

## 衝撃負荷逆負荷に適用できる動的構成式について\*

### (アルミニウム材の実験値との比較)

申 建 汎<sup>\*1</sup>, 放 生 明 廣<sup>\*2</sup>  
茶 谷 明 義<sup>\*2</sup>, 立 矢 宏<sup>\*2</sup>

## A Dynamic Constitutive Equation Applicable for Impact Loading and Inverse Loading (Comparison with the Experimental Results for Aluminum)

Jianxun SHEN<sup>\*3</sup>, Akihiro HOJO,  
Akiyoshi CHATANI and Hiroshi TACHIYA

<sup>\*3</sup> Department of Mechanical Systems Engineering, Kanazawa University,  
2-40-20 Kodatsuno, Kanazawa-shi, Ishikawa, 920-8667 Japan

In this paper, a dynamic constitutive equation that is applicable for impact loading and inverse loading was investigated. The numerical calculation was done for aluminum using finite difference method under the boundary condition of measured axial and angular velocities. The calculated stress and strain agreed well with the experimental ones under torsional and inverse torsional loadings about the strain rate of 40 1/s. The comparison of calculated result with experimental one for the combined loadings of impact tension and torsion was also performed, and the validity of this constitutive equation was verified. Moreover, the appearing yield points were discussed based on some simulations under two-stage combined loadings of tension and torsion.

**Key Words:** Dynamic Constitutive Equation, Impact Strength, Combined Stress, High Strain Rates, Finite Difference Method, Bauschinger Effect

### 1. 緒 言

金属材料の応力-ひずみ曲線にはひずみ速度依存性, 加工硬化やバウジング効果, 繰返し負荷による硬化や軟化現象等さまざまな現象が現れるから, その動的挙動を明らかにするためには, 逆負荷や組合せ負荷などさまざまな負荷経路での衝撃実験を行い, これに適用できる動的構成式を確立する必要がある. 従来から引張りとねじりの組合せ衝撃実験がいくつか行われ, 動的降伏条件の測定や Perzyna 型の構成式の検討などが行われている<sup>(1)-(6)</sup>が, これらは単純な比例負荷に対するものがほとんどであり, バウジング効果が表れる逆負荷など複雑な現象は取扱えないようである.

近年, 低ひずみ速度域については, 繰返し負荷, 四角形経路など複雑な非比例負荷, ラチェット現象などさまざまなひずみ経路に適用できる構成式が提案されている<sup>(7)-(10)</sup>. また, それらによる計算値と実験値の詳細な比較もなされている. しかしながら, ひずみ速度が 10~100 1/s 以上の高ひずみ速度に対してはこの

ような構成式を適用し, その妥当性を検討した例はあまりないようである. 以前著者らは, Benallal ら<sup>(11)-(13)</sup>が提案したテンソルの角度を導入し, 負荷, 除荷あるいは弾性変形, 塑性変形等を区別しない構成式を提案した<sup>(14)</sup>.

本論文では, 著者らが試作した二段階衝撃試験機<sup>(15)</sup>を用いて短いアルミニウム試験片についてねじり-逆ねじり実験およびねじりと引張りの組合せ衝撃実験を行い, 応力-ひずみ関係を測定し, その結果を上記の構成式による計算結果と比較し, 本構成式の妥当性を検討した. また, 引張りとねじりの組合せ衝撃に関するいくつかのシミュレーション計算も行い, 見かけの動的降伏条件などについて検討を行った.

### 2. 構成式および衝撃問題の解析

**2・1 構成式** 本構成式は過応力テンソルが内部状態変数テンソルとなす角度を導入することにより, 負荷, 除荷あるいは弾性変形, 塑性変形等を区別することなく統一的に表すとともに, 加工硬化やバウジング効果等種々の影響を表すことを目指したものであり, 詳細は文献(14)に譲るが, 以下の式から構成される.

\* 原稿受付 2002年10月18日.

<sup>\*1</sup> 正員, 金沢大学大学院(〒920-8667 金沢市小立野2-40-20).

<sup>\*2</sup> 正員, 金沢大学工学部.

