

## $E$ 積分による斜向荷重下でのき裂折れ曲がり瞬間時における エネルギー解放率の有限要素解析\*

矢富盟祥\*<sup>1</sup>, 橋本堅一\*<sup>2</sup>, 石田 啓\*<sup>3</sup>

### Finite-Element Analysis for Energy Release Rate at the Onset of Crack Kinking under Inclined Load Using the $E$ -Integral

Chikayoshi YATOMI, Ken-ich HASHIMOTO and Hajime ISHIDA

In this paper, we first discuss the several known methods to obtain the energy release rate by numerical analysis. After detailed discussions on the path-independent  $E$ -integral, we compute the energy release rate at the onset of crack kinking in an infinite medium subjected to a remote inclined load under the anti-plane shear and the plane stress condition; for such cases, the well-known  $J$ -integral is not very useful in obtaining the energy release rate with a high accuracy. Our numerical results agree well with the exact solution for the anti-plane shear condition and also agree well with the published approximate solutions for the plane stress condition.

**Key Words:** Fracture Mechanics, Finite-Element Method, Crack Propagation,  $E$ -Integral, Path-Independent Integral, Energy Release Rate, Crack Kinking, Combined Mode Loading

#### 1. 緒言

1921年にGriffithによって発表された破壊理論<sup>(1)</sup>がき裂の不安定成長にエネルギー解放率の概念を適用した最初の研究であると考えられている。1957年にIrwinにより提唱された応力拡大係数の考え方<sup>(2)</sup>がエネルギー解放率と一意的な関係にあることが証明されてから線形破壊力学が急速に発展してきた。加えて、1967年頃EshelbyおよびRiceによって提案された<sup>(3)(4)</sup>経路独立な積分、いわゆる $J$ 積分により任意の均質非線形超弾性体の場合でもエネルギー解放率が求められることがわかり、弾塑性体などの非線形破壊力学の研究も活発に行われるようになった。最近では金属材料の他、岩盤、岩石、コンクリート、土質や種々の複合材料などの分野でも破壊力学の重要性が認識されつつあり、その研究報告数も年々増加している。しかしそれらの材料は非線形性のみならず、非均質性が著しく、複数のき裂が干渉し、き裂の進展挙動も非常に複雑になる。その場合、き裂の折れ曲がり現象をエネルギー解放率の概念で議論しようとする、任意方向の折れ曲がり瞬間時の

エネルギー解放率を求める必要が生じる。この時、原則的には、 $J$ 積分型の経路独立積分では、き裂が直進して進む、すなわち主き裂と同方向に進む瞬間時のエネルギー解放率しか求まらず、非均質性、応力ないしひずみの不連続性を有する界面、複数の近接き裂などが存在すると、その経路独立性の数値解法上の有用性が失われ、主き裂と同方向に進む瞬間時のエネルギー解放率に限っても、精度よく求めることは不利となる。

一方、1983年に著者の一人が報告した経路独立な $E$ 積分<sup>(5)(6)</sup>は、準静的なき裂進展であるかぎり、 $J$ 積分と異なり、その積分経路にき裂面や、応力ないしひずみの不連続性を持つ界面を含めることなく、非均質材料中の非直線的なき裂の場合でも、またその経路内に複数のき裂先端を含んでいても、経路独立な積分になり、特定のき裂先端の任意方向折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を初歩的な有限要素法によりかなり良い精度で求めることができ、上記のような複雑な物質、き裂進展挙動への幅広い応用が可能になる。

破壊の進行方向を議論するとき、き裂進展前の混合モード状態での応力拡大係数により考察されることが多い。そのためモード分離の研究も数多い<sup>(7)(8)(9)</sup>。しかし、物質が非線形になると、従来の応力拡大係数による議論は困難となり、今のところ、非線形物質でも

\* 原稿受付 1994年12月9日。

\*<sup>1</sup> 正員、金沢大学工学部 (☎920 金沢市小立野2-40-20)。\*<sup>2</sup> 正員、徳山工業高等専門学校 (☎745 徳山市久米高城3538)。\*<sup>3</sup> 金沢大学工学部。

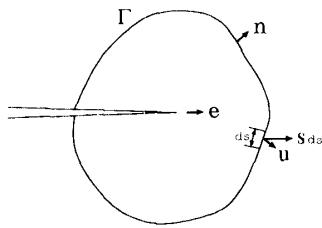


図1 き裂先端を含む積分経路.

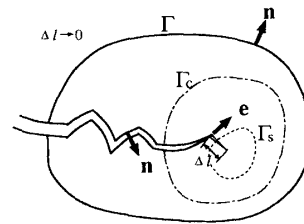


図2 ジグザグき裂先端を含む積分経路.

