

# E積分による異方弾性体内のき裂折れ曲がり時 におけるエネルギー解放率の数値解析

橋本堅一<sup>1</sup>・矢富盟祥<sup>2</sup>・石田 啓<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 徳山工業高等専門学校助教授 土木建築工学科 (〒745 徳山市久米高城3538)

<sup>2</sup>正会員 Ph.D. 金沢大学教授 工学部土木建設工学科 (〒920 金沢市小立野二丁目40-20)

<sup>3</sup>正会員 工博 金沢大学教授 工学部土木建設工学科 (〒920 金沢市小立野二丁目40-20)

異方弾性体内のき裂の折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を、経路独立なE積分を用いて、有限要素法により数値解析を行った。異方弾性体では、モードIの載荷状態でもモードIIの影響が現れることに注意し、本論文では、基本的な問題として、無限板中央にき裂を有し、き裂面に垂直な無限遠一様荷重を受けるモデルを解析した。

エネルギー解放率が最大となるき裂の折れ曲がり角は、異方性方向によらず、等方弾性体同様、き裂が直進する場合の方向とほぼ一致したが、値そのものは異方性の違いにより大きく変化し、主異方性軸方向が主き裂面方向に一致する場合を最大とし、垂直な場合を最小とする正弦関数的な関係を呈することがわかった。

**Key Words :** *E-integral, energy release rate, transversely isotropic body, onset of crack kinking, finite element method*

## 1. 緒言

岩盤や岩石はそれらが持つ異方性挙動が重要視され、破壊、崩壊に至るまでの変形挙動に関する研究が数多く報告されている。岩石についてはほとんどの火成岩、堆積岩で異方性挙動が認められ<sup>1)</sup>、破壊現象に大きな影響を与えていることが知られている。また石油備蓄基地などの地下岩盤構造物の対象となる堅固な岩盤を構成する花崗岩は直交異方性としてよく知られており<sup>2),3)</sup>直交方向の弾性係数は最大で2倍近く異なるものも少なくなく<sup>4)</sup>、引張強度や破壊靱性については異方性方向の違いによるそれらの最大値および最小値の差が最大値と最小値の中間値に対して最大30%におよぶものも珍しくない<sup>5)~7)</sup>。

最近では新素材と呼ばれる複合材料も異方性を示す材料として注目されつつある。これらは軽量にして高強度、高じん性を目的に開発された材料で土木構造物への応用として、今後ますますその需要が増してくると考えられるが、ほとんどが繊維補強複合材料であるため、著しい異方性を示し、使用する上でその材料特性を十分把握しておく必要がある。

以上に挙げたように土木工学の分野では力学的変形挙動を考察するとき異方性を考慮して対処しなければならない材料が多い。これらの材料を材料内の欠陥あるいはき裂によって破壊が誘起されるという破壊力学的な立場から論じる場合、2次元的に考えれば、載荷状態が純粋な開口型(モードI)であっても変形の異方性

により面内せん断型(モードII)の変形も考慮しなければならない混合モード状態となり<sup>8)</sup>、き裂の挙動はより複雑になる。異方性材料内の平面き裂解析には、おもにモードIとモードIIの応力拡大係数( $K_I$ ,  $K_{II}$ )で扱われるものが多く、最近では複素関数や経路独立積分を利用して、有限要素法と組み合わせることにより解析されている<sup>9)~11)</sup>。応力拡大係数は主き裂からのき裂進展前の主き裂先端近傍の応力状態を現わしていることから、き裂の発生時期、発生方向を予測できる点や等方弾性体の場合それ自体が弾性係数に無関係などの有意な点を持つが、線形破壊力学に基づいた考え方であるため、材料および幾何学的非線形性を考慮できないという欠点を有する。一方、非線形性を考慮できる破壊力学的パラメータにはエネルギー解放率がよく知られている。エネルギー解放率についてはEshelbyおよびRiceによって提案された<sup>12),13)</sup>よく知られている経路独立な積分、J積分により任意の非線形弾性体の場合でもエネルギー解放率が求められ、弾塑性体などの非線形破壊力学へ拡張利用した研究も活発に行われている。しかし、J積分でエネルギー解放率を求めると、その値は進展き裂が主き裂方向と同方向になめらかに進む場合に限られたエネルギー解放率を与えることから、き裂の進展方向の予測という立場からみると有意性をあまり持たないものになってしまう。

本研究は以上のことを背景に、主き裂方向と異なる方向にき裂が進展する、き裂折れ曲がり(瞬間)時のエネルギー解放率も経路独立不変積分で求めることが可能

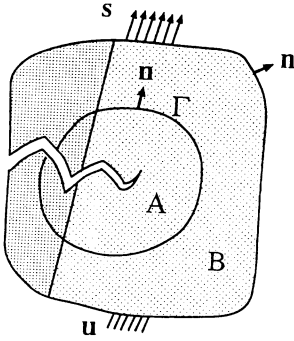


Fig. 1 Quasi-statically extending crack.