E-mail: shin@kyod.ms.t.kanazawa-u.ac.jp

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \dot{\epsilon}_{ij}^e + \delta_{ij} \frac{\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{kk}^e \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{g(\bar{O})}{\bar{O}} O_{ij} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$O_{ij} = s_{ij} - a_{ij}, s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{kk}}{3}, \bar{O} = \sqrt{\frac{3}{2}} O_{ij} O_{ij} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$g(x) = \exp(C_1 + x/C_2) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{3}{2}} a_{ij} a_{ij} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\dot{a}_{ij} = K \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$K = K_0 \beta(\xi) + K_1 (1 - \beta(\xi)), \quad 0 \leq \beta(\xi) \leq 1 \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\xi = \frac{BC}{CC'} = \frac{\sqrt{1-s^2+s^2 \cos^2 \theta} - s \cos \theta}{2\sqrt{1-s^2+s^2 \cos^2 \theta}} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\cos \theta = \frac{O_{ij} a_{ij}}{\sqrt{O_{ij} O_{ij}} \sqrt{a_{ij} a_{ij}}} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$s = \bar{\alpha} / \bar{\alpha}_{max}, K_0 = K_{sat}(0), K_1 = K_{sat}(\bar{\alpha}_{max}) \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $\sigma_{ij}$  は応力テンソル、 $\epsilon_{ij}$  は全ひずみテンソル、 $\epsilon_{ij}^e$  および  $\epsilon_{ij}^p$  はそれぞれ弾性および塑性ひずみテンソルであり、 $(\cdot)$  は時間による微分を表す。 $s_{ij}$  は偏差応力テンソル、 $a_{ij}$  は移動硬化を表す内部状態変数テンソル、 $O_{ij}$  は過応力テンソルであり、 $\bar{\alpha}$  および  $\bar{O}$  はそれぞれミーゼスの条件による相当内部状態変数および相当過応力である。 $\bar{\alpha}_{max}$  は  $\bar{\alpha}$  が過去に取った最大値である。関数  $g(\cdot)$  は塑性ひずみ速度依存性を表す関数であり、一軸の衝撃試験から決定できる。本研究では銅材やアルミニウムに適用される式(5)の指数則を用いる<sup>(10)</sup>。また、 $E$  はヤング率、 $\nu$  はポアソン比、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである。

本構成式は式(7)に示すように、内部状態変数  $a_{ij}$  の増分は塑性ひずみ  $\epsilon_{ij}^p$  の増分に比例し、その比例係

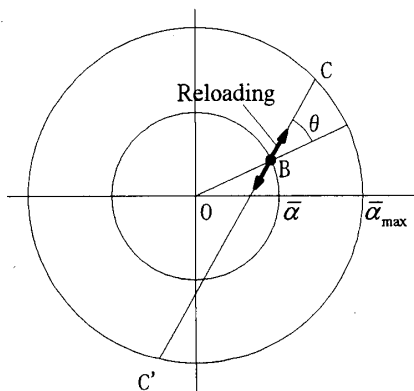


Fig. 1 Schematic of the loading condition

数  $K$  をいろいろ変化させることによりさまざまな現象を表すようにしたものであり、 $K$  を決定する式(8)の考え方は以下のものである。

図1は一般的な負荷の状態を模式的に表したものである。過去に  $\bar{\alpha}_{max}$  まで負荷された後、現在の負荷点B点からC点へ向って負荷されるとき、 $K$  は  $K_0 = K_{sat}(0)$  と  $K_1 = K_{sat}(\bar{\alpha}_{max})$  の間の値をとると考えられる。そこで、これを第一近似として、 $\xi = BC/CC'$  の関数  $\beta(\xi)$  を用い式(8)のように表す。なお、関数  $K_{sat}(\bar{\alpha})$  は単純な一軸負荷曲線から求まる。

式(5)中の  $C_1, C_2$  は材料定数であり一軸衝撃試験から決定でき、それぞれ降伏応力の値およびひずみ速度依存性の大きさに影響を与えられられる。簡単な計算により、 $C_2$  はひずみ速度急変試験から次式で求まる。

$$C_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\ln(\dot{\epsilon}_1^p / \dot{\epsilon}_2^p)} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $\sigma_1, \sigma_2$  はひずみ速度急変試験前後の応力であり、 $\dot{\epsilon}_1^p, \dot{\epsilon}_2^p$  はそのときの塑性ひずみ速度である。詳細はここで省くが、3章で述べる試験機を用いてひずみ速度急変試験を行った結果  $C_2 = 1.3 \text{ MPa}$  であった。