有力なパラメータの1つとして考えられているのがエネルギー解放率である。

本研究では以上のことを背景に、はじめに、超弾性体を準静的に進展するき裂のエネルギー解放率を求める既存の手法とE積分による方法を、特にその両者の違いを明確にすることに議論を限定し概説する。次にE積分の有効性を、まず基本的問題で検証するため、これまでの経路独立型の積分では、数値解析により精度よく求めることが困難であった、斜荷重下でのき裂の折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率の有限要素解析を行った。斜荷重下でのき裂折れ曲がりの問題は材料内を進展するき裂経路がジグザグであったり、分岐現象などを解明する上でも基礎的かつ重要な問題である。特に、線形弾性体に限られているが、混合モードの折れ曲がりについては1980年前後には多くの理論、数値解析による報告がある。本研究ではそれらの報告と比較することによりE積分による解析方法の有効性を検証している。

2. エネルギー解放率の数値解析とE積分

ここでは超弾性体(ひずみエネルギーをもつ弾性体)内を準静的に進展するき裂のエネルギー解放率を有限要素法を用いて解析する既存の手法について触れ、特にE積分による手法との違いを明確にする目的でそれらの長所、短所についてを概説する。そして、最後にE積分の公式について簡単に述べ、その有用性を詳述する。なお、議論を簡単にするため本章ではすべて平面問題(計算は平面応力解析)として扱う。

2.1 J積分法 Ricc<sup>(4)</sup>およびEshelby<sup>(3)</sup>らによるJ積分は均質な超弾性体において経路独立な積分によりエネルギー解放率Gを与える。き裂が準静的に進展する場合のJ積分は図1に示す進展き裂の一端を囲む、進展き裂面を含まない経路Γに対して次式で与えられる。

$$J = \int_{\Gamma} (w \cdot n - s \cdot \nabla u e) ds \dots\dots\dots (2.1)$$

ここでw, s, uはそれぞれ、ひずみエネルギー密度、応力ベクトル、変位ベクトルであり、e, nはそれぞれ、き裂先端の直進する方向の単位ベクトル、Γ上の外向き単位法線ベクトルである。J積分法は、進展き裂先端周り

に積分経路を設定して、式(2.1)を数値積分する方法である。J積分法の有利な点は、解析するモデルがき裂進展直前のモデルのみでよいことや、積分経路独立性を利用して積分経路を複数個考えることにより、解の検証ができることが挙げられる。当然、経路独立性が示されても、それが理論解であるとはいえないが、逆に経路独立性が保たれていなければ、それが失われた部分は誤差を必ず含んでいることになる。したがって適当な閉経路を考えることにより、誤差の発生場所の検証などもできる。このことが種々の経路独立積分が多く考案されている理由の一つでもある。しかしJ積分は、均質な場合に限って経路独立であり、また原則的に、き裂が直進して進む(主き裂方向に進む)瞬間時のエネルギー解放率しか得られない。さらにJ積分は、き裂が非直線的であると、その非直線部分のき裂面上でe·n ≠ 0であるから、先に述べたような境界からなる経路では経路独立とはならない。経路独立積分とするためには積分経路に進展き裂両面を含める必要がある(文献<sup>(10)</sup>では、進展き裂先端を含めた経路での可積分性の証明が行われている。なおT\*積分の特別な場合であるJ<sub>k</sub>積分<sup>(11)</sup>も進展き裂面先端を含めた経路で定義されているが、その場合コーシーの主値としての積分値の有界性の議論は文献<sup>(12)</sup>を参照)。しかしながら、進展き裂面を積分経路に含めることにより経路独立積分としてジグザグな進展き裂に適用できても、進展き裂の折れ曲がり瞬間時におけるエネルギー解放率を、有限要素法で求めることは非常に困難である。もしJ積分を用いてき裂の折れ曲がり瞬間時におけるエネルギー解放率を求めようとする、最終的に折れ曲がった微小き裂(図2中の長さΔlの部分)の先端を含む積分経路(たとえば、図2中の、き裂面を含まないが、主き裂と交差することがないΓ<sub>s</sub>、または微小き裂先端までの全き裂面を含めたΓ<sub>c</sub>)をとって解析する必要があるが、その折れ曲がった微小き裂長さを複数とった後、極限操作でその長さが零になるところを外挿して求める必要があり、き裂先端近傍では、物理量の数値誤差が大きいことなども考慮すると数値解析上極めて不利となる。一方、J積分を拡張して、動的な場合、

かつ任意物質に対しても経路独立な  $T^*$  積分<sup>(13)</sup> や  $J$  積分<sup>(14)</sup> が提案されているが、本論文における均質超弾性体内を準静的に進展する場合は、両者とも  $J$  積分と同型になり、応力ないしひずみの不連続が生じる介在面をもつ場合も  $J$  積分と同様な特性を持つため、以下の議論は  $J$  積分をもって代表する。

