

情報量規準に基づく動的構成式の決定法*

立 矢 宏*¹, 三 谷 芳 史*²
放 生 明 廣*¹, 茶 谷 明 義*¹Determination Method for Dynamic Constitutive Equations Based
on an Information CriterionHiroshi TACHIYA, Yoshifumi MITANI,
Akihiro HOJO and Akiyoshi CHATANI

This paper presents an easy determination method for the dynamic constitutive equations of materials with strain-rate sensitivity. The proposed method will easily determine a simple constitutive equation from the results of ordinary impact tests. Previously, the determination of dynamic constitutive equations is usually attempted from a metallographical or physical standpoint. Such attempts often need detailed consideration, and most of the derived equations become complex. Furthermore, the estimation of the involved unknown parameters in the equations is also difficult. If simple dynamic constitutive equations can be determined without especially physical considerations, the simulation for mechanical deformations caused by impact will become easy. Thus, this paper tries to determine dynamic constitutive equations as polynomials which can describe various curves and be easily treated. Polynomials approximate given data more precisely with increase in the number of the involved parameters. However, as the number of parameters increases, the calculation of the equations become more difficult. Furthermore, it is not necessarily appropriate that the equation fits measured data considerably precisely, because the measured data usually contain some errors. Therefore this paper proposes the determination method for dynamic constitutive equations based on an information criterion 'AIC'. The information criterion will evaluate the appropriateness of approximate equations and reveal the required minimum number of the parameters to be used. The proposed method demonstrates that 'AIC' will easily determine appropriate dynamic constitutive equations.

Key Words: Dynamic Constitutive Equation, Strain-rate Sensitivity, Impact, Information Criterion, AIC, Stress Wave Propagation, Dynamic Simulation

1. 緒 言

材料の動的な変形挙動を表す、ひずみ速度依存性を考慮した動的構成式を用いれば、塑性加工時の加工パラメータの決定や、衝撃負荷を受ける機械構造の変形挙動の予測などが容易となる。そこで従来より、転位の挙動などから種々の構成式⁽¹⁾が提案され、また、式中のパラメータの推定⁽²⁾が行われている。しかし、構成式の提案およびパラメータの推定は必ずしも容易でなく、また、得られる式形も複雑である場合が多い。現状では、さまざまな条件下における各種材料の動的構成式を容易に決定する方法は確立されていない。

材料学の観点からは、詳細な考察を行い構成式を導くことは重要である。しかし、材料の変形挙動を表すことのみを目的とすれば、金属学または物理学的考察に基づき構成式を導く必要は必ずしもなく、基本的な材料試験の測定結果を近似することによって、べき級

数形多項式などで表される、簡便な動的構成式が容易に決定されればよい。

一般に測定値に基づく近似式の決定は、式に含まれるパラメータ数を増加させれば、近似の対象となる測定結果をより忠実に表しうる。しかし、パラメータ数が増加して式形が複雑になるにつれ、式の取扱いやパラメータの決定が困難となり、計算も容易でなくなる。また、測定結果には一般に誤差が含まれることから、近似の対象となるデータを忠実に表すことは必ずしも適切ではなく⁽³⁾、誤差の影響を考慮して、より真の値をよく表す近似式を決定することが望まれる。

近年、統計学の分野では、適切な近似式の決定を行う評価量として情報量規準⁽⁴⁾が提案されている。情報量規準は誤差を含む測定結果より、真の現象をよりよく表すと予測される式を決定する評価量である。特に赤池が提案したAIC⁽⁵⁾⁽⁶⁾は簡便に、かつ、適切に近似式の評価を行えることが多くの例で示されている⁽⁷⁾。

本論文では、情報量規準AICを用い衝撃試験の測定結果から、簡便な動的構成式を容易に決定する方法

* 原稿受付 1998年2月19日。

¹ 正員, 金沢大学工学部(☎920-8667 金沢市小立野2-40-20)。² 学生員, 金沢大学大学院。

を提案するとともに、その有用性について検討する。

2. 情報量規準 AIC および構成式の決定法

2.1 AIC の概要 本論文ではモデルの適切さを評価する指標である情報量規準 AIC (Akaike Information Criterion)⁽⁵⁾ を用いて構成式を決定する。AIC はある現象の近似式が含むべき最少のパラメータ数を示し、また、異なる近似式の相対的な適切さを表しうる評価量である。また、AIC を用いれば、ある確率分布に従う誤差を含むデータから、真のモデルに近いと推定される式を決定できる。AIC は次式で定義され⁽⁵⁾、値が小さいほどモデルが適切であることを示す。