$C_1$  および式(8)中の関数型およびパラメータについては、物理的な根拠はあまりないが、計算値が静的なねじり-逆ねじり実験と一致するように、

$$K_{sat}(x) = E(k_1 + k_2 \cdot \exp(x/k_3)), \quad x: \text{MPa}$$

$$\beta(x) = \beta_1 x^{\beta_2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、

$$k_1 = 0.02, k_2 = 0.3, k_3 = 5 \text{ MPa}, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1.5$$

$$E = 70 \text{ GPa}, \nu = 0.33, C_1 = -83.5, C_2 = 1.3 \text{ MPa}$$

としたものである。なお、これらの関数の物理的な意味については定数の決定法も含めて今後検討が必要で

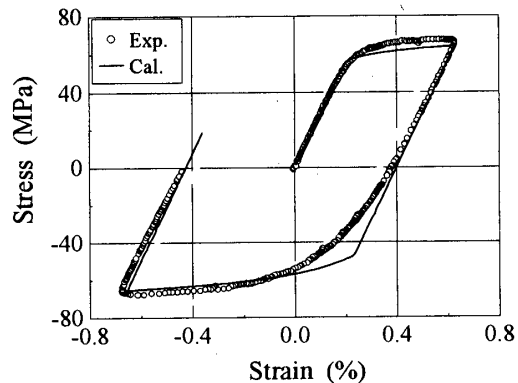


Fig. 2 Comparison of the static experimental value with calculated one

ある。静的なねじり-逆ねじりに対してこれらの定数や関数型を用いたときの計算値を実験値と比較した結果を図2に示す。図2を見れば、逆負荷時の再降伏付近で応力の計算結果は実験よりやや大きくなるが、この点を除けば両者がほぼ一致している。

**2.2 薄肉円筒衝撃問題の解析** ラグランジュ座標系において、図3に示すような、衝撃引張りおよびねじりを受ける薄肉円筒を考える。このような問題の基本式は次のように表される。

引張りに対して

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \dot{\varepsilon}^p \quad \dots\dots\dots (14)$$

ねじりに対して

$$\rho R \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial x}, R \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{1}{G} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \dot{\gamma}^p \quad \dots\dots\dots (15)$$

となる。ここで、 $v, \sigma$  および  $\varepsilon$  はそれぞれ軸方向の速度、応力およびひずみで、 $\omega, \tau$  および  $\gamma$  は角速度、せん断応力およびせん断ひずみである。 $\rho, E, G$  および  $R$  はそれぞれ密度、ヤング率、横断面係数および半径である。なお、式(14)と式(15)中の三つの式はそれぞれ運動方程式、適合条件式および構成式である。

引張りとなねじりの組合せ負荷の場合、応力成分と塑性ひずみ成分は

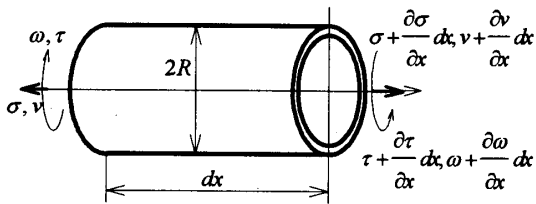


Fig. 3 Thin walled cylinder

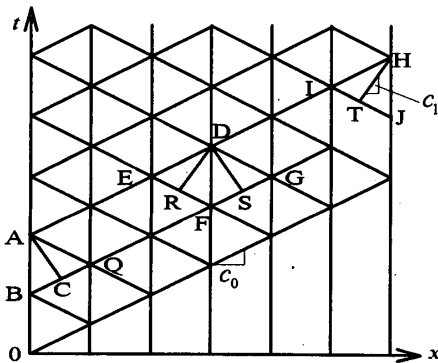


Fig. 4 Characteristic mesh used for numerical calculation

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma, \sigma_{12} = \tau, \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0 \\ \varepsilon_{11}^p &= \varepsilon^p, \varepsilon_{12}^p = \frac{1}{2} \gamma^p \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

