

片側き裂先端近傍に平行干渉き裂が存在する場合の
エネルギー解放率によるき裂進展挙動の考察*阿部孝弘^{*1}, 橋本堅一^{*2}, 矢富盟祥^{*3}On the Energy Release Rate of a Crack
with a Parallel Interacting Crack

Takahiro ABE, Ken-ichi HASHIMOTO and Chikayoshi YATOMI

In this paper, we investigate crack extension behaviors for a linear elastic body with a parallel interacting crack at the neighborhood of the main crack tip. We compute the energy release rate for all the crack tips at the onset of a main crack kinking: E -integral is path independent even for a path containing a kinking crack tip and/or the interacting crack tips; however, for such cases, the well-known J -integral is not path independent. As a result, assuming the isotropy of fracture toughness of the body and judging from the criterion based on the energy release rate, we find that there exist the relative positions of the interacting crack which promote or interrupt the straight extension of the main crack and which make the main crack jump to an extension of an interacting crack.

Key Words: Fracture Mechanics, Finite Element Method, Fracture Toughness, J -integral, Numerical Analysis, Energy Release Rate, E -integral, Crack Interaction

1. 緒言

物質内に複数のき裂が存在する場合、き裂の長さや、き裂相互の位置関係によって、き裂の進展を助長させたり、あるいは逆に抑制したりするような相互干渉状態を呈する。また、き裂の位置関係によっては、折れ曲がり進展する場合や、他のき裂先端への飛び移り進展する場合も生じる。例えば、三点曲げを受けるコンクリートや岩石の端面から成長するき裂の周囲には、小さな多数のき裂が発生し、その進展挙動は非常に複雑なものとなる。

本研究では、このような物質内に複数のき裂が存在する場合に、それらの相互干渉の影響を把握するための基礎的研究として、一様引張を受ける均質弾性体帯板中央にある片側き裂(以後主き裂と呼ぶ)先端近傍に、それと平行な主き裂より短いき裂(以後干渉き裂と呼ぶ)が1本ある場合を想定し、破壊靱性の等方性を仮定し、き裂の進展がエネルギー解放率による破壊規準に従うものとして複数き裂の進展挙動、すなわち、あるき裂の位置関係において、どのき裂先端が、どの方向に進展するかを考察する。

エネルギー解放率は E 積分⁽¹⁾⁽²⁾による有限要素解析か

ら求めた。 E 積分によると、周知の J 積分と異なり、積分経路内に複数のき裂先端を含んでいても、任意方向のき裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を経路独立に求めることができるため、本研究のようにき裂の干渉問題には非常に有用である。

複数のき裂の相互干渉の問題は、これまで無限板中にあるき裂を対象として、半解析的に求めた応力拡大係数を用いて考察している報告が多く見られ⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾、また、Binienda and Arnold⁽⁶⁾は応力拡大係数からひずみエネルギー解放率を導出して、異方性無限板における折れ曲がりを含めた、き裂の相互干渉を検討している。しかしながら、干渉き裂を含めた、全体を考慮して進展特性を考察したものは、著者らの知る限り皆無である。

また、き裂の折れ曲がりに関する報告も、無限板中央にある両側き裂を対象としては、 Wu ⁽⁷⁾に代表されるように数多くあるが、片側き裂を対象としたものは、数学的困難さのためほとんど見当たらない。

著者らはこれまでに、 E 積分を、き裂の干渉問題に適用することの有用性を示し⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾、また、き裂相互の位置関係が微妙に異なるだけで、主き裂の進展特性が大きく変化する場合があることを明らかにしてきた。本報告では、主き裂だけでなく、干渉き裂の両先端がそれぞれ折れ曲がり進展する瞬間時のエネルギー解放率をも解析し、ある位置関係においてどのき裂先端がどの方向に最も進展する可能性が大きいかを検討する。

* 原稿受付 1997年10月17日。

*¹ 正員、福井工業高等専門学校(☎916-0064 鯖江市下司町)。*² 正員、徳山工業高等専門学校(☎745-0801 徳山市久米高城3538)。*³ 正員、金沢大学工学部(☎920-0942 金沢市小立野2-40-20)。