$$AIC = -2 \times MLL + 2 \times N_p \dots\dots\dots (1)$$

なお、 MLL および N_p は、モデルの最大対数尤度およびパラメータ数である。なお、本論文では簡便な構成式形として、取扱いが容易でさまざまな曲線を表しうる多項式形を用いる。また、測定結果に含まれる誤差は偶然誤差のみであるとして正規分布誤差を考慮する⁽⁶⁾。このとき、 m 次多項式の AIC の値は次式で求められる⁽⁹⁾。

$$AIC = n \ln 2\pi + n \ln d(m) + n + 2(m+2) \dots\dots\dots (2)$$

n および $d(m)$ はそれぞれデータ数および m 次多項式による残差分散を示す。

2.2 構成式の決定法 本論文では動的構成式を Malvern 形として塑性ひずみ速度を過応力の関数で表し、全ひずみ速度は弾性ひずみおよび塑性ひずみ速度の和とする⁽¹⁰⁾。構成式の決定方法は以下のとおりである。まず、ホプキンソン棒式の一軸負荷衝撃圧縮試験を行い、試験片材料に生じる過応力-塑性ひずみ速度関係を測定する。次に、同測定結果とよく一致するように構成式に含まれるパラメータを決定する。すなわち、構成式の基本形は多項式形として式の次数を変化させ、各次数の式における各項の係数を未知の材料定数とし、最小二乗法で決定する。さらに、各式の AIC を求めて互いに比較し、適切な動的構成式を決定する。

3. シミュレーションによる検討

実際の測定結果による構成式の決定では真値が明らかでないため、AIC による評価の妥当性を詳細に検討することは困難である。そこで、材料の構成式をあらかじめ与えて一軸負荷衝撃圧縮試験の弾塑性波伝ば解析を行い、得られた数値解に誤差を加えて測定結果と

する。同測定結果を用い上述の方法で動的構成式を決定するシミュレーションを行う。得られた動的構成式による値、解析結果と仮定した真値とを比較して本手法の妥当性を検討する。ここでは特に AIC の評価における誤差の影響について検討する。

一軸負荷衝撃圧縮試験における弾塑性波伝ば挙動は、一次元伝ば理論に基づく次式で表される⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + g(\sigma, \varepsilon_p, \rho_{oi}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

式中の x および t はそれぞれ、軸方向座標および時間を示す。 $v, \sigma, \varepsilon, \varepsilon_p, \rho$ および E はそれぞれ、変位速度、応力、全ひずみ、塑性ひずみ、密度およびヤング率を表す。応力およびひずみは圧縮を正とする。上式の詳細な数値解法はこれまでに多数示されており⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾、本論文でも従来の方と同じく特性曲線法で数値解を求めた。なお、式(3)中の関数 $g(\sigma, \varepsilon_p, \rho_{oi})$ は材料の応力、塑性ひずみ、塑性ひずみ速度関係を表す動的構成式であり、 ρ_{oi} は未知の材料定数である。ここでは衝撃負荷を受ける材料としてアルミニウムを想定し、以前に検討を行った次式を用いる⁽²⁾。

$$g(\sigma, \varepsilon_p, \rho_{oi}) = 10^{-4} \exp[(\rho_{o1} - \rho_{o2} \cdot \varepsilon_p)(\sigma - \sigma_s(\varepsilon_p))] \dots (4)$$

上式において $\sigma_s(\varepsilon_p)$ は静的応力-塑性ひずみ関係を示す。先に、著者らは非線形最小二乗法を用いて上式中のパラメータを実験データより推定した⁽²⁾。その結果、パラメータ ρ_{o1} は複数の実験データに対して比較的安定に推定できたが、パラメータ ρ_{o2} の推定結果は大きくばらついた。また、その後の実験により、式(4)において ρ_{o2} を零とした動的構成式でアルミニウムの弾塑性変形挙動をほぼ表せることを確認した。そこで、簡便のために ρ_{o1} および ρ_{o2} をそれぞれ 2.0 MPa^{-1} および零としてシミュレーションを行う。シミュレーションのモデルを図1に示す。図1の入力棒左端に衝撃速度 $V(t)$ を作用させ、出力棒との間に挟まれた試験片の弾塑性変形挙動を解析する。試験片に生じる過応力-塑性ひずみ速度関係から、AIC を用いて先述の方法により動的構成式を決定する。シミュレーションに用いた入力棒、試験片および出力棒の諸元は後述の実験装置をモデル化した表1に示す値を用いた。式中の $\sigma_s(\varepsilon_p)$ は、文献値⁽¹²⁾を参考に次式で近似して得た。