となり、これらを本構成式に代入することにより、軸方向およびねじり方向の塑性ひずみはそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}^p &= \frac{3}{2} g(\bar{O}) \frac{2\sigma/3 - a_{11}}{\bar{O}} \\ \dot{\gamma}^p &= 3g(\bar{O}) \frac{\tau - a_{12}}{\bar{O}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \bar{O} &= \sqrt{\left(\sigma - \frac{3}{2} a_{11}\right)^2 + 3(\tau - a_{12})^2} \\ \bar{a} &= \sqrt{\frac{9}{4} a_{11}^2 + 3a_{12}^2} = \frac{3}{2} \sqrt{a_{11}^2 + \frac{4}{3} a_{12}^2} \\ \dot{a}_{11} &= K \dot{\varepsilon}^p, \dot{a}_{12} = \frac{K}{2} \dot{\gamma}^p \\ \cos \theta &= \frac{\left(\sigma - \frac{3}{2} a_{11}\right) a_{11} + 2(\tau - a_{12}) a_{12}}{\sqrt{\left(\sigma - \frac{3}{2} a_{11}\right)^2 + 3(\tau - a_{12})^2} \sqrt{a_{11}^2 + \frac{4}{3} a_{12}^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

連立方程式(14)と式(15)は準線形双曲形1階偏微分方程式系であり、特性曲線法<sup>(17)(18)</sup>を用いて解くことができる。すなわち、特性曲線は

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \pm c_0, c_0 = \sqrt{E/\rho} \\ \frac{dx}{dt} &= \pm c_1, c_1 = \sqrt{G/\rho} \quad \dots\dots\dots (19) \\ \frac{dx}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

となり、連立方程式はこれらの特性曲線に沿って次の全微分形に直すことができる。

$$\begin{aligned} d\sigma \mp \rho c_0 dv &= -E \dot{\varepsilon}^p dt, dx = \pm c_0 dt \\ d\sigma - E d\varepsilon &= -E \dot{\varepsilon}^p dt, dx = 0 \\ d\tau \mp \rho c_1 R d\omega &= -G \dot{\gamma}^p dt, dx = \pm c_1 dt \\ d\tau - G d\gamma &= -G \dot{\gamma}^p dt, dx = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (20)$$

初期条件および境界条件を与えれば、この特性曲線に沿って差分をとることにより、各変数の値を求めることができる。図4に横軸を衝撃端からの距離  $x$ 、縦軸を時間  $t$  とした場合の縦波の特性曲線網を示す。本論文では、計算を単純化するために、特性曲線網は縦波のものを用い、図4に示すねじりに対する特性曲線網との交点 R, S 点の値は、次式に示すような補間で求めた。なお、このような近似でも十分な精度が得られることは既に確かめてある。

$$\begin{aligned} \phi_R &= \phi_F + c(\phi_E - \phi_F) \\ \phi_S &= \phi_F + c(\phi_C - \phi_F) \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここで、 $\phi = \sigma, \tau, \varepsilon, \gamma, \dots$  であり、 $c = c_1/c_0$  である。

本研究では、以上のような構成式と解析方法を用い、3章に述べる試験機の実験結果より得られる軸方向速度および角速度を境界条件として与え、試験片のひずみおよび応力を計算し、実験結果と比較し本構成式の妥当性を検討する。

3. 実験方法および実験材料

衝撃試験機の概要を試験片とともに図5に示す。図5(a)は二段階衝撃試験機の概略であり、トーションバーを利用したもので、入力棒と出力棒の間に試験片を取付ける。入力棒および出力棒は、市販の軸受用丸棒(NB ファインシャフト, 日本ベアリング社)から切り取ったもので、長さはそれぞれ1200 mmと1300 mmで、直径はともに15 mmである。図5(a)に示すように入力棒の試験片側A点とB点をそれぞれクランプし、左端C点に設置された組合せ荷重装置により、AB間およびBC間にそれぞれ大きさおよび向きの異なる組合せ静荷重を蓄える。その後二つのクランプをA, Bの順に解放することによって応力波を発生させ、試験片に二段階の組合せ荷重を加える。BC間およびAB間の軸方向およびねじりの静荷重はそれぞれ適当な位置に貼付したひずみゲージG1~G4により測定する。試験片に生ずる軸ひずみ $\epsilon$ およびせん断ひずみ $\gamma$ はそれぞれ試験片中央部に貼付したゲージG5, G6で測定し、また試験片を透過し