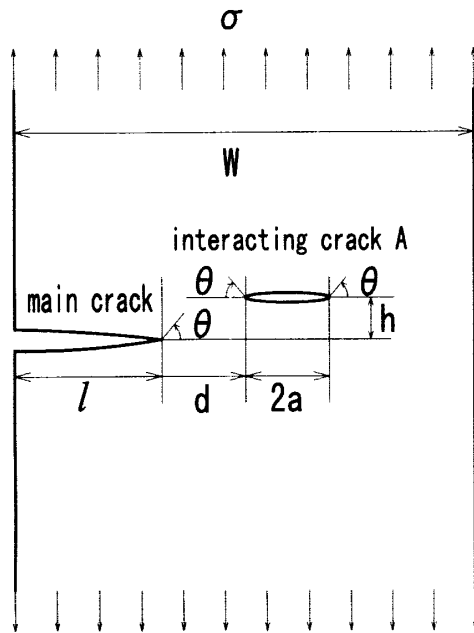


Fig. 1 A main crack and the parallel interacting crack

2. 解析モデルと解析方法

本研究で用いた解析モデルは、図1に示すように、横幅 W の無限長帯板中央に長さ l の片側き裂（主き裂）があり、主き裂先端近傍に主き裂と平行に長さ $2a$ のき裂 A（干渉き裂）がある場合を想定した。ここで便宜上、一様引張荷重の作用する方向を鉛直方向、それと直角の方向を水平方向と呼ぶことにし、主き裂先端を原点とした干渉き裂左端の水平方向の距離 d （図1で右向きを正とする）を水平き裂間距離、主き裂と干渉き裂との鉛直方向の間隔 h を鉛直き裂間隔と呼ぶことにする。また、折れ曲がり角度 θ は図1に示すようにき裂各先端で上向きを正とした。

エネルギー解放率を求めるための E 積分公式は、線形弾性体の場合、次式で示される⁽¹⁾⁽²⁾⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。

$$E(l) = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial l} \cdot \mathbf{u} \right) ds \quad \text{-----(1)}$$

ここに、 Γ は進展き裂先端を含む領域の境界、 \mathbf{s} 、 \mathbf{u} は Γ 上での表面応力ベクトル及び変位ベクトルであり、 l はき裂長さである。

解析モデルに対する有限要素近似モデルは、長さ 17.32cm、幅 $W=10$ cm の有限長方形板とし、要素分割は定み正三角形要素を基本とする水平方向80等分割、鉛直方向160等分割とした。

本研究では、 E 積分を有限要素法に適用するため、式(1)を次式のように l に関する微分項に2点差分近似を行

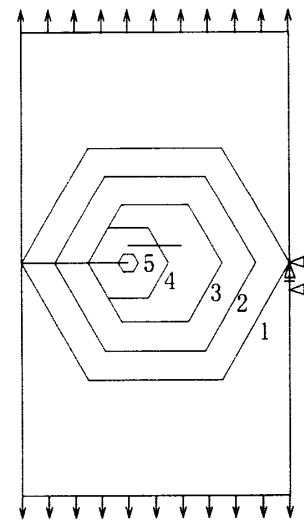


Fig. 2 Integral paths and the boundary conditions

った⁽¹¹⁾。

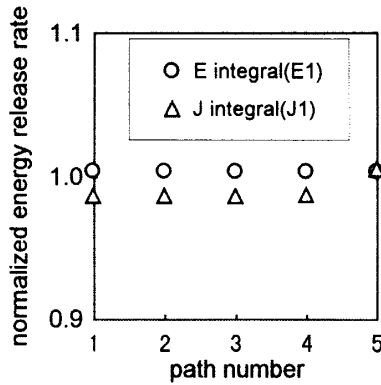
$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{s}_i(l) \cdot \frac{\mathbf{u}_i(l + \Delta l) - \mathbf{u}_i(l)}{\Delta l} - \frac{\mathbf{s}_i(l + \Delta l) - \mathbf{s}_i(l)}{\Delta l} \cdot \mathbf{u}_i(l) \right\} \quad \text{-----(2)}$$

ここに、 n は経路における節点の数、 \mathbf{s}_i は各節点における表面力ベクトル、 \mathbf{u}_i は各節点における変位ベクトル、そして Δl はき裂進展長さである。また、 (l) および $(l + \Delta l)$ は、それぞれ、き裂が進展する前と進展後のモデルの物理量を表している。