$$\sigma_s(\varepsilon_p) = 400 \cdot (\varepsilon_p + 0.002)^{0.25} + 57.41 \dots\dots\dots (5)$$

Table 1 Conditions of simulation model

	Material	Length (mm)	Diameter (mm)	Young's modulus (GPa)	Density (kg/mm ³)	Yield strength (MPa)
Input bar	Steel	450.0	20.0	206.0	7.86×10 ⁻⁶	600.0
Output bar	Steel	450.0	20.0	206.0	7.86×10 ⁻⁶	600.0
Test piece	Aluminum	10.0	15.0	71.0	2.70×10 ⁻⁶	142.0

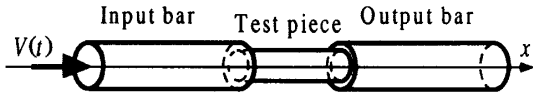


Fig. 1 Simulation model

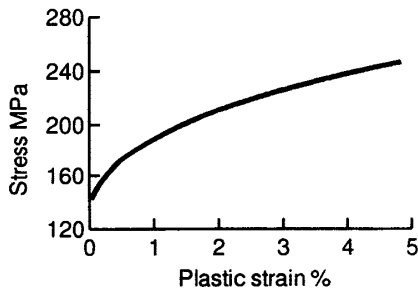


Fig. 2 Simulated stress-plastic strain curve

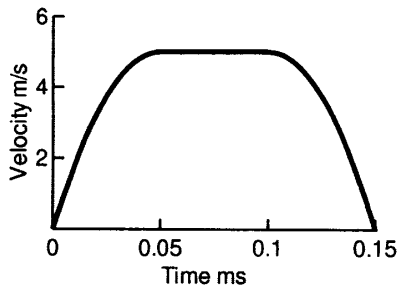


Fig. 3 Impact velocity

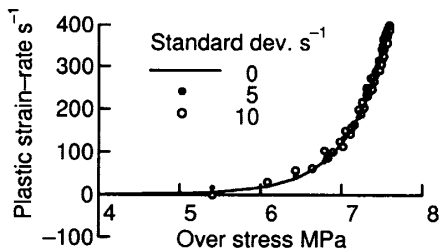


Fig. 4 Relationship of plastic strain-rate to over stress

上式より得られる応力-塑性ひずみ関係を図2に示す。
 図3に示す衝撃端速度に対し試験片軸方向中央に生じた塑性ひずみ速度-過応力の関係を実線でつなぎ図4に示す。また、図中に●および○印で表した値は、実線で示すデータに、平均値が零、標準偏差が5および10 s⁻¹である正規分布誤差を加えたデータであり、シミュレーションにおける測定結果とする。構成式の

Table 2 Residual variance and AIC with degree

(a) Standard deviation 5 s⁻¹

Degree	Res.var. s ⁻² (Used data)	Res.var. s ⁻² (True data)	AIC
3	345.43	333.18	1008.50
4	59.74	34.42	808.71
5	26.19	2.60	715.87
6	25.06	1.10	712.81
7	24.91	1.40	714.11
8	24.74	1.56	715.32
9	24.68	1.62	717.05
10	24.68	1.62	719.02

(b) Standard deviation 10 s⁻¹

Degree	Res.var. s ⁻² (Used data)	Res.var. s ⁻² (True data)	AIC
3	430.76	339.54	1033.90
4	135.48	40.64	902.87
5	95.49	9.26	864.64
6	95.49	9.39	866.64
7	95.09	10.02	868.16
8	95.08	10.03	870.15
9	94.39	10.71	871.31
10	92.78	12.34	871.33

形は先に述べたように次式で表す多項式形とする。

$$g(\sigma, \epsilon_p, \rho_i) = \sum_{i=0}^m \rho_i (\sigma_d - \sigma_s(\epsilon_p))^i \dots\dots\dots (6)$$