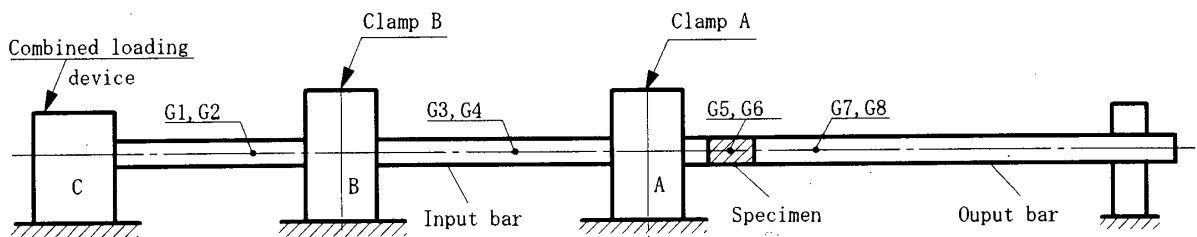
た軸方向荷重およびせん断荷重はそれぞれ出力棒に貼付したゲージG7, G8で測定しこれによる応力を試験片の応力とみなした。

本試験機では、二つのクランプAおよびBを設け、それぞれのくさび片を連結棒で連結することによってそれらをほぼ同時に解放する。図5(b)はこのときの入力棒および連結棒中を伝ばする応力波の様子を示すものである。打撃棒により連結棒を打撃すると、まずクランプAが解放され、入力棒内にBに向かって除荷波が伝ばしていく。それと同時に連結棒内にも応力波が伝ばし、この応力波は時間 $T=l/c_0$ 後にクランプBに到達しこれを解放する。ここで、 $c_0$ は連結棒中の縦波の伝ば速度、 $l$ は二つのクランプ間の距離である。このようにすればクランプ間の距離にもよるが、1回の打撃で二つのクランプを100  $\mu$ s オーダの時間差で解放することが可能である。同試験機を用いて性能試験を行い、一次元伝ば理論と比較し、両クランプの立上り時間がともに約50  $\mu$ sで、衝撃試験機として十分であることがわかった<sup>(15)</sup>。

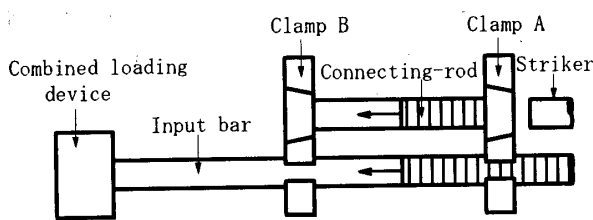
図5(c)は試験片および接着部の寸法を示したもので、試験片は直径15 mm、肉厚1 mmで市販のアルミニウム円筒から切り取った長さ60 mmのものを用いた。その化学組成を表1に示す。実験では試験片直前入力棒側の軸方向変位および回転角をそれぞれ2台のツィンマー(ZimmerOHG model 100 D, ツィンマー・ジャパン社)により測定し、それを時間に対して微分したものを境界条件として計算を行い、実験に測定した試験片中央部でのひずみ、および試験片出力端での応力と比較した。また、試験片と入出力棒の連結には

Table 1 Chemical composition of specimen [wt.%]

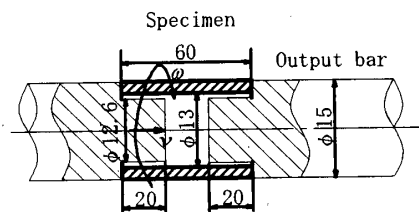
Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Zn
0.04	0.15	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01



(a) Schematic of the impact test machine



(b) Stress wave propagation



(c) Details of specimens

Fig. 5 The impact test machine and the specimens

接着剤を用いることとした。接着剤は熱硬化性接着剤、Three Bond 2082 Cであり、80°Cで1時間保持し硬化させた。

#### 4. 計算と実験の比較

**4-1 衝撃ねじり-逆ねじり実験** 図6に本試験機を用いた衝撃ねじり-逆ねじりの実験結果と計算結果の比較を示す。図6中、白丸および実線はそれぞれ実験および計算で得られた応力-ひずみ関係であり、細線は静的なねじり-逆ねじり実験結果である。なお、計算は、これ以後のものも、試験片長さ20mmとし両側の接着部はないものとして行い、応力は出力端での値、ひずみは中央での値である。図6をみれば、ひずみ速度依存性が見られ、アルミニウム試験片は動的負荷にも静的な試験と同様にバウジング効果が見られる。このようなバウジング効果はOgawa<sup>(19)</sup>が純鉄を用いて行った衝撃引張圧縮の結果にも現れている。また、本構成式による計算値は図2の静的な場合と同様に逆負荷時の遷移域を除けば実験値とほぼ一致しており、本構成式は高ひずみ速度にも適用できると思われる。なお、図7に境界条件として与えた回転角速度と