2.2 全エネルギー法 Irwin<sup>(2)</sup>によればエネルギー解放率は、き裂が単位長さ(3次元では単位面積)だけ増加する際に解放されるポテンシャルエネルギーの変化率  $G$  として定義されている。したがって、この時エネルギー解放率  $G$  は、有限要素解析における1節点分のき裂長さの変化  $\delta\ell$  をもつ2つのモデルに対して次式で差分表示される。

$$\left. \begin{aligned} G &\approx -\frac{W(\ell+\delta\ell)-W(\ell)}{\delta\ell} \text{ (変位一定)} \\ G &\approx \frac{W(\ell+\delta\ell)-W(\ell)}{\delta\ell} \text{ (外力一定)} \end{aligned} \right\} \dots (2.2)$$

ここで  $W(\ell+\delta\ell)$  はエネルギー解放率を求めたいモデルに対して1節点解放してき裂を微小節点間隔  $\delta\ell$  進めたモデルのもつひずみエネルギーで、 $W(\ell)$  はき裂進展前のモデルのもつひずみエネルギーである。なお式(2.2)は任意の非均質非線形超弾性体についても有効であることは、後で述べる  $E$  積分の定義式(2.5)または式(2.7)により容易に証明できる。

全エネルギー法はき裂長の異なる2つのモデルを解析する必要があるという不利な点を有すが、比較的粗いメッシュ分割でも高い精度が得られるという利点をもっている<sup>(15)</sup>。また任意方向のき裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を解析できる。しかし、境界条件が荷重一定または変位一定の場合に限られるうえに、 $J$  積分のような経路独立性を利用した誤差の検証が行えない欠点を有している。

2.3 仮想き裂進展法 仮想き裂進展法は剛性変化法とも呼ばれ、ひずみエネルギーの変化にもとづく方法であるので、全エネルギー法の一つとして分類されることもある。全エネルギー法との大きな違いは、2つのモデルの違いを1節点分のき裂の進展としないで、き裂の先端を微小仮想量移動させる点である。そしてこの操作によって変化する剛性はき裂先端を節点の一部にもつ要素だけとし、その剛性の変化率のみを用いることによりエネルギー解放率を解析するものである。したがって、全エネルギー法に比較すれば解析モデルが1つになるので有利である。欠点としては、差分型の場合、結果がき裂の仮想移動量に敏感であるため、どの範囲で有効であるかを常に吟味しなければならないこと(この点を改良したのが微分型である<sup>(8)</sup>) や、き

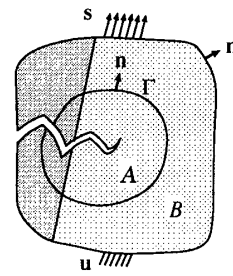


図3 非均質材料内を準静的に進むき裂。

裂の移動を主き裂と同方向にとらないと前の状態からの新しいき裂面が得られないため、 $J$  積分法と同様、厳密にはき裂が直進する場合のエネルギー解放率しか得られない点が挙げられる。Hellen<sup>(16)</sup>はき裂先端が含まれる要素内のき裂を仮想剛体回転させることにより、き裂が折れ曲がる場合を考察し、限られたき裂の方向に対しては信頼性のあるエネルギー解放率を与えている。しかし、この方法では、負のエネルギー解放率になるき裂折れ曲がり角があるなど、その適用性には非常な注意を要する。

2.4 E 積分法 図3に示すように有限変形する2次元非均質、非線形超弾性体  $B$  内を準静的に進展するき裂を考える。ただし、図3のように、非均質性が応力ないしひずみの不連続性を有する界面を成す場合は、その基準系での界面は時間的に移動しないとする<sup>(10)(17)</sup>。いま、き裂の一先端を含む基準系に固定された正則な閉領域を  $A$ 、その境界を  $\Gamma$  とする。 $B$  内のき裂長さを  $\ell$  とし、き裂は  $\beta(0 \leq \beta \leq \alpha)$  をパラメータとした物体  $B$  の境界上で与えられた表面応力ベクトル  $s$ 、あるいは変位ベクトル  $u$  により進展しているとする。たとえば、単軸集中荷重  $P$  が荷重制御で単調増加するように与えられた場合、 $\beta = P$  とおける。