なE積分の概念<sup>14)</sup>を使用して、異方性材料内のき裂進展時のエネルギー解放率を種々のき裂の折れ曲がり角に対して求め、最大エネルギー解放率破壊条件の立場から異方弾性体中のき裂の折れ曲がり現象を考察した。ただし、現実的には、前述したような異方性材料は、一般に、弾性定数のような材料特性の異方性のみならず、破壊強度 ( $G_{IC}$ ,  $K_{IC}$  など) の異方性も著しく、それを厳密に評価しなければ、実際の折れ曲がり方向の予測にはならない。しかし、材料を特定したとしても、破壊強度の異方特性の詳細な研究はほとんど行われていないこと、また、本論文では、異方弾性体のE積分によるエネルギー解放率の数値計算が主目的であることから、今回は、破壊強度は、等方性と仮定して議論している。

なお、異方線形弾性体のき裂折れ曲がり時における応力拡大係数やエネルギー解放率に関する研究は、Obataら<sup>15)</sup>とGaoら<sup>16)</sup>の報告がある。前者は積分方程式による数値解を、後者は、折れ曲がり角が小さいと仮定した摂動近似解を得ている。しかし、Obataらのエネルギー解放率に関する解析には誤りがあると指摘されており<sup>16)</sup>、一方、Gaoらのエネルギー解放率の結果の図も、異方性軸がき裂と直交する特別な場合を除き、彼らの得た式を使った結果とは一致しないなど、現在まで得られている異方弾性体の場合の結果はいずれも信頼性に欠ける。そのため本論文では精度の検証として等方性の場合の報告のみ<sup>17),18)</sup>と比較している。

## 2. E積分によるエネルギー解放率の表示

Fig.1に示すように有限変形する2次元非均質非線形超弾性体B内を準静的に進展するき裂を考える。ただし、Fig.1のように、非均質性が界面を成す場合は、その基準系での界面は時間的に移動しないとす<sup>19)</sup>。いま、き裂の一先端を含む基準系に固定された正則な閉領域をA、その境界を $\Gamma$ とする。B内のき裂長さを $\ell$ と

し、き裂は $\beta(0 \leq \beta \leq \alpha)$ をパラメータとした物体Bの境界上で与えられた表面応力ベクトル $s$ 、あるいは変位ベクトル $u$ により進展しているとする。たとえば、単軸集中荷重 $P$ が荷重制御で単調増加するように与えられた場合、 $\beta = P$ とおける。

そのとき物体内では、第1種のPiola-Kirchhoff応力 $S$  ( $s = S n$ ,  $n$ は単位法線ベクトル)、変位 $u$ 、変位勾配 $H = \nabla u$ 、ひずみエネルギー密度 $w$ などの場の量 $\varphi(X, \ell, \beta)$ がき裂を除いた基準系での位置 $X$ で各 $\ell, \alpha$ に対して定義される。物体が非均質な超弾性体とすると

$$S = \frac{\partial w(H, X)}{\partial H} \quad (1)$$

である。物体力のない準静的な場合を考えると、平衡式

$$\text{Div} S = 0 \quad (2)$$

がき裂を除いた箇所 で成立している。

ここでは、エネルギー解放率をき裂進展中におけるき裂の一先端を囲む基準系に固定された正則な閉領域A内のエネルギー変化率の不釣り合い量:

$$E(\ell, \alpha) = \int_{\Gamma} s \cdot \frac{\partial u}{\partial \ell} ds - \frac{\partial}{\partial \ell} \int_A w da \quad (3)$$

として定義する<sup>14)</sup>。ここでき裂が折れ曲がる瞬間時のエネルギー解放率の場合は、 $\ell$ による偏微分は、右微分係数 ( $\ell \rightarrow 0^+$ ) で定義される。

Eの値は領域Aがき裂先端を含まないときは、式(3)で発散定理が成立し $E \equiv 0$ であるから、領域Aがき裂先端を含む限りその形、大きさによらないことは明かである。

式(3)を直接数値積分で評価すると、き裂先端周辺領域の $w$ に関する面積分を必要とするため精度や計算時間の点でも、また扱い易さの点でも不利である。したがってこの式を経路積分に変形することを考える。式(3)を経路積分に変形するとき、発散定理がうまく使えるような $(\ell, \beta)$ 空間での積分でひずみエネルギー密度 $w$ を定義する必要がある。すなわち

$$w(\ell, \alpha) = \int_0^{\alpha} S(\ell, \beta) \cdot \frac{\partial H(\ell, \beta)}{\partial \beta} d\beta \quad (4)$$

ととればよいことがわかる。ここで記号が複雑になるのをさけるため $\varphi(X, \ell, \beta)$ を単に $\varphi(\ell, \beta)$ と記した。そのとき平衡式(2)および発散定理を使えば

$$\int_A w da = \int_A \int_0^{\alpha} S \cdot \frac{\partial H}{\partial \beta} d\beta da = \int_{\Gamma} \int_0^{\alpha} s \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} d\beta ds$$

が成立し、これを式(3)に代入すると

$$E(\ell, \alpha) = \int_{\Gamma} \int_0^{\alpha} \left( \frac{\partial s}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \ell} - \frac{\partial s}{\partial \ell} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) d\beta ds \quad (5)$$

が得られる。上式が非均質非線形物質にも適用可能な経路独立なエネルギー解放率を求める積分公式でE積分と言われる。E積分は周知のJ積分とは異なり、非均質物質中を進展するき裂、また疲労き裂等にしばしばみられる非直線的なき裂に対しても経路独立であるこ

とは式(3)の定義自体が領域  $A$  によらないこと、また式(5)を導く際、き裂の直線性は仮定していないことから明らかである。さらに、 $\Gamma$ のように積分経路にき裂面を含まない場合、 $J$ 積分では、主き裂と同方向にき裂が進展した場合のエネルギー解放率しか求まらないが、 $E$ 積分では、任意の方向に進展した(瞬間時の)場合でも経路独立な積分により求めることができる。したがってそのような、き裂折れ曲がり時における、数値解析において、最も誤差が大きくなる特異点近傍から離れて積分すればよく、数値解析上有利である。

以下、微小変形理論に限定し、ひずみ $\epsilon$ が応力 $\sigma$ の $1/m$ 次同次型、すなわち、任意の $\kappa > 0$ に対して、

$$\hat{\epsilon}(\kappa\sigma) = \kappa^{\frac{1}{m}} \hat{\epsilon}(\sigma) \quad (6)$$