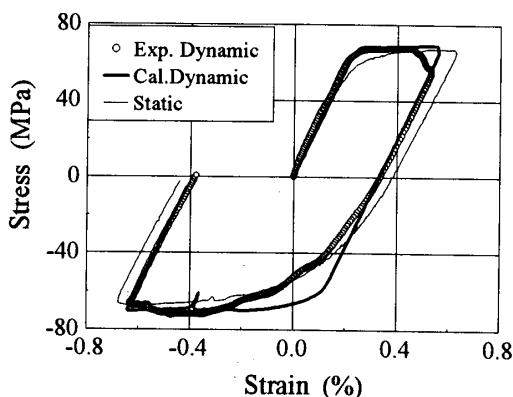


Fig. 6 Comparison of the experimental value with calculated one under impact torsion and inverse torsion

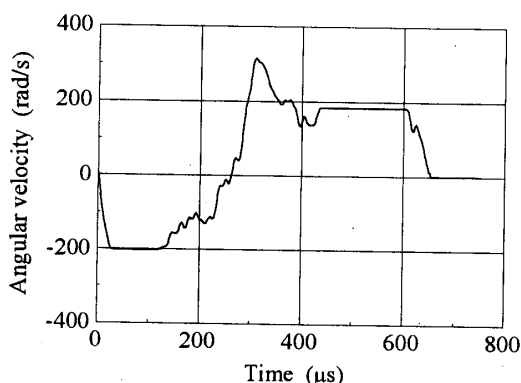
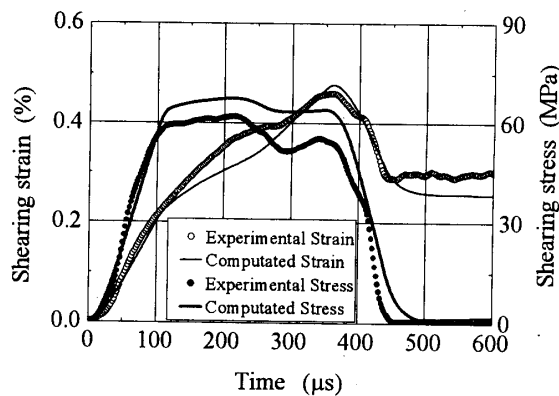
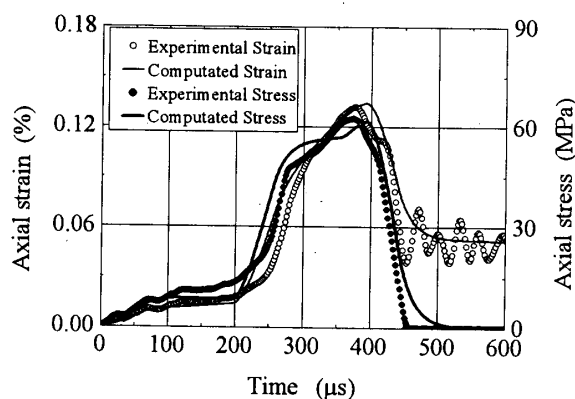


Fig. 7 The relation between angular velocity and time



(a) Torsional direction



(b) Axial direction

Fig. 8 Comparison of the experimental value with calculated one under combined loadings