σ_d, m は、それぞれ動的応力、構成式の次数である。
 ρ_i は測定結果より最小二乗法で決定する未知の材料定数であり、各 ρ_i の単位は MPa⁻ⁱ となる。

上述の標準偏差が5および10 s⁻¹である誤差を加えたデータに関して、式(6)で近似を行い得られた次数に対する残差分散およびAICの値を表2に示す。表2には、誤差を含むデータおよび誤差を付加する前のデータと、得られた近似式による値との残差分散を示した。表2より、いずれの場合も誤差を含むデータに関する残差分散は次数の増加とともに減少している。これに対してAICは表2(a)では次数6、表2(b)では5において最小値を示している。すなわち、標準偏差5 s⁻¹および10 s⁻¹の誤差を含むデータに対する近似式の最適次数は6および5と判定される。ここで、

誤差を含まない真のデータと近似式の値の残差分散を参照すれば、いずれの場合も AIC と同じく次数 6 および 5 で最小値を示している。さらに、誤差の系列を変えて同様な検討を複数行った結果、AIC が最小となる次数、またはその前後 1 以内の範囲で、真値に対する近似式の残差分散は最小となり、AIC によって適切な次数が選択されることが確認された。

次に、得られた構成式を用いて特性曲線法により弾塑性波伝ば解析を行い、式(4)を用いた結果と比較する。表 2(a)において次数が 5 から 7 である場合に求められたパラメータ p_i を表 3 に示す。これらの値を有する多項式形の構成式を式(4)の代わりに用いて試験片に生じるひずみ波形を求めた。AIC が最小となる次数が 6 である場合の結果を、式(4)を用いた場合の結果とともに図 5 に示す。また、表 3 に示す p_i の値を用いた多項式および式(4)を用いて得られたひずみ波形との残差分散は表 3 に示すとおりである。図 5 に示すように得られた多項式を用いた解析は元となる解析結果によく一致しており、また、表 3 より AIC が最小となる式の残差二乗和が最も少なく、式の選択を適切に行っていることが確認できる。

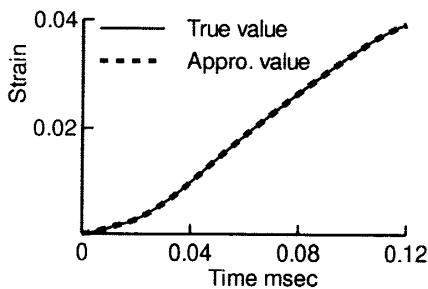


Fig. 5 True and approximate strain waves

Table 3 Values of parameter p_i and residual variance

Deg.	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	Res. var.
5	-5068.42	7304.40	-3642.38	836.04	-90.95	3.82			$1.38 \cdot 10^{-8}$
6	9037.0	-14627.10	8836.40	-2663.20	431.62	-36.14	1.23		$5.52 \cdot 10^{-12}$
7	84676.0	-143799.54	93721.59	-31638.91	6093.18	-676.74	40.39	-1.00	$9.51 \cdot 10^{-12}$

4. 実験による動的構成式の決定

4.1 実験方法および測定結果 ホプキンソン棒法式一軸負荷の衝撃圧縮試験より得られる測定結果を用いて 3 章の方法により動的構成式を決定する。実験装置の概略を図 6 に示す。図 6 の装置ではエアガンで打撃棒を加速発射し、入力棒を打撃して出力棒との間に挟まれた試験片の左端に衝撃負荷を加える。入力棒および出力棒にはひずみゲージを貼付してあり、ひずみ-時間関係を測定する。測定値より次式⁽¹¹⁾を用いて試験片に生じる全ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ 、ひずみ ϵ および応力 σ を算出する。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{C_0}{l_s}(\epsilon_I - \epsilon_R - \epsilon_T) \\ \epsilon &= \frac{C_0}{l_s} \int (\epsilon_I - \epsilon_R - \epsilon_T) dt \\ \sigma &= \frac{AE}{2a}(\epsilon_I + \epsilon_R + \epsilon_T) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 C_0 , l_s は、入出力棒中の弾性波の伝ば速度、試験片の長さを示し、 A および a はそれぞれ入出力棒および試験片の断面積を示す。 ϵ_I および ϵ_R は入力棒に貼付されたひずみゲージで測定される入射および反射ひずみ波形であり、 ϵ_T は出力棒に貼付されたひずみゲージで測定される透過波形である。本論文では試験片にアルミニウム納入材を用い、長さ 10 mm、直径 15 mm の円柱状に機械加工して、さらに、両端が長手方向に対して直角となるように研削仕上げを施した。実験時には試験片両端に二硫化モリブデンを塗布して摩擦の軽減をはかった。