が成立する場合を考える。このとき、 $\kappa$ を上記のき裂長さ $\ell$ と独立なパラメータ $\beta$ と考え、表面応力ベクトルが

$$s = \beta \hat{s}_0(\mathbf{X}, \ell) \quad (7)$$

と表せる場合を考える。このとき、

$$\sigma = \beta \hat{\sigma}_0(\mathbf{X}, \ell)$$

と表現でき、式(6)より

$$\epsilon = \beta^{\frac{1}{m}} \hat{\epsilon}_0(\mathbf{X}, \ell) \quad (8)$$

となり、式(8)を積分して( $\beta=0$ の時 $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ とすると)

$$\mathbf{u} = \beta^{\frac{1}{m}} \hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}, \ell) \quad (9)$$

を得る。式(7)と式(9)を式(5)に代入して、 $\beta$ に関して積分すると

$$E(\ell, \alpha) = \int_{\Gamma} \left( \frac{m}{m+1} s \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \ell} - \frac{1}{m+1} \frac{\partial s}{\partial \ell} \cdot \mathbf{u} \right) ds \quad (10)$$

となり、 $\beta$ に関する積分が不用な表現を得る。特に、線形弾性体の場合は式(10)で $m=1$ を代入することにより

$$E(\ell, \alpha) = \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} s \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \ell} - \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial \ell} \cdot \mathbf{u} \right) ds \quad (11)$$

となり、Sandersの共役型の積分公式<sup>20)</sup>と同一になる。

これに対してFig.2のように $e$ をき裂先端の進む方向の単位ベクトル、 $\mathbf{n}$ を $\Gamma$ 上の外向きの単位法線ベクトルとしたとき

$$J = \int_{\Gamma} (w e \cdot \mathbf{n} - s \cdot \nabla u e) ds \quad (12)$$

で定義される $J$ 積分は、き裂が直線的でないかぎり、き裂面上で $e \cdot \mathbf{n} \neq 0$ であるから、先に述べた閉領域  $A$  の境界 $\Gamma$ からなる経路では経路独立とはならない。経路独立積分とするためには $\Gamma$ にき裂面を含める必要がある<sup>19)</sup>。しかしながらき裂面を積分経路に含めることにより経路独立積分としてジグザグなき裂に適用できてもき裂の折れ曲がり時におけるエネルギー解放率は求めることは非常に困難である。もし $J$ 積分を用いてき裂の折れ曲がり時におけるエネルギー解放率を求めようとすると、最終的に折れ曲がった微小き裂(Fig.2中の長さ $\Delta\ell$ の部分)の先端を含む積分経路(たとえば、Fig.2

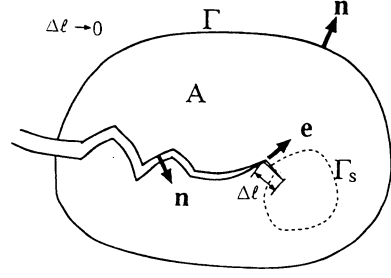


Fig. 2 Zigzag extending and kinking crack.

中の $\Gamma_s$ )をとって解析する必要があるが、その折れ曲がった微小き裂長さを複数とった後、極限操作でその長さが零になるところを外挿して求める必要があり、き裂先端近傍では数値誤差が大きいことなども考慮すると数値解析上極めて不利となる。

本研究では、 $E$ 積分の特徴を生かして、 $J$ 積分など他の経路独立型の積分では求めることが困難であった、一般にはどんな载荷に対しても混合モードとなる、異方弾性体内のき裂の折れ曲がり時のエネルギー解放率の有限要素数値解析を試みる。その際、過去に得られた微小変形理論のもとで線形等方弾性体の場合の理論解、数値解と比較検証するため、式(11)を用いた。なお、今回は非線形挙動への応用には触れていないが、理論的には容易に拡張可能である。

### 3. 解析方法および解析モデル

線形異方弾性体を3次元応力-ひずみ関係で完全に記述するには、対称性を加味しても21個の独立した弾性定数が必要である。2次元で考えるとこれが最大で6個に減る。本研究では実際の異方性材料によくみられる直交した方向の弾性係数の違いを2次元問題で考えるため比較的扱いの容易な面内等方性(横等方性)材料を考えた(Fig.3)。ここで応力とひずみの関係をマトリクス表示すると線形異方弾性体の場合、

$$[\sigma] = [D][\epsilon] \quad (13)$$

で表され、応力マトリクスあるいは弾性マトリクスと呼ばれる $[D]$ は面内等方性材料では、平面応力を仮定すると図中 $x_1$ - $x_3$ 平面内の変形に関するヤング係数、ポアソン比およびせん断係数をそれぞれ $E_1$ 、 $\nu_1$ 、 $G_1$ 、また $x_2$ 方向に関するヤング係数、ポアソン比およびせん断係数をそれぞれ $E_2$ 、 $\nu_2$ 、 $G_2$ とし、新たな定数 $n (=E_1/E_2)$

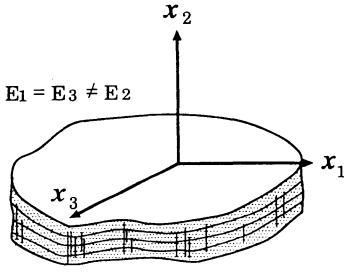


Fig. 3 Transversely isotropic body.