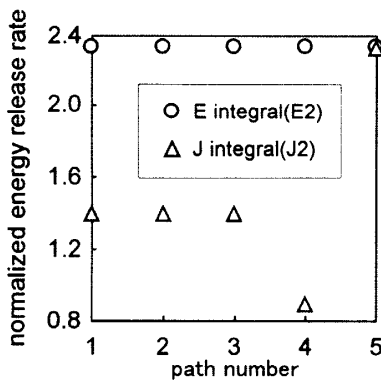
き裂先端では、正三角形を二分した要素で構成し、折れ曲がり角度 θ が、 0° 、 $\pm 30^\circ$ 、 $\pm 60^\circ$ 、 $\pm 90^\circ$ 、 $\pm 120^\circ$ 、 $\pm 150^\circ$ の計11方向で計算できるようにした。また、き裂進展モデルの節点座標値を変えることにより、 $\pm 15^\circ$ の方向の計算も行った。

E 積分値を求めるための積分経路は、図2に示すように、すべて正六角形で5経路設定した。経路1～3はすべてのき裂先端を含む経路、経路4は干渉き裂を横切り主き裂先端と干渉き裂左端を含む経路、経路5は主き裂先端のみを囲む経路である。また、 E 積分の剛体運動による影響を無くするため、拘束条件は図2に示すように、主き裂のある横軸の最右端の節点を鉛直方向、水平方向共に拘束し、その真下の節点の水平方向のみを拘束して計算を行った。

干渉き裂の存在が主き裂の進展に影響を及ぼすパラメータとして、本研究では水平き裂間距離 d に着目し、き裂相互の位置関係を $l/W=0.4$ 、 $2a/l=0.50$ 、 $h/l=0.162$ とし、 d を変えたいくつかの位置関係において主き裂先端および



(a) Energy release rate for a crack with no interacting cracks



(b) Energy release rate for a crack with an interacting crack

Fig. 3 Energy release rate on several integral paths

干渉き裂 A 両端が、それぞれ折れ曲がり進展する瞬間時のエネルギー解放率を、E 積分を用いて有限要素解析した。これを Case 1 とする。さらに、干渉き裂長さを Case 1 の 1/2 とした Case 2、鉛直き裂間隔を 2 倍とした Case 3 についても解析した。

3. 結果と考察

3.1 経路独立性と J 積分との比較 図 3 に各積分経路ごとに計算されたエネルギー解放率の値を示す。図中には、エネルギー解放率を求めるときによく使用されている周知の J 積分による結果も示してある。ここに、図 3 (a) の E1, J1 はそれぞれ干渉き裂がなく主き裂だけが存在し、それが直進進展するときの E 積分及び J 積分による値であり、図 3 (b) の E2, J2 は Case 1 の位置関係において、 $d=0$ としたときの主き裂先端が直進進展するときの E 積分及び J 積分による値である。ただし、エネルギー解放率は次式(3)で示されるように、一様引張を受ける無限長有限幅帯板の片側中央にある主き裂が直進するときの応力拡大係数 K_I の解析的級数解⁽¹³⁾をエネルギー解放率に換算した値 G_0 で除して、正規化してある。以後の議論

でも、同様に G_0 を一つの基準値と考え、数値解析により得られたエネルギー解放率は、この G_0 で除した正規化した値で表す。E は材料のヤング係数である。

$$G_0 = K_I^2 / E \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここに、

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi l} F(l/W) \quad ; l/W = \xi$$

$$F(\xi) = 1.12 - 0.231\xi + 10.55\xi^2 - 21.72\xi^3 + 30.39\xi^4$$

図 3 から、主き裂 1 本のみの場合には、E 積分、J 積分共に経路と独立に G_0 とよく一致しており、 G_0 との差は、E 積分では 0.4%、J 積分では経路 1~4 では -1.3%、経路 5 では 0.6% であった。しかし、干渉き裂が存在する場合には、J 積分では積分経路内にあるすべてのき裂先端の特異性により生じる値が合計されてしまうために、経路 1~4 では正しいエネルギー解放率が得られず経路独立性が成り立たない。それに対して E 積分では全ての経路で、数値解析の出力結果の範囲では、同一の値が得られ完全な経路独立性が成立している。また、J 積分によりエネルギー解放率を求められるのは、き裂が直進進展する場合のみであり、き裂が任意方向に折れ曲がる瞬間のエネルギー解放率を J 積分で求めることは非常に困難である。一方、E 積分によれば、その場合でも経路独立な積分で簡単に求めることができる。したがって以後の考察では、E 積分によって得られたエネルギー解放率を用いてき裂の相互干渉について考察する。