そのとき物体内では、第1種の Piola-Kirchhoff 応力  $S(s = S_n; n$  は外向き単位法線ベクトル)、変位  $u$ 、変位勾配  $H = \nabla u$ 、ひずみエネルギー密度  $w$  などの場の量  $\varphi(X, \ell, \beta)$  がき裂を除いた基準系での位置  $X$  で各  $\ell, \alpha$  に対して定義される。物体が非均質な超弾性体とすると

$$S = \frac{\partial w(H, X)}{\partial H} \dots \dots \dots (2.3)$$

である。物体力のない準静的な場合を考えると、平衡式

$$\text{Div} S = 0 \dots \dots \dots (2.4)$$

がき裂を除いた箇所でも成立している。

ここでは、エネルギー解放率を、き裂進展中におけるき裂の一先端を囲む基準系に固定された正則な閉領域  $A$  内のエネルギー変化率の不釣り合い量:

$$E(\ell, \alpha) = \int_{\Gamma} s \cdot \frac{\partial u}{\partial \ell} ds - \frac{\partial}{\partial \ell} \int_A w da \dots \dots \dots (2.5)$$

として定義する<sup>(5)</sup>。ここでき裂が折れ曲がる瞬間時のエネルギー解放率の場合は、 $\ell$ による偏微分は、右微分係数で定義する。

$E$ の値は領域 $A$ が進展き裂先端を含む限りその形、大きさによらないことは明かである。

式(2.5)を直接数値積分で評価すると、き裂先端周辺領域の $w$ に関する面積分を必要とするため、精度や計算時間の点でも、また扱い易さの点でも不利である。したがって、この式を経路積分に変形することを考える。式(2.5)を経路積分に変形するとき、発散定理がうまく使えるような $(\ell, \beta)$ 空間での積分でひずみエネルギー密度 $w$ を定義する必要がある。すなわち

$$w(\ell, \alpha) = \int_0^\alpha S(\ell, \beta) \cdot \frac{\partial H(\ell, \beta)}{\partial \beta} d\beta \dots\dots\dots (2.6)$$

とすればよいことがわかる。ここで記号が複雑になるのをさけるため、 $\varphi(X, \ell, \beta)$ を単に $\varphi(\ell, \beta)$ と記した。そのとき平衡式(2.4)および発散定理を使えば

$$\int_A w da = \int_A \int_0^\alpha S \cdot \frac{\partial H}{\partial \beta} d\beta da = \int_\Gamma \int_0^\alpha s \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} d\beta ds$$

が成立し、これを式(2.5)に代入すると

$$E(\ell, \alpha) = \int_\Gamma \int_0^\alpha \left( \frac{\partial s}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \ell} - \frac{\partial s}{\partial \ell} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) d\beta ds \dots\dots\dots (2.7)$$

が得られる。上式が非均質非線形物質にも適用可能な、経路独立なエネルギー解放率を求める積分公式でE積分と言われる。E積分は周知のJ積分とは異なり、図3の $\Gamma$ のように積分経路に進展き裂面を含まない場合でも、非均質物質中を進展するき裂、また疲労き裂等にしばしばみられる非直線的なき裂に対しても経路独立であることは式(2.5)の定義自体が領域 $A$ によらないこと、また式(2.7)を導く際、き裂の直線性は仮定していないことから明らかである。さらに、J積分では、前述したように、原理的には主き裂と同方向にき裂が進展した瞬間時の場合のエネルギー解放率しか求められないが、E積分では、任意の方向に進展した瞬間時の場合でも経路独立な積分により求めることができる。したがってそのような、き裂折れ曲がり瞬間時における、数値解析において、最も誤差が大きくなる特異点近傍から離れて積分すればよく、数値解析上有利である。

E積分法とは、式(2.7)をJ積分と同じように経路積分する方法である。式(2.7)で積分経路を物体境界にとり外力一定境界、または変位一定境界の場合は前に述べた全エネルギー法と理論上等価である。したがってE積分法は、種々の外力と変位が独立でないような種々の複雑な境界条件の場合における経路独立積分の形に全エネルギー法を一般化したものであるといえる。以上のことによりE積分は全エネルギー法と同様、複数のモデルを解析するという不利な点を有すが、経路独立積分であるため2.1で詳述した意味での解の検証が可

能で、複雑な形状、載荷系をもつモデルでも経路独立性により誤差の少ない経路の模索ができ全エネルギー法に比べて解析における優位性を有す。

また、岩石や複合材料などによくみられるような、進展き裂先端近傍に、異材、介在物あるいは空隙との界面上に、応力ないしひずみの不連続性をもつ場合、J積分では積分経路内にそれらの不連続面が含まれると、エネルギー解放率を求めるためには、不連続面での積分補正が必要になる<sup>(18)</sup>。さらに、J積分では、その積分経路内に、複数のき裂先端を含むと、その値は、他の静止き裂先端の特異性による値も合計されてしまうので、特定の進展き裂先端からのエネルギー解放率を求めることは困難となる。