と  $m (=G_2/E_2)$  を導入すると

$$[D] = \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \begin{bmatrix} n & \nu_2 & 0 \\ \nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1 - \nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (14)$$

となる。ただし、ここでは  $G_1 = E_1/2(1 + \nu_1)$  であり、さらに  $E_1\nu_2 = E_2\nu_1$  を仮定すると、独立な弾性係数は4個となる。これを全体座標系に変換して用いることになる。

本研究では無限板中にき裂長さ  $2\ell=1.2\text{cm}$  のき裂が存在する場合を考え、荷重はき裂面に垂直な一様分布荷重が無限遠に载荷されている場合(载荷的にはモードI)を想定する。これに対する有限要素近似モデルは横幅寸法(き裂面方向)12cm、縦方向11.43cmの有有限長方形板としている。このモデルと同一幅をもつ中央にき裂のある等方線形弾性体の無限長帯板の同様引張モデルの応力拡大係数を文献17)にある式で求めたところ、無限板中の中央き裂の場合の応力拡大係数 ( $K_I = \sigma\sqrt{\pi\ell}$ ) との差は0.4%程度であった。用いた有限要素モデルは最も扱いの容易な定ひずみ三角形要素を用いるため1/4領域に対してFig.4に示すような要素分割としている。要素は正三角形を基本とした要素分割が行われており、要素数は6758である。節点数については式(11)を数値解析に適用する場合、その式の性質上、対象となる主き裂モデル(以下基本モデルと略する)に対してき裂を微小変化させたモデルを解析する必要がある。本研究ではき裂長さに関する微分項を、き裂を進展させたモデルとの2点差分により近似するため、その節点数は基本モデルで3450、き裂進展モデルで3451である。

式(11)における積分経路については、その経路を要素の辺上に設定し、Fig.5に示すようにき裂近くの最も細かく要素分割された領域内のみに6経路設けている。これらのうちの5経路はき裂の右先端を中央に含んだ正六角形になっており、残りの1経路はき裂全体を被った六角形としている。本研究では式(11)を次

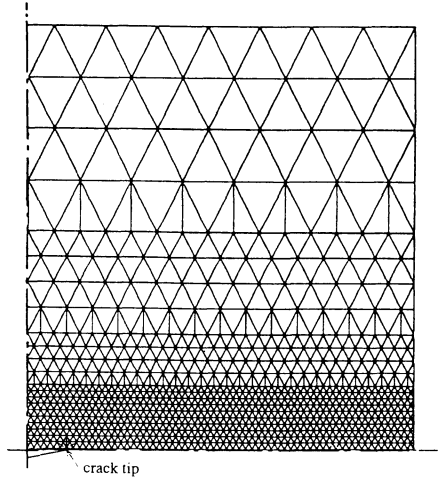


Fig. 4 Finite element mesh for an infinite model.

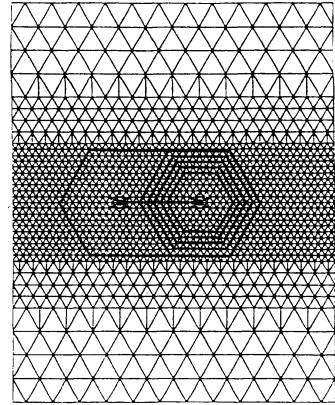


Fig. 5 Integral paths

式のように近似した<sup>22)</sup>。

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ t_i(\ell) \cdot \frac{u_i(\ell + \Delta\ell) - u_i(\ell)}{\Delta\ell} - \frac{t_i(\ell + \Delta\ell) - t_i(\ell)}{\Delta\ell} \cdot u_i(\ell) \right\} \Delta s \quad (15)$$

ここで  $n$  は経路における要素辺の数、 $t_i$  は各要素辺における表面応力ベクトル、 $\Delta s$  は各要素辺の長さ、 $u_i$  は各要素辺上における変位ベクトル、そして  $\Delta\ell$  は基本モデルとき裂進展モデルのき裂長さの差である。また  $(\ell)$  および  $(\ell + \Delta\ell)$  は、それぞれき裂進展モデルと基本モデルを表している。各辺上の応力は各辺内外の要素応力を平均することにより求めている。各要素辺上における変位については要素辺端の節点変位を平均して求

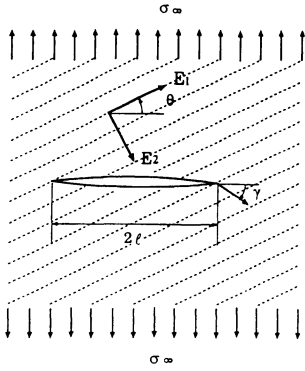


Fig. 6 Anisotropic axes and kinking angle.

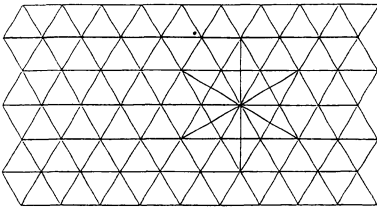


Fig. 7 Finite element meshes in the neighborhood of a crack tip.

めている。

異方性軸の方向と主き裂およびき裂の折れ曲がり角との関係を Fig.6 に示す。ここで異方性軸の方向は、主き裂面方向と主異方性軸方向（ヤング係数  $E$  が最も大きくなる方向）のなす角  $\theta$  で示し、折れ曲がり角は主き裂面方向と折れ曲がりき裂の方向のなす角を  $\gamma$  で示す。折れ曲がり角はき裂先端の要素分割を正三角形を二分した要素で構成させているため (Fig.7) 主き裂面からの折れ曲がり角  $\gamma$  を  $0^\circ, \pm\pi/6, \pm\pi/3, \pm\pi/2, \pm2\pi/3, \pm5\pi/6$  として計 11 方向に進展する場合を扱った。

