UDC 621.313.3.013.4：537.612：621.318

論　文

調波有限要素法による磁気飽和を考慮した交流定常磁界解析

正　員　山　田　外　史　(金 沢 大)
非会員　魯　　　軍　偉　(金 沢 大)
正　員　別　所　一　夫　(金 沢 大)
正　員　吉　元　　　武　(石川高専)

1. まえがき

交流電気機械の磁界解析においては，一般的には渦電流および磁気飽和現象などを考慮しなければならない。加えて，定常状態を問題としなければならない場合が多い。文献によれば，このような解析を行うことが最も困難であると述べられている[1]。この問題に対して，過渡解析用のステップバイステップ法[2]を周期的定常状態に達するまで演算を行う方法，また定常状態においては1周期後に同じ状態を繰返す，すなわち時間周期境界条件を課し周期解を求める時間周期有限要素法が知られている[3][4]。しかしながら，空間の解析に有限要素法を用い，更に時間に関して差分法などを用いるために解析の手順が複雑なものとなる。

ところで，交流強制項を含む非線形回路の周期解を求める有力な手法として調波平衡法が知られている[5]。調波平衡法は，周期解が高調波の和として解を表現できることに基づいており，著者らはこの考えに着目し，交流定常状態の磁界解析のみを対象とした有限要素法を検討した。

本論文では，二次元直角座標系での上記の有限要素法の定式化を述べ，リアクトルおよび電磁石に適用し求めた解析結果と実験値の比較を行う。

Alternating-current Magnetic Field Analysis Including Magnetic Saturation by a Harmonic Balance Finite Element Method. By *Sotoshi Yamada*, Member, *Junwei Lu*, Non-member, *Kazuo Bessho*, Member (Kanazawa University) & *Takeshi Yoshimoto*, Member (Ishikawa College of Technology).

山田外史：正員，金沢大学工学部電気・情報工学科
魯　軍偉：非会員，金沢大学大学院自然科学研究科博士課程
別所一夫：正員，金沢大学工学部電気エネルギー変換実験施設
吉元　武：正員，石川工業高等専門学校電気工学科

2. 調波平衡法を導入した有限要素法

〈2・1〉 **解析の仮定**　本解析法を定式化を容易にするために，対象とする磁界を以下のように仮定する。

（1） 二次元直角座標系とする。

（2） 渦電流を考慮する準定常磁界とする。

（3） 交流励磁時の時間周期解を対象とする。

（4） 鉄心の磁気飽和を考慮するがヒステリシス特性，磁気異方性は無視する。

仮定(1)と(2)から，二次元直角座標系における磁気ベクトルポテンシャル A を用いた磁界解析方程式は，Maxwellの方程式より(1)式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A}{\partial y}\right)=-J_0+\sigma\frac{\partial A}{\partial t}+\sigma\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad\cdots\cdots(1)$$

ここで，A：磁気ベクトルポテンシャルの z 方向成分，ν：磁気抵抗率

本論文では，電流は z 方向に対して無限に連続して流れているとし，電気スカラポテンシャル ϕ に関し，$(\partial\phi/\partial z)=0$($\phi$：一定)とする。

〈2・2〉 **調波有限要素法**　ガラーキン法を適用して有限要素法の定式化を行う。(1)式にガラーキン法を適用すると，

$$\iint_{\text{全領域}}\left\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial A}{\partial x}\right)+\frac{\partial N_i}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A}{\partial y}\right)\right\}dxdy-\iint_{\text{全領域}}\left(J_0-\sigma\frac{\partial A}{\partial t}\right)N_i dxdy=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

となる。ここで，重み関数として一次三角要素の補間関数 N_i を用いることとする。

強制入力を含む非線形回路の解析に適用される調波平衡法[5]を有限要素法に取入れて，磁界分布の時間周

期解を求める解析の定式化を行う。以下，この手法を調波有限要素法（Harmonic Balance Finite Element Method＝HBFEM）と呼ぶことにする。

普通，交流機器に発生するひずみ波は，対称波であり奇数次高調波の和と表すことができる。すなわち，磁気ベクトルポテンシャル A，磁束密度 (B_x, B_y) および励磁電流密度 J_0 は

$$\left.\begin{aligned} A^i &= \sum_{n=1,3,5\cdots}\{A_{ns}{}^i \sin(n\omega t)+A_{nc}{}^i \cos(n\omega t)\} \\ B_x{}^e &= \sum_{n=1,3,5\cdots}\{B_{xns}{}^e \sin(n\omega t)+B_{xnc}{}^e \cos(n\omega t)\} \\ B_y{}^e &= \sum_{n=1,3,5\cdots}\{B_{yns}{}^e \sin(n\omega t)+B_{ync}{}^e \cos(n\omega t)\} \\ J_0{}^i &= \sum_{n=1,3,5\cdots}\{J_{ns}{}^i \sin(n\omega t)+J_{nc}{}^i \cos(n\omega t)\} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (3)$$