一方、E積分は、その積分経路が、そのような不連続面を横切っても、また、複数の静止き裂先端を含んでいても、経路独立性は保たれ、何ら補正することなく、特定のき裂先端からのエネルギー解放率を求めることができる。例えば、図4中の経路1,2,3,4の場合のJ値はすべて異なり、経路1のみが、き裂右端が直進した時のエネルギー解放率となり、経路4では、き裂の左端の特異性による値もJ値に合計されてしまうが、E値は全経路とも理論上すべて同一で、き裂右端が任意方向に進展した瞬間時のエネルギー解放率を得ることができる。なお、このような界面を有するモデルへの適用については別に報告する<sup>(20)</sup>。

さらに、式(2.1)で定義されたJ積分を直接評価するには、経路上のひずみエネルギー密度を求める必要があるが、E積分は、経路上の応力ベクトルと変位ベクトルのみによって評価できる。したがって、積分経路を物体境界とれば、超弾性体と仮定される限り、物体の構成式が未知であっても、与えられた境界上での応力ベクトルと変位ベクトルの関係が得られればE積分は評価できるので、複雑な境界条件の場合でも、限界エネルギー解放率( $g_c$ )を実験により求める際にも、便利な表現式となっている。その特別な場合が周知の一点荷重-荷重点変位関係によるJ積分評価法と呼ばれている<sup>(5)(6)</sup>。

### 3. 解析モデルと解析方法

本研究では最初に、図5(a)に示すような理論解<sup>(21)</sup>のある、無限遠に、き裂と垂直な方向に一樣せん断応力をもつ場合、および載荷軸が斜向した場合の一例の面外せん断型(モードIII)のき裂折れ曲がり瞬間時におけるエネルギー解放率を解析した。そして理論解<sup>(21)</sup>と比較し、今回用いた方法の精度、適用性を検討した。次に2次元平面問題として、まず図5(b)に示す無限遠に

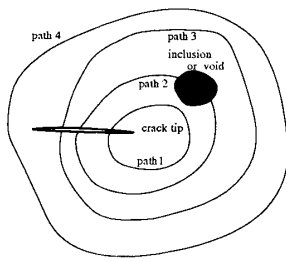


図4 き裂先端近傍に介在物がある場合の積分経路.

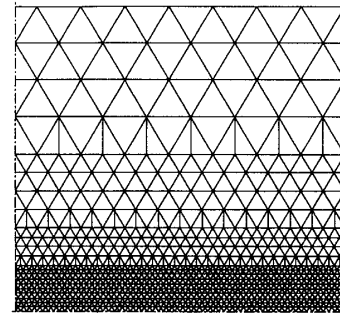


図6 無限板の有限要素モデル(1/4領域).

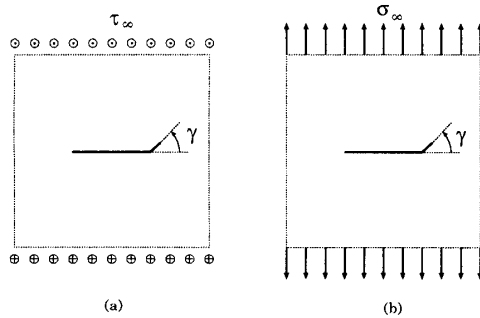


図5 解析モデル. (a) 面外せん断モデル. (b) 平面応力モデル.

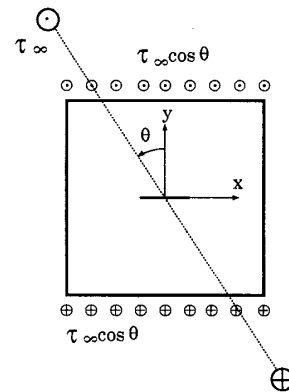


図7 面外せん断斜荷重状態.

進展き裂と垂直な方向に一樣引張応力を受ける無限板を考えた. そして最後に, 進展き裂経路がジグザグであったり, 分岐現象などを解明する上でも基礎的かつ重要な問題である, 無限遠に存在する一樣応力の荷重軸が斜向した場合(すなわち, モードIとモードIIの混合モードとなる)の一例について解析した. これらの無限板を近似した有限要素モデルの1/4領域を図6に示す. き裂はモデル中央に存在し, き裂長さ $2a=1.2\text{cm}$ に対して横寸法 $12\text{cm}$ , 縦寸法 $11.43\text{cm}$ で無限板を近似している. このモデルを中央にき裂を有する板の一樣引張の解析解<sup>(22)</sup>を用いて無限板の理論解と( $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ )と応力拡大係数と比較したところ0.4%の違いを有していた. 要素は正三角形を基本とした要素分割がされており要素数は6758である. 節点数についてはE積分を数値計算に適用する場合, その式の性質上, 対象となる主き裂(基本モデル)に対してき裂を微小変化させたモデルも解析し, 基本モデルとの差分型にする必要がある. そのため解析では1節点分だけき裂を進展させたモデルも考え, その節点は3451とし, 基本モデルの節点数は3450としている. 進展長さは $\Delta a$ は $1\text{mm}$ である. また無限遠の一樣応力の荷重軸を斜向させたモデルについては有限要素分割自体は変えないで, 与えられた有限要素モデルの境界節点に図7および図8に示すような境界応力を荷重させた. 有限要素法を用いてき裂解析を精度良く行なう場合, アイソパラメトリック要素, 特異要素を用いての解析が一般的となってい