解析例としては  $E_1$  および  $\nu_1$  をそれぞれ  $68.6\text{GPa}$ 、 $0.3$  と固定して、まず、前述の定数  $n$  が 1 のとき、すなわち等方弾性体のき裂折れ曲がり時のエネルギー解放率を求めた。次に異方弾性体として  $n=2$  と 10 の場合を解析した。ここで Fig.3 の  $x_2$  の方向に関する弾性係数として、問題を簡単にするため、 $G_2 = E_2/2(1+\nu_2)$  の関係を仮定した。対象とした異方性軸の方向は  $\theta = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$  の場合を考えた。最後に異方性材料の具体例とし、ガラス繊維強化プラスチック ( $E_1=20.58\text{GPa}$ ,  $E_2=15.68\text{GPa}$ ,  $\nu_2=0.07$ ,  $G_2=4.116\text{GPa}$ ) の場合<sup>23)</sup>を解析した (この例では  $G_2 \neq E_2/2(1+\nu_2)$  であることに注意)。このときの異方性軸の方向は  $\theta = \pi/12, \pi/6, \pi/4, \pi/3, 5\pi/12, \pi/2$

とした。

有限要素法を用いてき裂解析を精度よく行う場合、アイソパラメトリック要素、特異要素を用いての解析が一般的となっている。しかし経路独立積分の特徴として、き裂先端近傍の高い解析精度が要求されないことや解析上の簡便性などを考慮し、本研究では全体に定ひずみ三角形要素を用いた<sup>22)</sup>。一方、E 積分と同様、き裂長さの違う複数のモデルを扱う方法として、全エネルギー法が知られているが、その方法が現在 J 積分法に比較して数値解析的にあまり用いられてない。それは、モデルを複数考える不便性にあるのではなく、主として解の精度の保証がないことにあり、J 積分法は、経路独立性を利用して解の精度の検証が行えるという利点が解析の優位性を与えるためである。その点を考えれば E 積分は経路独立積分であるため全エネルギー法に比べ、より有用な解析手法であるといえる。

#### 4. 解析結果

き裂が等方弾性体をモード I の状態のまま直進する場合 (この場合、応力拡大係数の厳密解は  $K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi l}$ 、エネルギー解放率  $G$  と応力拡大係数  $K_I$  の関係は平面応力状態の場合  $G = K_I^2/E$ 、ここで  $E$  は等方弾性体のヤング係数) の解析結果の経路誤差を Fig.8 に示す。図中、横軸は、積分経路を設定した経路上では要素辺の長さがすべて等しいことから、一つの経路上の要素辺の総数を積分経路の長さとしている。また縦軸のエネルギー解放率は厳密解で除して正規化している。ここでいちばん内側の経路については厳密解に対して約 1.05% の誤差が生じているが、そのほかの経路についてはすべて誤差 1% 以下と高い精度でエネルギー解放率が得られている。以下、経路誤差を確認しながら、最も外側の経路の解析値で議論を進める。

等方弾性体中のき裂折れ曲がり時におけるエネルギー解放率の E 積分の解析結果をまとめたものが Fig.9 である。縦軸はき裂が直進する場合の厳密解で除して正規化している。図中実線は Wu が報告した解析結果<sup>17)</sup> であり、破線は Hussain らの報告<sup>18)</sup> によるものである。ここでエネルギー解放率が最大となる場合を中心に、き裂の折れ曲がり角  $\pm\pi/2$  の範囲で本研究での解析と Wu の解析および Hussain らの報告は非常によく一致していることがわかる。したがって、E 積分による本解析手法は、最も取扱いの容易な定ひずみ三角形要素による有限要素法でも、かなり高い精度で最大エネルギー解放率が得られることがわかった。

$n (= E_1/E_2) = 2$  の場合の異方性材料のエネルギー解放率とき裂の折れ曲がり角との関係を、各異方性軸方向  $\theta$  に対し示したものが Fig.10 である。図中、縦軸は

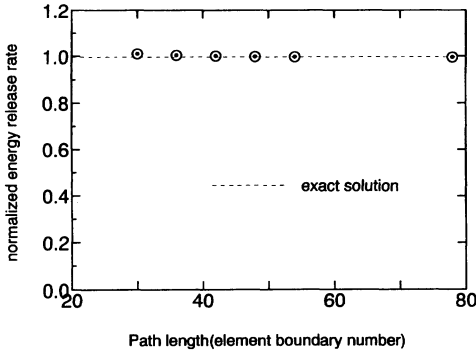


Fig. 8 Path errors for a straight extending crack in an isotropic elastic body.

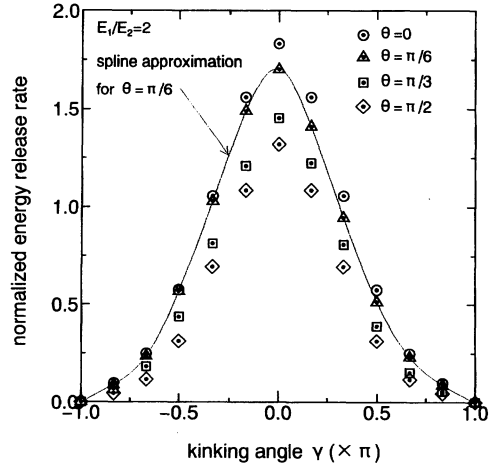


Fig. 10 Energy release rate for a kinking crack in an anisotropic body ( $n=2$ ).

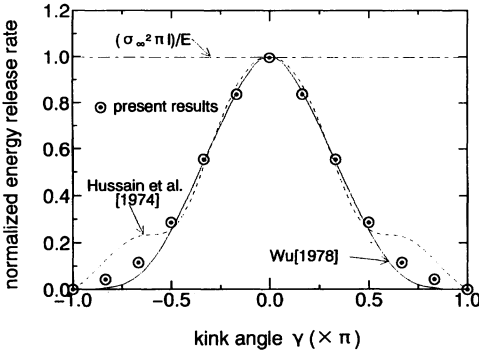


Fig. 9 Energy release rate for a kinking crack in an isotropic body.