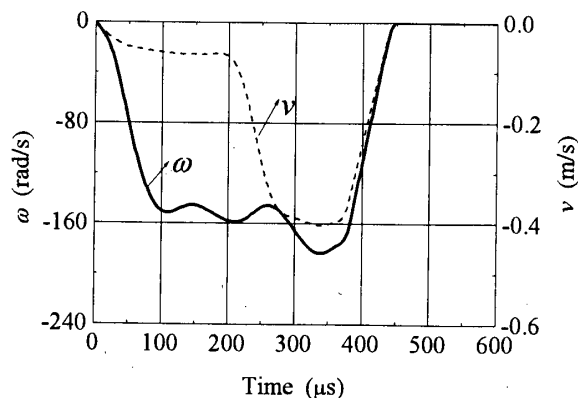


Fig. 9 Applied axial and angular velocities

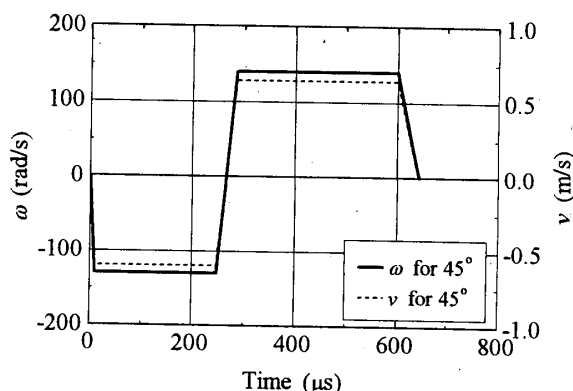


Fig. 10 Applied axial and angular velocity

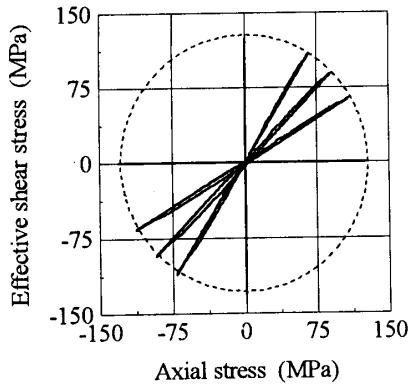


Fig. 11 Calculated stress path

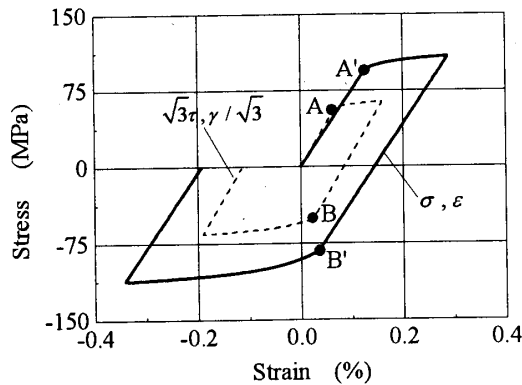


Fig. 12 Stress-strain relation

時間の関係を示す。

**4・2 組合せ衝撃実験** 図8はまず入力棒にクランプAを締付ねじり荷重を加えた後、クランプBを締付、さらにBC間に引張荷重を加えて解放したときの応力およびひずみの測定結果と計算結果を比較したものである。図8(a)中、白丸印および黒丸印はそれぞれせん断ひずみおよびせん断応力の実験結果であり、細線および実線はそれらに対応する計算値である。図8(b)中、白丸印および黒丸印はそれぞれ軸方向のひずみおよび応力の実験結果であり、細線および実線はそれらに対応する計算値である。図8(a)、(b)を見れば、塑性変形の初期においてねじりによるせん断ひずみがやや小さい[図8(a) 150  $\mu$ s~280  $\mu$ sの間]が、計算値と実験値はほぼ一致しており、本構成式および用いた材料定数は妥当であると思われる。なお、計算では境界条件としてねじり-逆ねじりと同様に、試験片直前の回転角および軸方向変位を測定し、それらを時間に対して微分したもの(図9の $\omega, v$ )を回転角速度および軸方向変位速度として用いた。図9によれば、クランプAの解放時に若干の軸方向変位速度が発生している。これは、クランプBの締付によって、AB間にも微小な引張荷重が加わったためと思われる。