で与えられる。ここで，ω は励磁電流密度の基本角周波数であり，添字 i, e および n はそれぞれ節点番号，要素番号ならびに高調波次数を示す。また，添字 x, y はベクトル方向，添字 s, c は sin, cos 成分を示す。磁気ベクトルポテンシャルと磁束密度の間には以下の関係がある[(6)]。

$$B_{xns}=\partial A_{ns}/\partial y,\ B_{yns}=-\partial A_{ns}/\partial x,$$
$$B_{xnc}=\partial A_{nc}/\partial y,\ B_{ync}=-\partial A_{nc}/\partial x \quad \cdots\cdots (4)$$

次に，普通の鉄心の磁化特性は，仮定（4）に従い磁気飽和のみを考慮すると磁束密度 B の奇関数，すなわち，

$$H=H_{\text{odd}}(B) \quad \cdots\cdots (5)$$

と表すことができる。B は磁束密度の大きさを示す。よって，磁気抵抗率 ν は

$$\nu(t)=H_{\text{odd}}\{B(t)\}/B(t) \quad \cdots\cdots (6)$$

にて与えられ，偶関数である。（6）式に対称波である磁束密度を代入しフーリエ級数展開すると，磁気抵抗率は

$$\nu(t)=\nu_0+\sum_{n=2,4,6\cdots}\{\nu_{ns}\sin(n\omega t)+\nu_{nc} \times\cos(n\omega t)\} \quad \cdots\cdots (7)$$

となり，すなわち偶数次の高調波の和で表される。ここで，フーリエ係数は次式にて与えられる。

$$\nu_0=\frac{1}{T}\int_0^T \nu(t)dt \quad \cdots\cdots (8\text{ a})$$

$$\nu_{ns}=\frac{2}{T}\int_0^T \nu(t)\sin(n\omega t)dt \quad \cdots\cdots (8\text{ b})$$

$$\nu_{nc}=\frac{2}{T}\int_0^T \nu(t)\cos(n\omega t)dt \quad \cdots\cdots (8\text{ c})$$

1個の一次三角要素内（節点番号 $i=1, 2, 3$）における磁気ベクトルポテンシャル A は

$$A=A^1N_1+A^2N_2+A^3N_3 \quad \cdots\cdots (9)$$

にて表され，ここで N_i は補間関数であり次式で与えられる。

$$N_i=a_i+b_ix+c_iy \quad \cdots\cdots (10)$$

(x_i, y_i) を節点の座標，$\varDelta$ を三角要素の面積とすると，(10)式中の定数 a_i, b_i および c_i は(11)式となる。

$$a_i=x_jy_k-x_ky_j,\ b_i=y_j-y_k,\ c_i=x_k-x_j \quad \cdots\cdots (11)$$

(10)式で与えられる補間関数の一つ N_1 を選び，（7），（9）式と共に（2）式に代入し，第1項から第3項の各々積分を行い整理すると以下の式となる。

$$\begin{aligned} &\int_e\!\!\int\left\{\frac{\partial N_1}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial A}{\partial x}\right)\right\}dxdy \\ &=\sum_{i=1,2,3}\frac{b_1b_i}{4\varDelta}\{(d_{11}A_{1s}{}^i+d_{12}A_{1c}{}^i+d_{13}A_{3s}{}^i \\ &\quad +d_{14}A_{3c}{}^i+d_{15}A_{5s}{}^i+\cdots)\sin\omega t \\ &\quad +(d_{21}A_{1s}{}^i+d_{22}A_{1c}{}^i+d_{23}A_{3s}{}^i+d_{24}A_{3c}{}^i \\ &\quad +d_{25}A_{5s}{}^i+\cdots)\cos\omega t \\ &\quad +(d_{31}A_{1s}{}^i+d_{32}A_{1c}{}^i+d_{33}A_{3s}{}^i \\ &\quad +d_{34}A_{3c}{}^i+d_{35}A_{5s}{}^i+\cdots)\sin 3\omega t \\ &\quad +(d_{41}A_{1s}{}^i+d_{42}A_{1c}{}^i+d_{43}A_{3s}{}^i+d_{44}A_{3c}{}^i \\ &\quad +d_{45}A_{5s}{}^i+\cdots)\cos 3\omega t+\cdots\} \end{aligned} \quad \cdots\cdots (12\text{ a})$$