前述同様、等方性無限弾性体のき裂が直進する場合の厳密解で除して正規化している。ここで、どの異方性軸の方向の場合でも正規化された最大エネルギー解放率は1より大きくなっている。このことは $E_1$ を固定して $E_2$ を小さくしたため、先に行った等方弾性体の場合よりも $x_2$ 方向について、変形しやすくなっているためであると解釈される。最大エネルギー解放率の異方性軸による影響は、異なる $\theta$ により得られた平均値で約30%強となっているが、最大エネルギー解放率が生じる方向は、き裂が直進する方向とすべてのケースに対してほぼ一致する。ここでき裂進展方向に対して、異方性軸の影響を最も受けていると思われる $\theta = \pi/6$ についてスプライン曲線近似を試みたところ、曲線全体がマイナス側による傾向は認められたが、最大エネルギー解放率の生じる方向はき裂が直進する場合とほとんど変わらな

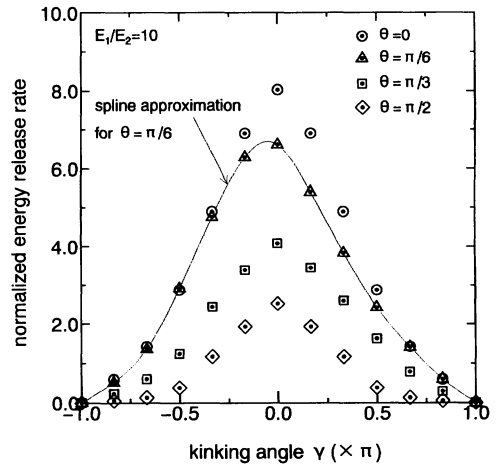


Fig. 11 Energy release rate for a kinking crack in an anisotropic body ( $n=10$ ).

かった。

Fig.11は $n = 10$ の場合の異方性材料のエネルギー解放率とき裂の折れ曲がり角との関係を各異方性軸方向 $\theta$ に対し示した図である。ここでも前述のように縦軸は正規化している。この解析結果から、異方性の度合いが大きくなると最大エネルギー解放率は異なる $\theta$ により得られた平均値で100%より大きい違いを有することがわかる。さらに $\theta = \pi/6$ についてスプライン曲線近似を行ったところ、き裂が直進する場合のエネルギー解放率と最大エネルギー解放率は1%強しか変化しなかったが、折れ曲がり角が $\gamma = -9^\circ$  辺りで最大エネルギー解放率を

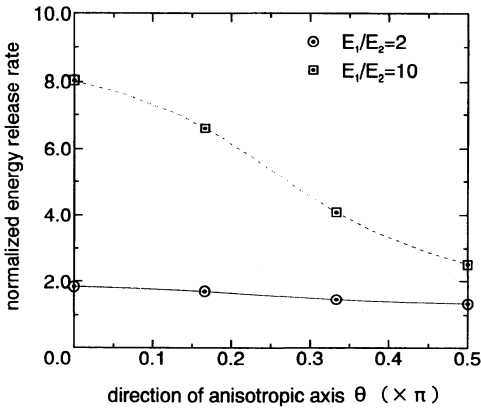
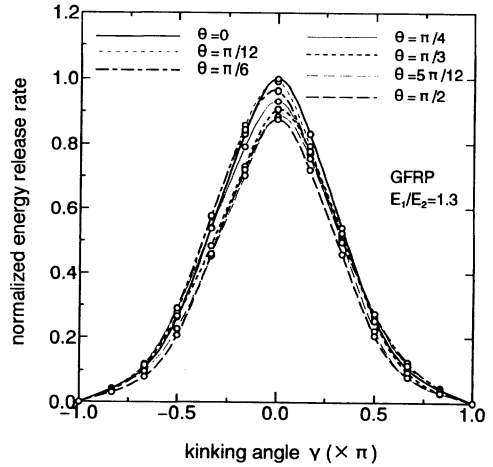


Fig. 12 Relation between the direction of anisotropic axis and the energy release rate for a straight extending crack.

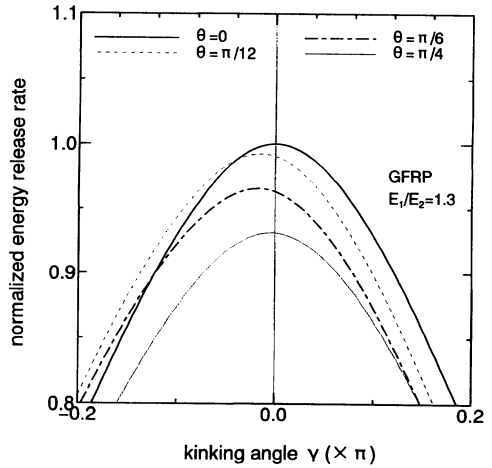
示す結果となった。このことは最大エネルギー解放率の方向をき裂の進展方向と仮定する場合、き裂は異方性の影響を受けて9°程度折れ曲がって進むことを示唆している。しかし、ここでも $\theta = \pi/3$ 以上にすると、折れ曲がりに対する影響は顕著にみられなかった。

以上の異方性の影響を、 $\gamma = 0$ のエネルギー解放率を異方性軸の方向に対して示した図がFig.12である(ここで、前結果から、 $\gamma = 0$ のエネルギー解放率は、異方性軸の方向と無関係に、最大エネルギー解放率にほぼ等しいことに注意)。解析したデータは少ないが、 $\gamma = 0$ のエネルギー解放率は、 $\theta = 0$ で最大(極大)、 $\theta = \pi/2$ で最小(極小)となっており、異方性軸の方向に対する関係は正弦関数的な形状を呈しているようである。