3.2 相互干渉の影響

3.2.1 各き裂先端のエネルギー解放率と折れ曲がり方向との関係

図 4 (a), (b) および (c) はそれぞれ、Case 1 において干渉き裂の位置が干渉き裂左端と主き裂先端の水平方向の位置が等しい $d/l=0$ 、干渉き裂中央と主き裂先端の水平方向の位置が等しい $d/l=0.25$ および干渉き裂右端と主き裂先端の水平方向の位置が等しい $d/l=0.5$ における解析結果を示したものである。○印が主き裂先端、△印が干渉き裂 A 右端、□印が干渉き裂 A 左端がそれぞれ折れ曲がり進展瞬間時の正規化したエネルギー解放率である。横軸は折れ曲がり角度 θ である。

図 4 中の点線で示したエネルギー解放率は、干渉き裂がない場合の主き裂先端が折れ曲がり進展する瞬間時の正規化したエネルギー解放率である。干渉き裂がない場合、折れ曲がり角度が大きくなるのにしたがって、エネルギー解放率は滑らかに減少しており、ここで破壊靱性の等方性を仮定し、エネルギー解放率による破壊規準に従えば、き裂は直進するという自明の結果が得られる。このように E 積分による方法は、従来の J 積分では取り扱うことが困難な、き裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率の値

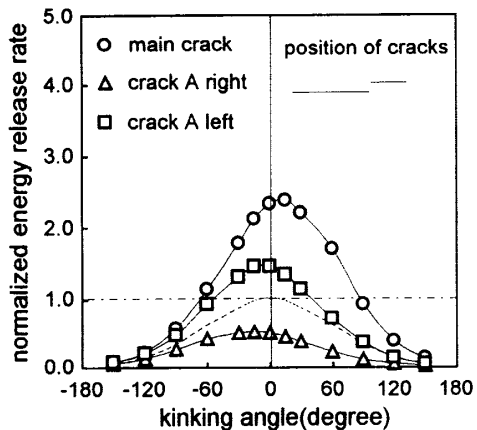
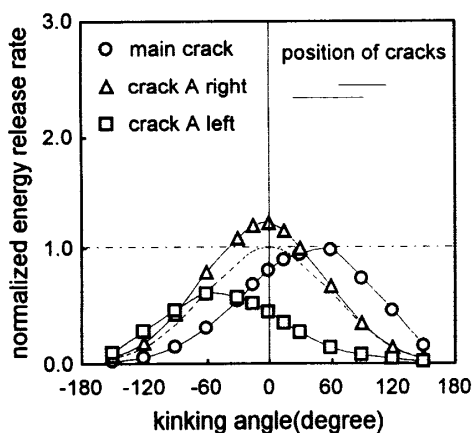
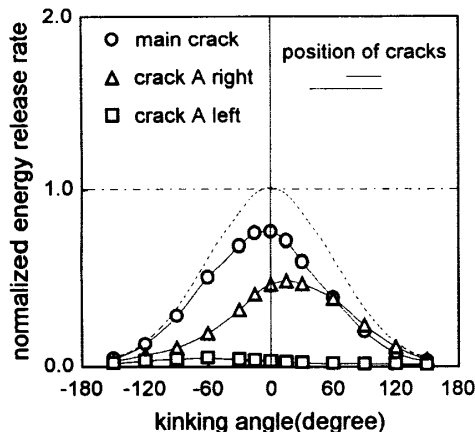
(a) $d/l=0$ (b) $d/l=-0.25$ ($d/2a=-0.5$)(c) $d/l=-0.5$ ($d/2a=-1.0$)

Fig. 4 The variations of energy release rate with an interacting crack

を、特異要素等を用いなくても比較的簡単な有限要素法により、き裂が直進するときと同様な経路独立な積分で精度の良い解析が行える非常に有用な手法である。

図4(a)より $d/l=0$ のときには、主き裂先端では、干渉

き裂が主き裂の上側にあるため、エネルギー解放率が最大となる方向は $+15^\circ$ の方向となる。そして、この値は、干渉き裂の存在によって主き裂だけが存在しそれが直進進展するときの値の約2.4倍となり、この時、帯板の鉛直方向の引張破壊強度は小さくなる。また、この値は干渉き裂両端におけるエネルギー解放率に比べ顕著に大きく、この位置関係では主き裂のこの方向への折れ曲がり進展が助長される。