実験ではエアガンの出力を変化させ、試験片に生じ

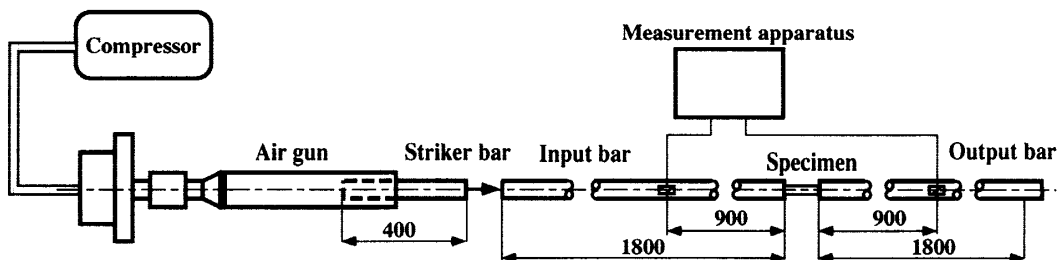
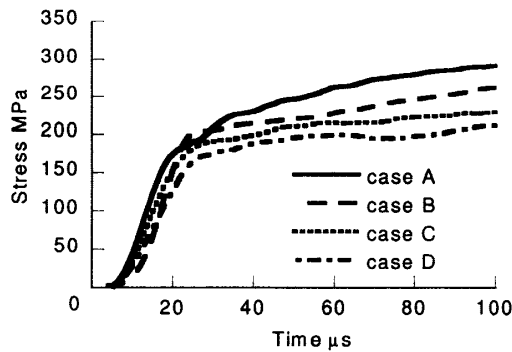


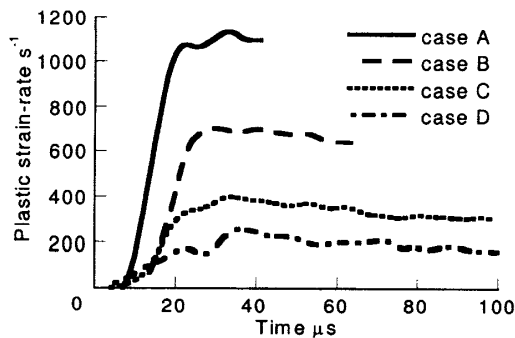
Fig. 6 Experimental apparatus

るひずみ速度域が 1000 s^{-1} , 600 s^{-1} , 400 s^{-1} および 200 s^{-1} 近傍となる実験をケース A, B, C および D とし, それぞれのケースにおいてデータを複数測定した。各ひずみ速度域において測定されたデータより得た応力および塑性ひずみ速度波形の例をそれぞれ図 7(a) および (b) に示す。なお, サンプルングタイムは $1\text{ }\mu\text{s}$ である。塑性ひずみ速度は, 応力の測定値を時間で数値微分し, さらに, ヤング率で除した弾性ひずみ速度成分を式 (7) より得られる全ひずみ速度から除くことにより求めた。

以上の測定値および万能形圧縮試験機を用いて得ら



(a) Stress waves



(b) Plastic strain-rate waves

Fig. 7 Measured values: case A, B, C and D denote the results at the strain-rate on the order of 1000, 600, 400 and 200 s^{-1} respectively

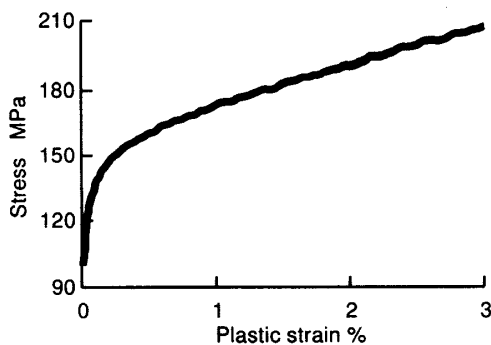


Fig. 8 Relationship between static stress and plastic strain

れた図 8 に示す試験片の静的応力-ひずみ関係より, 過応力-塑性ひずみ速度関係を求めた。得られた結果を図 9 に示す。なお, 図中の■印は各ひずみ速度域における過応力の平均値, 横棒は標準偏差を示している。