最後に異方性材料の具体例としてガラス繊維強化プラスチック(GFRP,  $E_1=20.58\text{GPa}$ ,  $E_2=15.68\text{GPa}$ ,  $\nu_2=0.07$ ,  $G_2=4.116\text{GPa}$ )の場合を解析した。Fig.13は異方性軸方向 $\theta$ の違いによる、き裂の折れ曲がり角とエネルギー解放率の関係を示した図である。ここで、縦軸は両図ともき裂が直進する場合で異方性軸の方向が $\theta = 0$ のときのエネルギー解放率の解析結果で除して正規化している。Fig.13(a)中、白丸で示した点は数値解析結果で、全異方性軸方向の結果に対してスプライン曲線近似を施している。この材料では異方性の度合いが比較的小さいため( $E_1/E_2 = 1.3$ )、異方性による最大エネルギー解放率の違いは、異なる $\theta$ での解析結果の平均値で13%程度しか現れていない。異方性軸の方向 $\theta$ の小さいうちは曲線はやや左寄りになり、最大エネルギー解放率を示す $\gamma$ も若干、負の方向に現れているようである。このことを詳しくみるためにFig.13(b)に $\theta = 0$ から $\pi/4$ までの結果の拡大図を示した。この図から $\theta = \pi/6$ の場合が、最大エネルギー解放率を示す $\gamma$ が最も負の方向



(a) for the kinking angle  $-\pi \leq \gamma \leq \pi$ .



(b) for the kinking angle near the maximum energy release rate.

Fig. 13 Energy release rate for a kinking crack in GFRP.

にずれていることがわかる。

Fig.14は異方性軸の方向と $\gamma = 0$ の場合のエネルギー解放率の関係を示した図である。ここでもFig.13と同様にエネルギー解放率は正規化されている。この図には、Fig.12で推定したエネルギー解放率の異方性軸の方向に対する関係が正弦関数的な形を呈するということがより明確に現れている。

## 5. 結言と考察

E積分を用いた有限要素解析により、3種類の線形異方弾性体に対してエネルギー解放率の数値解析を行っ

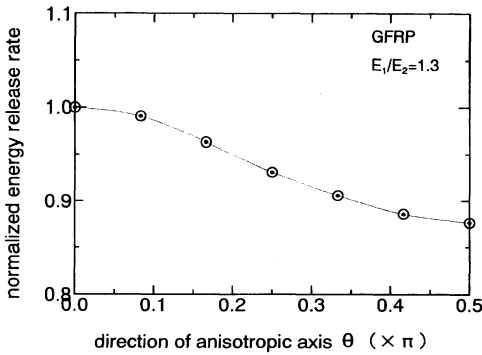


Fig. 14 Relation between the direction of anisotropic axis and the energy release rate for a straight extending crack in GFRP.

た。本論文では、基本的な問題として、無次元板を近似できるようなモデルを扱ったが、板幅がより小さく、自由面がき裂に近いような板であれば、更に異方性の影響は大きくなることが考えられる。また異方性材料の材料定数は多種多様である。すべてに対して今回の解析のような傾向が現れるとは限らないが、有益な資料になると思われる。以下に本研究で得た主要な結論および考察を記す。

(1) 最大エネルギー解放率を示すき裂の折れ曲がり角は、異方性軸の方向と無関係にき裂が直進する方向とほぼ一致していた。このことは等方性材料が斜荷重を受けて混合モードとなる場合とは、同じ混合モードでもかなり状況を異にする<sup>17),24)</sup>。すなわち等方性材料が斜荷重を受けて混合モードになる場合に比べて、材料の異方性による最大エネルギー解放率の生じる折れ曲がり方向の変化はかなり小さい。注意すべきは、最大エネルギー解放率が等方性の場合同様、ほぼ直進する方向であり、異方性の影響をほとんど受けない結果であったが、実存する異方性材料でもき裂進展方向が異方性の影響をほとんど受けずに直進すると結論すべきでない。一般に、モードI荷重下においても、き裂が直進を維持すること自体、不安定的と考えられるから、ほんのわずかでも、最大エネルギー解放率を示す方向が変化すれば、もはや、き裂の直進性は保持されないであろう。さらに、き裂進展方向に関しては、緒言でも述べたように、現実には、破壊強度の異方性をも考慮に入れて、議論する必要があることは言うまでもない。

(2) 異方性のエネルギー解放率への影響は、主き裂に対して異方性軸の方向を変化させるとき、異方性の度合い、すなわち弾性係数比に応じた変化となって現れる。異方性の度合いの大きい場合 ( $n = 10$ ) には最大

エネルギー解放率の差は異方性軸方向に関する平均値で100%以上大きくなる。

(3) き裂が進展する場合のエネルギー解放率の異方性軸の方向に対する関係は、本研究の解析結果では、主異方性軸方向が主き裂面方向に一致する場合を最大とし、主異方性軸方向が主き裂面方向と垂直な場合を最小とする正弦関数的な形状を呈した。

(4) き裂の折れ曲がりに対するエネルギー解放率との関係は、き裂が直進する場合 ( $\gamma = 0$ ) 近傍を最大値とする山形形状を示す。その最大値の変化は異方性の度合いの大きい、異方性軸の方向 $\theta$ が比較的小さい場合(本解析では $\pi/6$ 程度)に顕著に現れる。