$$\begin{aligned} &\int_e\!\!\int\left\{\frac{\partial N_1}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A}{\partial y}\right)\right\}dxdy \\ &=\sum_{i=1,2,3}\frac{c_1c_i}{4\varDelta}\{(d_{11}A_{1s}{}^i+d_{12}A_{1c}{}^i+d_{13}A_{3s}{}^i \\ &\quad +d_{14}A_{3c}{}^i+d_{15}A_{5s}{}^i+\cdots)\sin\omega t \\ &\quad +(d_{21}A_{1s}{}^i+d_{22}A_{1c}{}^i+d_{23}A_{3s}{}^i+d_{24}A_{3c}{}^i \\ &\quad +d_{25}A_{5s}{}^i+\cdots)\cos\omega t \\ &\quad +(d_{31}A_{1s}{}^i+d_{32}A_{1c}{}^i+d_{33}A_{3s}{}^i+d_{34}A_{3c}{}^i \\ &\quad +d_{35}A_{5s}{}^i+\cdots)\sin 3\omega t \\ &\quad +(d_{41}A_{1s}{}^i+d_{42}A_{1c}{}^i+d_{43}A_{3s}{}^i+d_{44}A_{3c}{}^i \\ &\quad +d_{45}A_{5s}{}^i+\cdots)\cos 3\omega t+\cdots\} \end{aligned} \quad \cdots\cdots (12\text{ b})$$

$$\begin{aligned} &\int_e\!\!\int\left(J_0-\sigma\frac{\partial A}{\partial t}\right)N_1dxdy \\ &=[\{\varDelta J_{1s}/3+\sigma\omega(2A_{1c}{}^1+A_{1c}{}^2 \\ &\quad +A_{1c}{}^3)\varDelta/12\}\sin\omega t \\ &\quad +\{\varDelta J_{1c}/3-\sigma\omega(2A_{1s}{}^1+A_{1s}{}^2 \\ &\quad +A_{1s}{}^3)\varDelta/12\}\cos\omega t \\ &\quad +\{\varDelta J_{3s}/3+3\sigma\omega(2A_{3c}{}^1+A_{3c}{}^2 \\ &\quad +A_{3c}{}^3)\varDelta/12\}\sin 3\omega t \\ &\quad +\{\varDelta J_{3c}/3-3\sigma\omega(2A_{3s}{}^1+A_{3s}{}^2 \\ &\quad +A_{3s}{}^3)\varDelta/12\}\cos 3\omega t+\cdots] \end{aligned} \quad \cdots\cdots (12\text{ c})$$

ここで，定数 d_{ij} は（8）式にて求められるフーリエ係

数を含み(15)式に与える。

三角関数が直交関数列であることより，(2)式の演算の結果を三角関数の各係数にてまとめ零と置くと，次式のマトリックス方程式を導くことができる。

$$\frac{1}{4\varDelta}\{(b_1b_1+c_1c_1)\boldsymbol{D}(b_1b_2+c_1c_2)\boldsymbol{D}(b_1b_3+c_1c_3)\boldsymbol{D}\}\{A\}+\frac{\sigma\omega\varDelta}{12}\{2\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{N}\}\{A\}=\{K_1\} \quad\cdots\cdots(13)$$

ここで，列ベクトル $\{A\}$ および $\{K_1\}$ は以下の式にて与えられる。

$$\begin{aligned}\{A\}=\{&A_{1s}{}^1A_{1c}{}^1A_{3s}{}^1A_{3c}{}^1A_{5s}{}^1A_{5c}{}^1,\cdots,\\&A_{1s}{}^2A_{1c}{}^2A_{3s}{}^2A_{3c}{}^2A_{5s}{}^2A_{5c}{}^2,\cdots,\\&A_{1s}{}^3A_{1c}{}^3A_{3s}{}^3A_{3c}{}^3A_{5s}{}^3A_{5c}{}^3,\cdots\}^T\end{aligned} \quad\cdots\cdots(14\,\mathrm{a})$$

$$\{K_1\}=\varDelta/3\{J_{1s}J_{1c}J_{3s}J_{3c}J_{5s}J_{5c},\cdots\}^T \quad\cdots(14\,\mathrm{b})$$