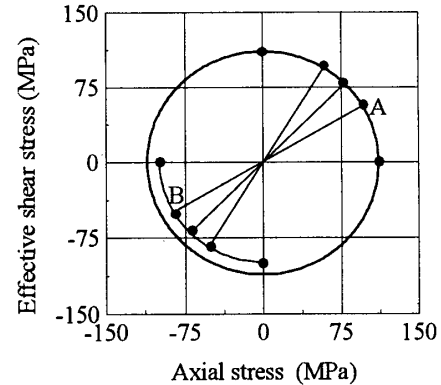


Fig. 13 Calculated yield stress under combined tension and torsion

**4・3 比例負荷逆負荷時の計算例** 引張り-ねじりの組合せ衝撃負荷逆負荷を想定したシミュレーション計算を行い、見かけの降伏条件などについて検討を行った。図10は、計算時に試験片入力棒側端面に与えた回転角速度 $\omega$ と軸方向変位速度 $v$ の一例であり、このような境界条件 $\omega$ と $v$ の振幅を変え計算を行い得られた応力経路を図11に示す。図12に応力経路が約 $30^\circ$ のとき $\sigma$ と $\varepsilon$ 、 $\sqrt{3}\tau$ と $\gamma/\sqrt{3}$ の関係を示す。図12から応力-ひずみ関係が直線から離れはじめるA、A'およびB、B'の応力値をそれぞれ荷重時および逆負荷時の降伏点としたものをまとめて図13に示す。なお、荷重時逆負荷時の各降伏点において、引張応力とねじり応力は同一時間での値である。図13を見れば、負荷逆負荷時に降伏点はミーゼスの円の上にある。また、逆負荷時はバウジング効果により円の半径は小さくなる。

## 5. 結 言

本研究では、著者らが提案した逆負荷時にも適用できる動的構成式を用い引張りとねじりの組合せ衝撃を受ける薄肉円筒の応力-ひずみ関係を計算し、二段階衝撃試験機による実験結果と比較し、その妥当性を検討した。結果をまとめると以下のようなものである。

(1) 本構成式では、内部変数テンソルとその増分がなす角度を導入することにより、除荷、荷重状態を記述している。本構成式を用いれば、降伏応力を定義する必要なく、また、弾性域、塑性域を区別することなく、変形挙動を表すことができる。

(2) アルミニウムについて、ひずみ速度急変試験および静ねじり試験から求めた材料定数を用いた計算値を、二段衝撃試験機により得られたねじり-逆ねじり、およびねじり-引張りの実験結果と比較し、両者は

ほぼ一致していることがわかった。

(3) 比例負荷逆負荷時のシミュレーション計算結果により、負荷逆負荷時の降伏点はミーゼスの円の上にあるとともに、逆負荷時はパウジンガ効果により円の半径は小さくなることがわかった。

### 文 献

- (1) Lipkin, J. and Clifton, R. J., *Trans. ASME*, Ser. E, **37-12** (1970), 1107-1112.
- (2) 谷村真治・ほか3名, 機論, **44-378**, A (1983), 497-504.
- (3) 放生明廣・茶谷明義, 機論, **43-375**, A (1982), 3994-4001.
- (4) 福岡秀和・ほか3名, 機論, **43-367**, A (1982), 883-887.
- (5) 放生明廣・茶谷明義, 機論, **44-384**, A (1983), 2568-2576.
- (6) 放生明廣, 機論, **48-429**, A (1987), 633-640.
- (7) Perzyna, P., *Q. Appl. Math.*, **20-4** (1963), 321-332.
- (8) 佐々木克彦・石川博將, 機論, **59-562**, A (1993), 1451-1457.
- (9) 大野信忠・ほか3名, 機論, **63-609**, A (1997), 67-75.
- (10) Itoh, T., Chen, X., Nakagawa, T. and Sakane, M., *Trans. ASME*, Ser. H, **122-1** (2000), 1-9.
- (11) Benallal, A. and Marquis, D., *Trans. ASME*, Ser. H, **109-10** (1987), 326-336.
- (12) Moosbrugger, J.C. and McDowell, D.L., *Trans. ASME*, Ser. H, **111-1** (1989), 87-98.
- (13) 中村俊哉・ほか3名, 機論, **66-649**, A (2000), 88-93.
- (14) Hojo, A., ほか3名, *APCFS & ATEM'01, JSME-MMD, SENDAI*, (2001), 472-477.
- (15) 申建汎・ほか3名, 機論, **68-676**, A (2002), 1775-1781.
- (16) 放生明廣・茶谷明義・佐々木芳彦, 材料, **34-387** (1985), 1400-1405.
- (17) Courant, R. and Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics, II, Partial Differential Equations*, (1962), 424-427, Interscience.
- (18) Jeffrey, A. and Taniuti, T., *Non-Linear Wave Propagation*, (1964), 65-71, Academic.
- (19) Ogawa, K., *Exp. Mech.*, **24-2** (1984), 81-86.