本研究では、異方弾性体内のき裂の折れ曲がり時におけるエネルギー解放率の解析を行い、最大エネルギー解放率破壊条件の立場からき裂の折れ曲がり現象を考察した。しかし本研究での解析は異方性解析の一例にすぎない。今後、さらに多くの研究が望まれる。なお、本論文で使用したE積分は異方性材料だけでなく、非均質材料やき裂の干渉の解析にも有効である。また非線形材料への拡張も比較的容易に行える。さらに、式(5)のE積分は、積分経路を物体表面上にとると、物体表面で測定された、表面力ベクトルと変位ベクトル関係が分かれば、構成式は未知であってもEの値が評価できる。したがって、破壊強度を実験で求めるにも便利な公式になっている。以上により、今後の幅広い応用が期待される。

#### 参考文献

- 1) 工藤洋三, 橋本堅一, 佐野修, 中川浩二: 岩石の主軸の決定, 材料, 第38巻, 第426号, pp.209-215, 1989.
- 2) Dale, T. N.: The Commercial granite of New England, *Bull. U. S. Geol. Surv.*, 738, pp.22-103, 1923.
- 3) Osborne, F. F.: Rift, grain, and hardway in some Pre-Cambrian granites, *Quebec. Econ. Geol.*, 30, pp.540-551, 1935.
- 4) 佐野修, 民部雅史, 平野亨, 工藤洋三, 水田義明: 弾性的対称性未知の岩石の弾性係数決定に関する研究, 第40巻, 第449号, pp.228-234, 1991.
- 5) 工藤洋三, 橋本堅一, 佐野修, 中川浩二: 花崗岩の力学的異方性と岩石組織欠陥の分布, 土木学会論文集, 第370号, III-6, pp.189-198, 1986.
- 6) 工藤洋三, 橋本堅一, 佐野修, 中川浩二: 瀬戸内地方の採石場における花崗岩質岩石の異方性, 土木学会論文集, 第382号, III-7, pp.45-53, 1987.
- 7) 橋本堅一, 工藤洋三, 矢富盟祥, 中川浩二: 花崗岩の亀裂の進展特性と破壊靱性異方性: 岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, vol.21, pp.446-450, 1989.
- 8) Bowie, O. L. and Freeze, C. E.: Central crack in plane orthotropic rectangular sheet, *Int. J. Fracture Mechanics*, 8, pp.49-58, 1972.
- 9) Kim, J. W.: A contour integral computation of stress intensity factor in the cracked orthotropic elastic planes, *Eng. Fract. Mech.*, 21, pp.353-341, 1985.
- 10) Chu, S. J. and Hong, C. S.: Application of the  $J_k$  integral to mixed mode crack problems for anisotropic



- composite laminates, *Eng. Fract. Mech.*, 35, pp.1093-1103, 1990.
- 11) Chen, H. C. and Kudva, J. N. : Analysis of cracked anisotropic plate using the hybrid finite element method, *Int. J. Fracture*, 63, pp. 215-228, 1993.
  - 12) Eshelby, J. D. : *The continuum theory of lattice defect*, vol.III, pp.79-144, Academic Press, New York, 1956.
  - 13) Rice, J. R. : A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, *J. Appl. Mech.*, 35, pp.376-386, 1968.
  - 14) Yatomi, C. : The energy release rate and the work done by the surface traction in quasi-static elastic crack growth, *Int. J. Solid Structure*, 19, pp.183-187, 1983.
  - 15) Obata, M., Nemat-Nasser, S. and Goto, Y. : Branched Cracks in Anisotropic Elastic Solids, *ASME J. Appl. Mech.*, 56, pp.858-864, 1989.
  - 16) Gao, H. and Chiu, C : Slightly Curved or Kinked Cracks in Anisotropic Elastic Solids, *Int. J. Solid Structure*, 29, pp.947-972, 1992.
  - 17) Wu, C. H. : Maximum-energy-release rate criterion applied to a tension-compression specimen with crack, *J. Elasticity*, pp.235-237, 1978.
  - 18) Hussain, M. A., Pu S. L. and Underwood, J. : Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II, *Fracture Analysis ASTM STP 560*, pp.2-28, 1974.
  - 19) Yatomi, C. and Ishida, H. : Energy release rate by the path-independent E-integral and J-integral for a non-straight crack, submitted to *Int. J. Fracture*.
  - 20) Sanders, J. L. : On the Griffith-Irwin fracture theory, *J. Appl. Mech.*, 27, pp.352-353, 1960.
  - 21) *Stress intensity factor handbook*, ed. by Y. Murakami et al., vol.1, pp.3-4, Pergamon Press, 1987.
  - 22) Yatomi, C., Hashimoto, K. and Ishida, H. : Finite element analysis of the energy release rate for a kinked crack using the E-integral, *Lecture Note in Num. Appl. Anal.*, 13, pp.61-74, Kinokuniya, 1994.
  - 23) S. A. アムバルツミヤン : 異方性板の理論, 神谷紀生訳, 森北出版, 1975.
  - 24) 橋本堅一, 矢富盟祥, 石田 啓 : E 積分によるき裂折れ曲がり時におけるエネルギー解放率の数値解析, 破壊力学シンポジウム講演論文集, 第 7 巻 pp.280-284, 1993.

(1994. 6. 3 受付)

## NUMERICAL ANALYSIS OF THE ENERGY RELEASE RATE AT THE ONSET OF CRACK KINKING IN AN ANISOTROPIC ELASTIC BODY USING THE E-INTEGRAL

Ken-ichi HASHIMOTO, Chikayoshi YATOMI and Hajime ISHIDA

We compute the energy release rate at the onset of crack kinking in an anisotropic elastic body by using the E-integral, which is path-independent even for such cases. The model is an infinite plate with a center crack under the mode I loading in three types of transversely isotropic body.

As a result, we find that, in the anisotropic elastic bodies, the kinking angle for the maximum energy release rate is nearly equal to zero as in an isotropic body ; however, the magnitude of the energy release rate is much dependent on the direction of anisotropic axes.