る. しかし経路独立積分の特徴としてき裂近傍の解析精度は, それほど厳密に要求されないことや, 解析全体の扱いの簡便性などを考慮して, 最も容易に解析できる三角形一定ひずみ要素を用いた. 積分経路は要素辺上に設定しており, 5個の積分経路を使用した. 用いた積分経路を図9に示す. この積分経路は, すべてモデル中央部の細かい正三角形要素の分割域内に存在し, 正六角形の経路となっている.

式(2.7)のE積分によるエネルギー解放率の計算は微小変形線形弾性体の仮定のもとで得られる表示<sup>(19)(20)</sup>を次式のような2点差分型に変換して近似したものをを用いた.

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ s_i(\ell) \cdot \frac{u_i(\ell + \Delta\ell) - u_i(\ell)}{\Delta\ell} - \frac{s_i(\ell + \Delta\ell) - s_i(\ell)}{\Delta\ell} \cdot u_i(\ell) \right\} \Delta s \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

ここで $n$ は経路における要素辺の数,  $s_i$ は各要素辺における表面応力ベクトル,  $\Delta s$ は各要素辺の長さ,  $u_i$ は各要素辺上における変位ベクトル, そして $\Delta\ell$ は基本モデルとき裂進展モデルのき裂長さの差である. また $(\ell)$ および $(\ell + \Delta\ell)$ は, それぞれ基本モデルとき裂進展モデルを表している. 各辺上の応力は各辺内外の要素応力を平均することにより求めている. 各要素辺上に

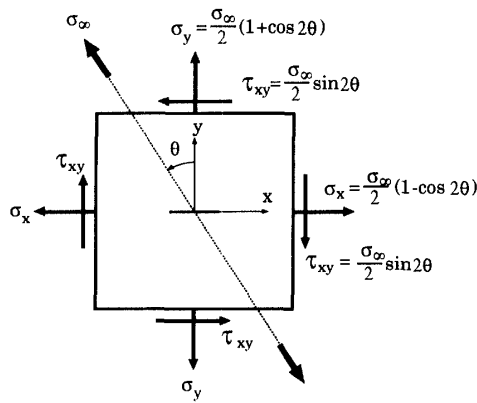


図8 斜向一様引張荷重状態.

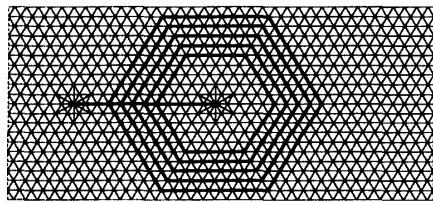


図9 積分経路.

おける変位については要素辺端の節点変位を平均して求めている。また、き裂進展長さ $\Delta l$ の影響を調べるため、き裂先端付近の要素が図9で与えた1/4の大きさ(要素辺長さは1/2で、 $\Delta l$ も1/2になる)の場合の解析をも試みた。その結果、図9に示したモデルとほぼ同じ解析結果が得られることを確認している。E積分法は全エネルギー法の一般化したものであることから、仮想き裂進展法における仮想移動量のように敏感でないのは当然であろう。

一方、今後の研究として、非線形問題へE積分を応用することを考慮し、直接、式(2.7)の荷重積分( $\beta$ の積分)に、種々の数値解法を試み、2点差分近似式(3.1)による結果とほとんど変わらないことを確かめた。また、 $l$ による右微分項を3点差分する近似も試みたが、今回の例では精度は2点差分とほとんど変わらなかった。

なお、折れ曲がり角は、き裂先端の要素分割を正三角形を二分した要素で構成させているため(図9)、便宜上、主き裂面からの折れ曲がり角 $\gamma$ を $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $150^\circ$ として計6方向に進展する場合を解析した。

#### 4. 解析結果

(近似)無限遠に一様面外せん断応力(モードIII)を受ける板において、き裂が直進する( $\gamma=0$ )場合のエネルギー解放率の経路の違いによる誤差を図10に示

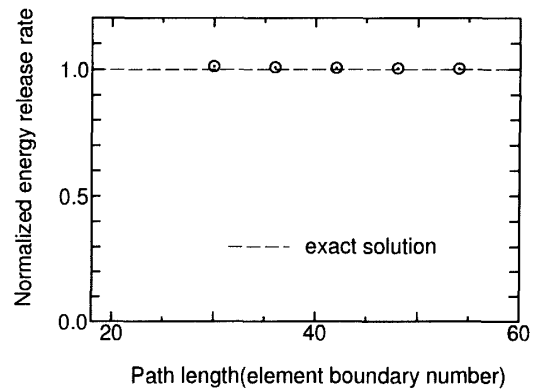


図10 E積分法における経路誤差(面外せん断).

