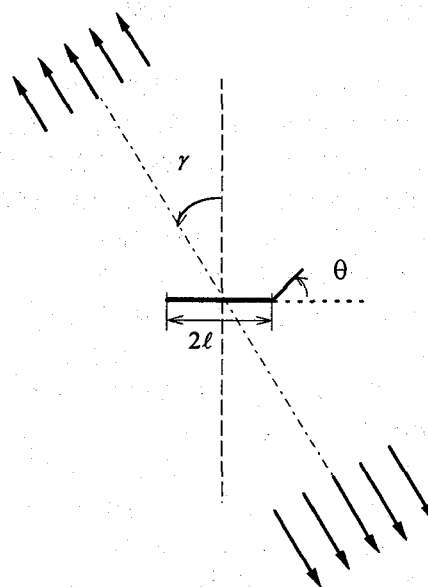


Fig.11 A single crack subjected to an inclined tension

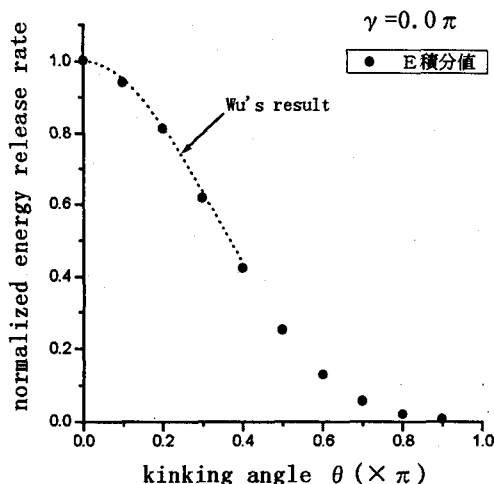


Fig.12 The variations of energy release rate at the onset crack kinking with loading angle 0.0π

I, IIの混合モードの場合Wuの結果はその他の多くの研究によって確かめられており、最も信頼できる解である。そのWuの結果と本解析の結果は非常に良く一致している。今、これと同条件の問題を、同一の計算機を使用して、定ひずみ三角形要素を用いた場合と比較すると、どちらも同程度に非常に良い精度で解析できているが、計算に必要な記憶容量は約15倍、計算時間は約10倍少なく済む。この事は、アイソパラメトリック要素を用いた解析を、弾塑性解析、有限変形解析などの記憶容量、計算時間のかかる問題に応用した場合に、非常に有益である事を表している。

Fig.13は $\gamma = 0.117\pi$ の場合であり、混合モード下でのき裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率の解析を行った結果である。縦軸はFig.12と同様、荷重が $\gamma = 0.0\pi$ の時、き裂がまっすぐ進む場合の理論解により求めたエネルギー解放率で正規化してあるが、荷重を $\gamma = 0.117\pi$ だけ、き裂面に垂直な方向から少し傾けた場合、定ひずみ三角形要素を用いた解析では、どの θ 方向に対しても最大エネルギー解放率 E_{max} は1.0を超えなかったが、アイソパラメトリック要素を用いた本解析では、 $\theta \approx 0.2\pi$ で $E_{max} \approx 1.029$ となり、1.0を超えるところがあった。同条件でWu⁹⁾は最大エネルギー解放率1.069を報告しており、またHayashi and Nemat-Nasser¹⁰⁾は、 $\gamma = 0.125\pi$ で $\theta = 0.208\pi$ の時、最大エネルギー解放率1.072を報告している。この事より、アイソパラメトリック要素を用いた解析の方が、より精度も向上している事が分かる。

4. おわりに

本研究では、E積分によるエネルギー解放率をアイソパラメトリック要素を用いた有限要素解析で求め、その有効性を検討した。その結果、アイソパラメトリック要素

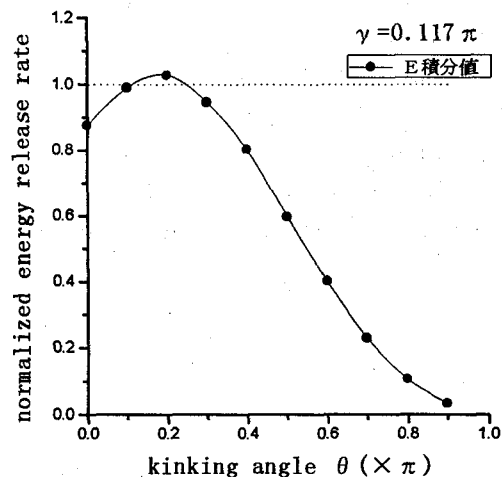


Fig.13 The variations of energy release rate at the onset crack kinking with loading angle 0.117π

を用いた場合、積分経路を要素辺上に設定し節点での表面力、変位を直接使用すれば、定ひずみ三角形要素を用いた場合より、かなり少ない計算時間、計算機容量で、進展き裂先端を囲み、先端近傍から離れた任意の積分経路で精度良くエネルギー解放率を求めることができ、き裂の折れ曲がり問題に対しても非常に有効であることが確認できた。

参考文献

- 1) Yatomi, C.: The energy release rate and the work done by the surface traction in quasi-static elastic crack growth, Int. J. Solids Structures, Vol.19, No.2, pp.183~187, 1983.
- 2) Yatomi, C., Hashimoto, K. and Ishida, H.: Finite element analysis of the energy release rate for a kinked crack using the E-integral, Lecture Note in Num. Appl. Anal., 13, pp.61~74, Kinokuniya, 1994.
- 3) 矢富盟祥, 橋本堅一, 石田啓: E積分による斜向荷重下でのき裂折れ曲がり瞬間時におけるエネルギー解放率の有限要素解析, 日本機学会論文集(A編), Vol.61, No.592, pp.2521~2528, 1995.
- 4) 橋本堅一, 矢富盟祥, 石田啓: 界面貫通き裂および界面近傍き裂のエネルギー解放率のE積分による数値解析, 日本機学会論文集(A編), Vol.61, No.592, pp.2529~2534, 1995.
- 5) 橋本堅一, 矢富盟祥, 石田啓: E積分による異方弾性体内のき裂折れ曲がり時におけるエネルギー解放率の数値解析, 土木学会論文集, No.513/I-31, pp.17~25, 1995.

- 6) 橋本堅一, 矢富盟祥, 石田啓: き裂先端付近に介在物あるいは空隙がある場合のE積分によるエネルギー解放率の解析, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.499~508, 1995.
- 7) Wu, C.H.: Explicit asymptotic solution for the Maximum-Energy-Release-Rate problem, Int. J. Solids Structures, Vol.15, pp.561~566, 1978.
- 8) Wu, C.H.: Fracture Under Combined Loads by Maximum-Energy-Release-Rate Criterion, J. Appl. Mech., Vol. 45, pp.553~558, 1978.
- 9) Hayashi and S. Nemat-Nasser: Energy-Release Rate and Crack Kinking Under Combined Loading, J. Appl. Mech., Vol. 48, pp.520~524, 1981.
- 10) 例えば, 石川晴雄: J積分による応力拡大係数の有限要素解析, 日本機械学会論文集(A編), Vol.46, No.401, pp.97~76, 1980.

(1996年9月6日受付)