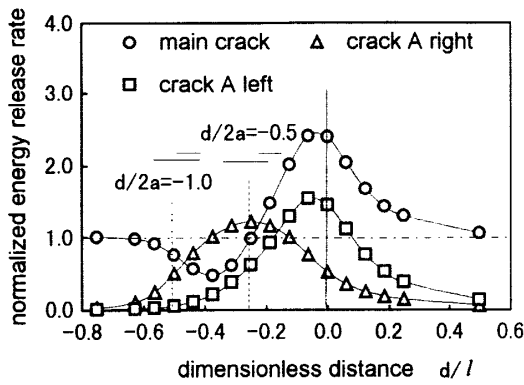
図4(b)より $d/l=-0.25$ の時には、干渉き裂の存在により、主き裂近傍における応力の伝達が遮断されるため、主き裂先端におけるエネルギー解放率は小さくなり、干渉き裂右端が進展するときのエネルギー解放率が最大となる。従って、この場合、主き裂は進展せずに、干渉き裂右端に飛び移り進展する可能性が大きくなる。

図4(c)より $d/l=-0.5$ の時には、すべてのき裂先端における正規化したエネルギー解放率は1.0より小さくなり、主き裂だけが存在し、それが直進するときの値よりも小さくなっている。したがってこの位置関係のときは干渉き裂が存在することによって、主き裂の進展が抑制され、帯板の鉛直方向の引張破壊強度は大きくなる。

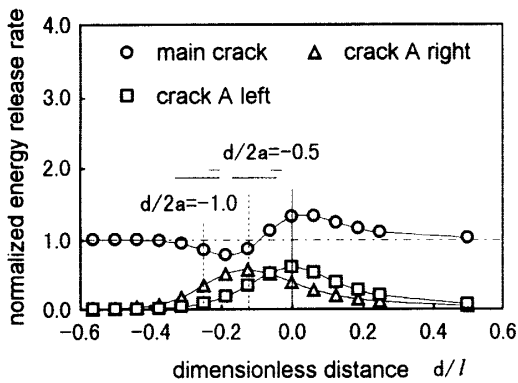
3・2・2 各き裂先端の最大エネルギー解放率と水平き裂間距離との関係

前項で述べたように、干渉き裂の水平方向の位置が異なると、き裂の進展状況が大きく異なることがわかる。そこで、Case 1~3において水平き裂間距離 d を変えたそれぞれの場合における、各き裂先端の折れ曲がり進展瞬間時のエネルギー解放率を計算し、それらの最大値を d に対してプロットしたものが図5(a), (b)および(c)である。ただし、 d は主き裂長さ l で除して無次元化してある。ここで、以後の説明の都合上、これらの最大値を MAXE と呼ぶことにする。また、図5中には、き裂の位置関係がわかりやすいように、主き裂先端と干渉き裂中央の水平方向の位置が等しいとき ($d/2a=-0.5$)、および主き裂先端と干渉き裂右端の水平方向の位置が等しいとき ($d/2a=-1.0$) の位置関係を図示してある。また、表1は MAXE の得られた折れ曲がり角度の方向を表にしたものである。太枠で囲んである部分が、その時の干渉き裂の位置においてエネルギー解放率が最大となったき裂先端である。ここに、折れ曲がり角度0の符号の意味は、各き裂先端ではき裂面に対して応力の分布が非対称となるため、解析結果としては直進方向が最大となったが、その前後の解析値 ($\pm 15^\circ$) を比較して上向きが大きければ+を、下向きが大きければ-を付けてある。したがって+0となっていれば実際には直進方向よりも多少上向きの方向のエネルギー解放率が高いことを意味する。

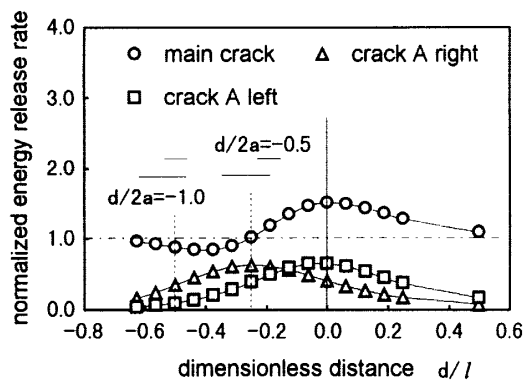
図5(a)より Case 1における d の違いによる主き裂先端



(a) Case 1



(b) Case 2



(c) Case 3

Fig. 5 The variations of maximum energy release rate(MAXE) with an interacting crack