4.2 構成式の決定 図 9 に示す過応力-塑性ひずみ速度関係を用いて, 先述の決定手順に沿い構成式を決定する。式 (6) で図 9 の結果を最小二乗近似し, 式中のパラメータを求めるとともに AIC を算出した。得られた構成式の次数に対する AIC の変化を表 4 に示す。表より AIC は次数 4 で最小値となる。よって, ここでは次数 4 の動的構成式を選択する。決定された式のパラメータ値を表 5 に示す。また, 同式によって表される過応力-塑性ひずみ速度関係は図 9 中の実線で示すとおりである。

得られた構成式の妥当性を確認するために, 同式

Table 4 Changes of AIC on the estimation of the dynamic constitutive equation

Deg.	Res. var. s^{-2}	AIC
2	10035.2	3249.9
3	9594.68	3239.4
4	8924.44	3222.4
5	8918.81	3224.2
6	8917.33	3226.2

Table 5 Values of the parameters

p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
-2.77	90.23	-8.27	0.26	-2.44×10^{-3}

Table 6 Material constants of the test piece

Young's modulus	Yield strength
68.3 GPa	99.0 MPa

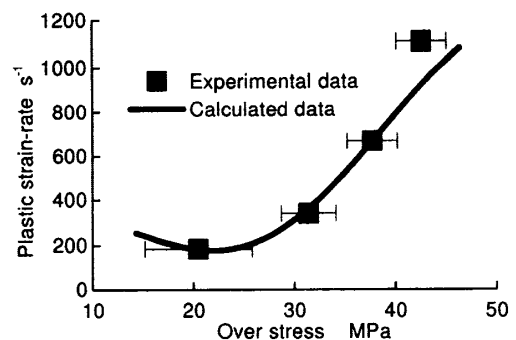


Fig. 9 Relationship between over stress and plastic strain-rate

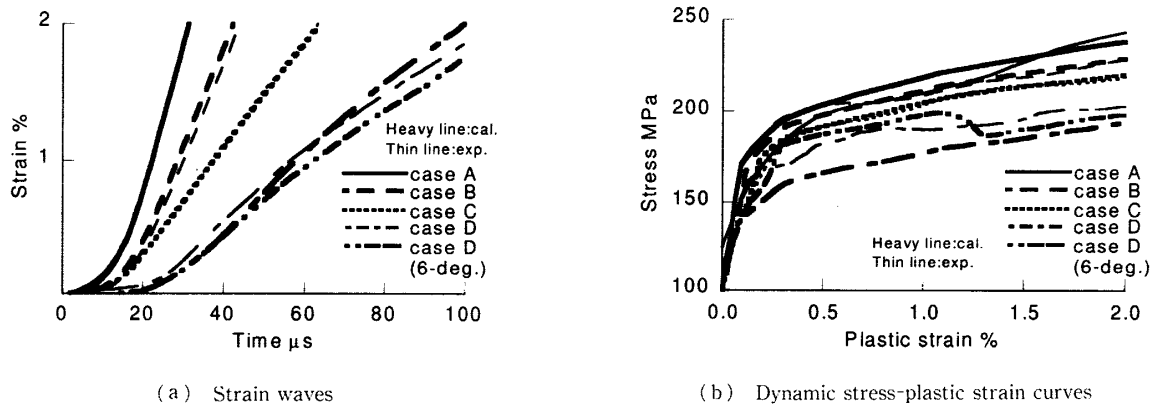


Fig. 10 Comparison between the measured and calculated values: case A, B, C and D denote the results at the strain-rate on the order of 1 000, 600, 400, and 200 s^{-1} respectively, the heavy and thin lines denote the calculated and measured values respectively

を構成式として先述の弾塑性波伝ば解析を行い、ひずみ波形および応力-塑性ひずみ関係を求め測定値と比較した。弾塑性波伝ば解析は図1のモデルを用い、実験時に測定される ϵ_l から一次元伝ば理論に基づき求めた衝撃速度 $V(t)$ を境界条件として行った。なお、アルミニウム試験片のヤング率および降伏強度は実測値に基づく表6の値を用いた。その他の諸元は実験装置をモデル化した表1に示すとおりである。なお、実験装置とモデルとでは入・出力棒の長さが異なるが、計算を行った範囲では反射波の影響を受けないため、試験片両端に作用する負荷の状態は同一であるとみなせる。