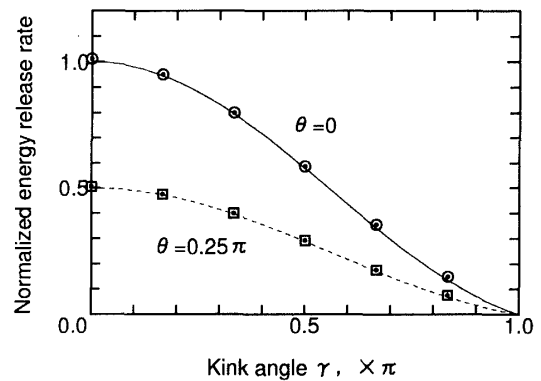


図11 面外せん断モデルの解析結果.

す。ここで縦軸は数値解析結果を理論解で除して正規化している。横軸は、5個の正六角形の積分経路に対して経路上の要素辺の長さは一定であるため、経路長さを経路上の有限要素の辺数で代表している。また破線は理論解を表している。この図より積分経路を大きくとるにしたがって理論解に近づいていることがわかる。そして一番外枠での誤差は1%程度であった。き裂が直進する場合の平面問題については、さらに高い精度で解析結果が得られている。き裂が折れ曲がる場合も(モードIIIの場合)、ほぼ同様な結果が得られており、積分経路をき裂先端から離して考えれば精度的には、このような方法、モデルで十分といえる。したがって以下、いちばん外枠の積分経路の解析結果をもって議論をする。

モードIIIの結果を折れ曲がり角に対してまとめたものが図11である。図中○でプロットしたものが無限遠での一様せん断応力の荷重軸がき裂面に垂直な方向な場合(荷重軸が斜向しない場合)で、 $\theta$ が荷重軸がき裂面に対して $0.25\pi$ の場合である。縦軸は、荷重軸がき裂面に対して垂直で、き裂が直進する場合の理論解で除した正規化されたエネルギー解放率である。横軸は折れ曲がりき裂のき裂面に対してなす角度 $\gamma$ である。

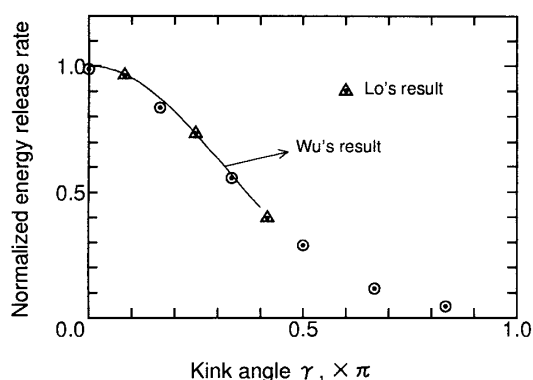


図12 平面応力状態の解析結果.

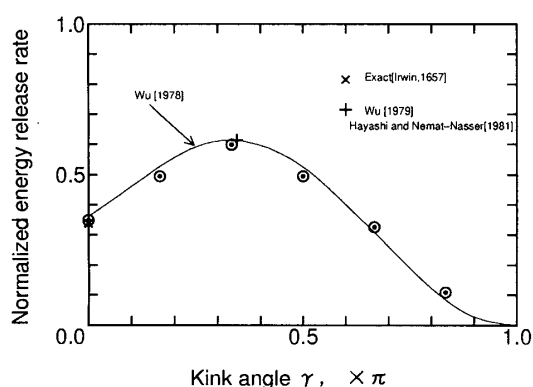


図13 斜向荷重の場合の解析結果.

また、図には理論解をそれぞれ細線の実線および破線で加えている。この図からわかるように折れ曲がり角の大小に関わらず、本解析結果は理論解と精度よく一致している。

2次元平面問題の荷重軸が斜向しない場合の解析結果を図12に示す。図11と同様○が本解析結果である。また図中にはLoの解析結果<sup>(23)</sup> (△)と、Wuの解析値<sup>(24)</sup>を実線で結んだものを載せている。この問題は(厳密な)理論解が存在しないが、本解析結果は、LoおよびWuの結果とよく一致している。