における MAXE の変化は、主き裂先端の水平方向の位置が干渉き裂と多少重なっている $d/l = -0.063$ ($d/2a = 0.125$) の時が最大であり、その方向はき裂相互の位置関係が非対称であるため、表 1 からわかるように、完全な直進方向とはならず上向き方向となる。干渉き裂がこの位置から右に存在するにしたがって、エネルギー解放率は減少していき $d/l = 0.5$ となると、干渉き裂の存在が主き裂の進展に及ぼす影響はほとんどなくなり、正規化したエネルギー解

Table 1 The direction of maximum energy release rate (MAXE) for Case 1

d/l	d/2a	main	crack A right	crack A left
-0.750	-1.500	-0	+60	-60
-0.625	-1.250	-0	+60	-60
-0.563	-1.125	-0	+30	-60
-0.500	-1.000	-0	+15	-60
-0.438	-0.875	-0	+15	-60
-0.375	-0.750	+0	+0	-60
-0.313	-0.625	+60	-0	-60
-0.250	-0.500	+60	-0	-60
-0.188	-0.375	+60	-0	-60
-0.125	-0.250	+30	-15	-30
-0.063	-0.125	+15	-15	-15
0.000	0.000	+15	-15	-15
0.063	0.125	+0	-15	+0
0.125	0.250	-0	-15	+15
0.188	0.375	-0	-15	+15
0.250	0.500	-0	-15	+15
0.500	1.000	-0	-15	+15

$$d/l = -0.188 \quad (d/2a = -0.375)$$

→ extension of a main crack

$$d/l = -0.25 \quad (d/2a = -0.5)$$

→ extension of an interacting crack

Fig. 6 Schematic diagram of crack extending jumped from a main crack tip to an interacting crack tip

放率は1.0に近づき、表 1 からわかるように方向もほぼ直進方向となる。また、この位置から干渉き裂が左に存在していても MAXE はしだいに減少していき、 $d/l = -0.375$ の時 ($d/2a = -0.75$) に最小となり、さらに干渉き裂が左に存在すると再び増加し、 $d/l < -0.625$ ($d/2a < -1.25$) のとき、干渉き裂の影響はなくなる。

ここで $-0.438 < d/l < -0.25$ の時には、主き裂先端よりも干渉き裂右端が進展する際のエネルギー解放率が大きく、図 6 に模式的に描いてあるように、主き裂は進展せず、干渉き裂右端に飛び移り進展する可能性がある。また、その方向は重なりが小さいときはほぼ直進であるが、大きくなると上向きとなる。

Case 1 より干渉き裂長さが短い Case 2、および鉛直き裂間隔が大きい Case 3 では、干渉き裂が主き裂に及ぼす影響が Case 1 に比べ小さくなり、主き裂先端における曲線の凹凸は滑らかとなり、干渉き裂の水平方向の位置が

異なるすべての位置関係で、主き裂先端がほぼ直進する際のエネルギー解放率が、干渉き裂両端における値よりも大きくなった。したがって、干渉き裂への飛び移り進展は生じないといえる。MAXE が最大となる干渉き裂の水平方向の位置は、干渉き裂が短い Case 2 では長い Case 1 とは異なり干渉き裂左端が主き裂先端から右に少し離れた位置となり、鉛直き裂間隔が大きい Case 3 では Case 1 と同様に $d=0$ の時が最大である。しかし、その値は Case 1 ほど大きくはない。主き裂先端におけるエネルギー解放率が最も小さくなる干渉き裂の水平方向の位置は Case 1 ~ Case 3 すべてにおいて $d/2a \approx -0.75$ の時である。また、干渉き裂の存在が主き裂に影響を及ぼさない干渉き裂の水平方向の位置は、Case 1 ~ Case 3 すべてにおいて干渉き裂が主き裂先端から右に離れて存在する場合は $d/2a > 0.5$ のときであり、干渉き裂が主き裂と重なっている場合は $d/2a < -1.25$ のときである。このように主き裂と干渉き裂の水平方向の位置が重なっているときは、干渉き裂長さがき裂の進展特性に及ぼす影響が大きく、 $d/2a$ が 1 つのパラメータとなる。