図10(a), (b)にひずみ波形、応力-塑性ひずみ関係の計算値および測定値をそれぞれ太線および細線で示す。測定値は図7に示した測定例と同一結果である。図10に示すように計算値は測定値にほぼ一致しており、得られた構成式の妥当性が確認される。ただし、本論文で用いた実験装置では、ひずみ速度域が $200 s^{-1}$ 付近以下および $1000 s^{-1}$ 付近以上のデータを得ることが困難であったため、ひずみ速度が $200 s^{-1}$ および $1000 s^{-1}$ 近傍である結果が他のひずみ速度域の場合と比較してよい近似が行えなかった。他の実験方法により、さらに低いおよび高いひずみ速度域のデータを得て構成式の決定を行えば、より広いひずみ速度域で精度よく弾塑性変形挙動を表す構成式の決定を行える。

以上で決定された構成式の次数の妥当性を確認するために、図10(a)および(b)に示した結果と、次数6で得られた構成式によるひずみ波形および応力-塑性ひずみ関係を比較した。ひずみ速度が $400 s^{-1}$ 以上の結果は次数が4である場合にほぼ一致した。ただし、図10に二点鎖線で示した $200 s^{-1}$ 近傍における応力-

塑性ひずみ関係は、塑性ひずみが1.3%付近で明らかに不安定な挙動を示している。また、次数を7以上として得られた構成式では得られる過応力-塑性ひずみ速度関係にうねりが生じるとともに、特性曲線法において解が収束せず弾塑性波伝ば解析を行うことができなかった。このように、AICが最小となる次数以上では近似の程度に大きな差は見られず、また、場合によっては不安定な挙動を示す場合がある。すなわち、AICによる評価を用いることによって、扱いやすく安定した、より次数の低い動的構成式を容易に決定できることが確認された。

5. 結 論

本論文で得られた結果を以下に要約する。

(1) ひずみ速度依存性を考慮した動的構成式を、一軸負荷衝撃圧縮試験結果より簡便な多項式形として情報量規準 AIC に基づき容易に決定する方法を示した。

(2) 一軸負荷衝撃圧縮試験をモデルとしたシミュレーションを行い、提案する手法によって構成式の決定を試み、誤差を含むデータから AIC により適切な構成式が決定できることを示した。

(3) 一軸負荷の衝撃圧縮試験より得られる実験データを用いて、提案する手法により構成式の決定を行い、実験結果をよく表しうる簡便な構成式が容易に得られることを確認した。

最後に本研究にご協力いただいた本学卒業生・池田靖君、本学技官・吉田博一氏に感謝する。また、本研究の一部は天田金属加工機械技術振興財団のご援助を得たことを記し謝意を表す。

文 献

- (1) 中桐滋, 実時間依存の構成式とその問題点, 塑性と加工, 29-325(1988), 107-112.
 - (2) 放生明廣・立矢宏・茶谷明義, 非線形最小二乗法による動的構成式の推定, 機論, 59-563, A(1993), 1720-1725.
 - (3) 坂本慶行・石黒真木夫・北川源四郎, 情報量統計学, (1983), 128-154, 共立出版.
 - (4) 鈴木義一郎, 情報量規準による統計解析入門, (1995), 66-79, 講談社.
 - (5) 赤池弘次, 情報量規準 AIC とは何か, 数理科学, 153(1976), 5-11.
 - (6) 文献(3)の 42-64 ページ.
 - (7) 例えば赤池弘次・北川源四郎, 時系列解析の実際 II, (1995), 95-113, 朝倉書店.
 - (8) 中川徹・小柳義夫, 最小二乗法による実験データ解析, (1982), 15, 東京大学出版会.
 - (9) 文献(3)の 133 ページ.
 - (10) 例えば日本塑性加工学会編, 高エネルギー速度加工, (1993), 26-35, コロナ社.
 - (11) 例えば, 村上碩哉・室田忠雄・神馬敬, 金属材料の縦衝撃によるひずみ速度効果の測定精度, 機論(1), 39-318 (1973), 556-564.
 - (12) 北川浩, 塑性力学の基礎, (1979), 11, 日刊工業新聞社.
-