また，(13)式中のブロック行列 $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{N}$ は，それぞれ以下の式で得られる。

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}d_{11}&d_{12}&d_{13}&d_{14}&d_{15}&\cdots\\d_{21}&d_{22}&d_{23}&d_{24}&d_{25}&\cdots\\d_{31}&d_{32}&d_{33}&d_{34}&d_{35}&\cdots\\d_{41}&d_{42}&d_{43}&d_{44}&d_{45}&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\nu_0-\nu_{2c}&\nu_{2s}&\nu_{2c}-\nu_{4c}&-\nu_{2s}+\nu_{4s}&\nu_{4c}-\nu_{6c}&-\nu_{4s}+\nu_{6s}&\cdots\\&2\nu_0+\nu_{2c}&\nu_{2s}+\nu_{4s}&\nu_{2c}+\nu_{4c}&\nu_{4s}+\nu_{6s}&\nu_{4c}+\nu_{6c}&\cdots\\&&2\nu_0-\nu_{6c}&\nu_{6s}&\nu_{2c}-\nu_{8c}&-\nu_{2s}+\nu_{8s}&\cdots\\&&&2\nu_0+\nu_{6c}&\nu_{2s}+\nu_{8s}&\nu_{2c}+\nu_{8c}&\cdots\\&\text{対 称}&&&2\nu_0-\nu_{10c}&\nu_{10s}&\cdots\\&&&&&2\nu_0+\nu_{10c}&\cdots\\&&&&&&\ddots\end{bmatrix} \quad\cdots\cdots(15)$$

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}0&-1&0&0&0&0&\cdots\\1&0&0&0&0&0&\cdots\\0&0&0&-3&0&0&\cdots\\0&0&3&0&0&0&\cdots\\0&0&0&0&0&-5&\cdots\\0&0&0&0&5&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix} \quad\cdots\cdots(16)$$

補間関数をそれぞれ N_2, N_3 とした場合についても同様に(2)式の計算を行い，まとめると1個の一次三角要素に対するマトリックス方程式，すなわち

$$\frac{1}{4\varDelta}\begin{bmatrix}(b_1b_1+c_1c_1)\boldsymbol{D}&(b_1b_2+c_1c_2)\boldsymbol{D}&(b_1b_3+c_1c_3)\boldsymbol{D}\\(b_2b_1+c_2c_1)\boldsymbol{D}&(b_2b_2+c_2c_2)\boldsymbol{D}&(b_2b_3+c_2c_3)\boldsymbol{D}\\(b_3b_1+c_3c_1)\boldsymbol{D}&(b_3b_2+c_3c_2)\boldsymbol{D}&(b_3b_3+c_3c_3)\boldsymbol{D}\end{bmatrix}\{A\}+\frac{\sigma\omega\varDelta}{12}\begin{bmatrix}2\boldsymbol{N}&\boldsymbol{N}&\boldsymbol{N}\\\boldsymbol{N}&2\boldsymbol{N}&\boldsymbol{N}\\\boldsymbol{N}&\boldsymbol{N}&2\boldsymbol{N}\end{bmatrix}\{A\}=\{K\} \quad\cdots\cdots(17)$$

を得る。ここで，列行列 $\{K\}$ は(18)式で与えられる。

$$\begin{aligned}\{K\}&=[\{K_1\}\{K_2\}\{K_3\}]^T\\&=\varDelta/3\{J_{1s}J_{1c}J_{3s}J_{3c}J_{5s}J_{5c},\cdots,\\&\quad J_{1s}J_{1c}J_{3s}J_{3c}J_{5s}J_{5c},\cdots,\\&\quad J_{1s}J_{1c}J_{3s}J_{3c}J_{5s}J_{5c},\cdots\}^T\end{aligned} \quad\cdots\cdots\cdots(18)$$

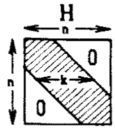
鉄心の飽和特性はブロック行列 $\boldsymbol{D}$ において考慮され，また $\boldsymbol{N}$ は調波次数を意味する行列であり，それぞれ磁気抵抗率行列，調波行列と呼ぶ。(17)式における未知変数は，各節点における磁気ベクトルポテンシャルの高調波成分の波高値である。

(17)式から更に通常の有限要素法の手続きに従い，全体の系を表す全体節点方程式を導くことができる。いま，ある磁界系において未知節点数を n とする静磁界解析でのシステム行列 $\boldsymbol{H}$ は，そのバンド幅を k とすれば図1(a)に示す構造となる。同じ問題の時間周期解を $(2m-1)$ 次までの高調波を考慮する調波有限要素法にて解析する場合，システム行列の大きさは図1(b)に示すように $2mn$ 次の行列でかつバンド幅は $2mk$ となる。