4. 結 言

本研究では、一様引張を受ける線形弾性体有限幅帯板中央にある片側き裂（主き裂）先端近傍に、主き裂と平行な干渉き裂が存在する場合における各き裂先端の進展特性を、材料の破壊靱性の等方性を仮定し、エネルギー解放率の破壊規準にしたがって検討した。また、エネルギー解放率は E 積分によって求めた。本研究で得られた結果を要約すると以下のとおりである。

- (1) E 積分では、積分経路内に、進展き裂先端以外のき裂先端を含んでも、進展き裂先端における折れ曲がり進展瞬間時のエネルギー解放率を求めることができ、き裂干渉問題には非常に有用である。
- (2) 主き裂先端に干渉き裂が存在するとき、主き裂先端は折れ曲がり進展し、その方向は干渉き裂の位置によって異なる。
- (3) 干渉き裂左端が主き裂先端から右に離れて存在する場合 ($d > 0$) では、 d が小さい時には、干渉き裂の存在によって主き裂の進展は助長され、主き裂先端におけるエネルギー解放率は大きくなり、帯板の引張破壊強度は小さくなる。 d が大きくなりほぼ $d/2a > 0.5$ の時には、干渉き裂の存在が主き裂の進展に影響を及ぼさなくなる。
- (4) 干渉き裂左端が主き裂先端から左に存在する場合、すなわち、干渉き裂が主き裂と重なって存在する場合 ($d < 0$) では、 d が 0 に近い時は主き裂の進展は

助長される。しかし、 d が小さい (d の絶対値は大きい) 時には、逆に干渉き裂の存在によって主き裂の進展は抑制される。さらに本研究の解析例では $d/2a \approx 0.75$ の時、主き裂先端におけるエネルギー解放率は最小となり、この時、帯板の引張破壊強度は最大となる。また、ほぼ $d/2a < -1.25$ の時に干渉き裂の存在が主き裂の進展に影響を及ぼさなくなる。

- (5) Case 1 のように干渉き裂の長さがある程度長く、鉛直き裂間隔が小さいときに、主き裂先端の進展が抑制される場合には、主き裂は進展せず、干渉き裂右端に飛び移り進展する可能性がある。ただし、本研究では解析例が少ないため、飛び移り進展をする位置関係を明確に論ずることはできない。

本研究では、干渉き裂が主き裂に平行に存在する場合の解析を行ったが、本研究で用いた E 積分による有限要素解析の手法は、非線形物質においても任意の積分経路で進展するき裂先端のエネルギー解放率を求めることができるため、干渉き裂の本数が多い場合、き裂が傾いている場合等の種々の位置関係における解析を試みると共に、斜荷重下におけるき裂の相互干渉の解析も行っていくことを今後の課題としたい。

文 献

- (1) Yatomi, C., Int. J. Solids Struct., 19, (1983), 183-187.
- (2) 矢富, 材料, 35-394, (1986), 767-771.
- (3) 石田, 機論, 35-277, (1959), 1815-1822.
- (4) Horii, H and Nemat-Nasser, S, In Advances in aerospace structure, material and dynamics, Vol. AD-06, (1983), 111-117, New York :ASME.
- (5) Hori, M and Nemat-Nasser, S., J. Mech. Phys. Solids, 35-5, (1987), 601-629.
- (6) Binienda, W. K and Arnold, S. M, Int. J. Fract., 71, (1995), 213-245.
- (7) Wu, C. H, J. Elasticity, 8-3, 1978, 235-257.
- (8) 阿部・ほか 3 名, 第 26 回岩盤力学に関するシンポジウム論文集, (1995), 66-70.
- (9) 阿部・ほか 2 名, 第 50 回土木学会年次学術講演会講演概要集(共通), (1995), 70-71.
- (10) 阿部・ほか 2 名, 第 8 回破壊力学シンポジウム論文集, (1995), 97-101.
- (11) 矢富・ほか 2 名, 機論, 61-592, A, (1995), 2521-2528. 1995.
- (12) 橋本・ほか 2 名, 土木学会論文集, No. 513/ I -31, (1995), 17-25.
- (13) 白鳥正樹, ほか 2 名, 数値破壊力学, (1980), 75, 実教出版.