載荷軸がき裂面に垂直な方向に対して $\theta=0.3\pi$ の場合の混合モード下の解析を行った一例を図13に示す。縦軸は前の例と同様、載荷軸がき裂面に垂直な、き裂が直進する場合の理論解で除したもので、横軸はき裂面方向と折れ曲がりき裂のなす角度 $\gamma$ である。図中Wu<sup>(25)</sup>とHayashi and Nemat-Nasser<sup>(26)</sup>が求めた最大エネルギー解放率の大きさと、その時のき裂の折れ曲がり方向(+ )および直進する場合の理論解(x)を載せている。全体の曲線を表す傾向はWuの解析結果<sup>(27)</sup>と非常によく似ており、最大エネルギー解放率およびその時の折れ曲がり角はWuやHayashi and Nemat-Nasserの解析結果と、またき裂が直進する場合は、理論値<sup>(2)</sup>とかなりの精度で

一致している。

## 5. 結言

本研究では有限要素法を用いてエネルギー解放率を求める一つの方法として経路独立なE積分の(斜向荷重下での)折れ曲がりき裂への応用を試みた。この問題を周知のJ積分で数値解析しようとする場合、数値誤差の大きい、折れ曲がりき裂先端の周りに積分経路を設けて、折れ曲がりき裂の長さを変えて複数のモデル解析したのち、それらの解を外挿して求める必要があるため、精度のよい解析は困難になる。一方、E積分では主き裂とき裂を微小進展させたモデルの2つについて解析する必要があるが、き裂の進展させる方向を変えるだけで容易に解析でき、経路独立性を利用して解の検証が可能となる。解析誤差についても4章に示したように特異要素や2次要素を使用しなくてもかなり良い精度で結果が得られた。

ここで紹介したE積分による手法は、最近、多くみられる非均質の著しい複合材料内の界面き裂、介在物がある場合や、複数のき裂の干渉の問題等にも容易に応用できる。また、2章に示したように荷重積分を行えば(有限変形する)非線形材料にも適用可能である。今後、幅広い応用が期待される。

## 謝 辞

本論文の作成に当たり、J積分に関しては、東京工業大学の青木繁氏および岸本喜久男氏、T積分に関しては、神戸商船大学の西岡俊久氏に、筆者らの解釈が適当であるかどうかご意見を伺った。記して謝意を表す。

## 文 献

- (1) A.A. Griffith, Phil. Trans. Roy. Soc. of London, A221, (1921), 163.
- (2) G.R. Irwin, J. Appl. Mech., 24, (1957), 361.
- (3) J.D. Eshelby, "Solid State Physics", 3 (edi. by F. Seitz and D. Turnbull)(1956) Academic Press.
- (4) J.R. Rice, J. Appl. Mech., 35, (1968), 379.
- (5) C. Yatomi, Int. J. Solids Structure, 19, (1983), 183.
- (6) 矢富盟祥, 材料, 5, (1986), 767.
- (7) 石川晴雄, 機論, 46-401, A (1980), 67.
- (8) 石川晴雄, 中野禅, 結城良治, 鄭南龍, 機論, 55-512, A (1989), 937.
- (9) Ishikawa H., Int. J. Fracture, 16, (1980), R243.
- (10) C. Yatomi and H. Ishida, submitted to Int. J. Fracture.
- (11) 西岡俊久, 機論, 54-500, A (1988), 769.
- (12) Nishioka, T. JSME, 37-4, A (1994), 313.
- (13) S.N. Atluri, T. Nishioka and M. Nakagaki, Eng. Fract. Mech., 20-2, (1984), 209.
- (14) 岸本喜久雄, 青木繁, 坂田勝, 機論, 46-410, A (1980), 1049.

- (15) 白鳥正樹, 三好俊郎, 松下久雄: 数値破壊力学, (1980), 66, 実教出版.
- (16) T.K. Hellen, Int. J. Num. Methods of Engng., **9**, (1975), 187.
- (17) C. Yatomi and N. Nishimura, J. Elasticity, **13**, (1983), 311.
- (18) 例えば西岡俊久, 小林豊, J. S. Epstein, 機論, **59**-561, A (1993), 1319.
- (19) C. Yatomi, K. Hashimoto and H. Ishida, Lecture Notes in Num. Appl. Anal., **13**, (1994), 61.
- (20) 橋本堅一, 矢富盟祥, 石田啓, 機論, **61**-592, A (1995), 2529.
- (21) G. C. Sih, J. Appl. Mech., **23**, (1960), 51.
- (22) 例えば C. E. Feddersen, ASTM STP 410, (1966), 1966.
- (23) K. K. Lo, J. Appl. Mech., **45**, (1978), 797.
- (24) C. H. Wu, Int. J. Solids Structure, **15**, (1979), 561.
- (25) C. H. Wu, J. Appl. Mech., **45**, (1978), 553.
- (26) K. Hayashi and S. Nemat-Nasser, J. Appl. Mech., **48**, (1981), 521.
- (27) C. H. Wu, J. Elasticity, **8**, (1978), 235.
-