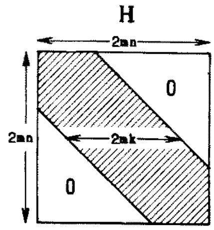
システム行列は磁束密度の値を仮定することにより定まるゆえ，全体節点方程式は緩和法またはNewton-Laphson 法を用い計算を行うことが必要である。以下の調波有限要素法の計算例では緩和法を用いて行った。

3. 調波有限要素法による磁界解析

〈3・1〉 リアクトルモデルへの適用　調波有限要素法を検証するため簡単な三脚鉄心からなるリアクトルモデルを対象に本手法を適用し，二次元非線形磁界における時間周期解を求める。図2に示すリアクトルの 1/4 の解析領域を対象に要素数 70，節点数 48 として解析を行った。鉄心の磁化特性は図3に示すように九次のべき級数関数にて表し，検証を簡単にするため



(a) 有限要素法による静磁界問題の場合



(b) (2*m*−1)次高調波までを考慮した調波有限要素法の場合

図 1 システム行列の構成
Fig. 1. Structure of the system matrix.

に渦電流は考慮しない。

まず最も簡単な場合として中央脚にギャップ（ギャップの長さ $\delta=1.0$ mm）をもつリアクトルモデルを基本周波数と第三調波成分のみを考慮した調波有限要素法にて磁界解析を行った。図4は各周波数成分に対するポテンシャルの等高線を示す。更に，図5は中央脚での磁束密度と励磁電流密度の波形を実線にて描いたものである。この問題では，渦電流を考慮していないゆえ，瞬時励磁電流密度を与え静磁界解析法にて対応する瞬時での磁界解析を行うことができる[7]。この

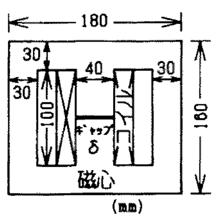


図 2 三脚鉄心によるリアクトルモデル
Fig. 2. Reactor model with three-legged core.

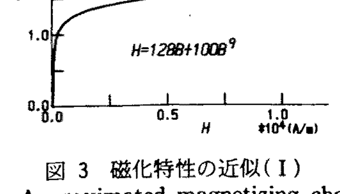
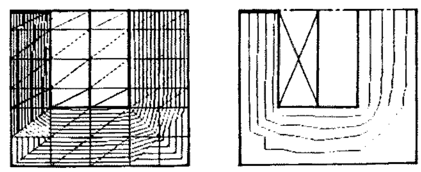


図 3 磁化特性の近似(Ⅰ)
Fig. 3. Approximated magnetizing characteristics(Ⅰ).

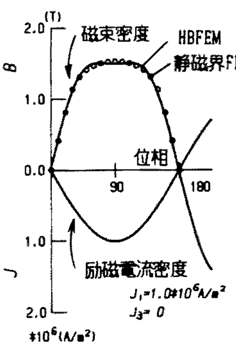
結果を図5に○印にて示す。この場合，ギャップによりリアクトルの総合的な磁化特性の非線形性が弱いため，磁束密度の高次の高調波成分発生が少なく，三次高調波成分までを考慮した調波有限要素法によっても十分精度の高い結果を得ることができた。

これに対して，図2のリアクトルのギャップを取除



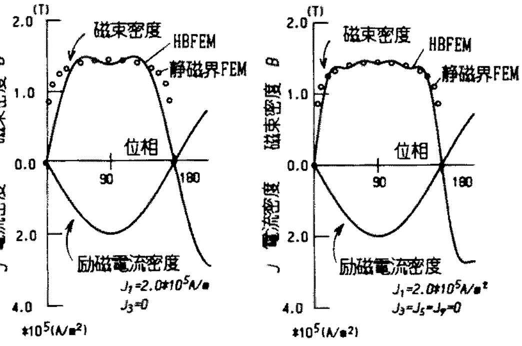
(a) 基本周波数成分　(b) 第三調波成分

図 4 等ポテンシャル線図
Fig. 4. Equi-potential line diagrams.



ギャップの長さ $\delta=1.0$ mm

図 5 調波有限要素法の検証(Ⅰ)
Fig. 5. Clarification of HBFEM(Ⅰ).



ギャップなし，正弦波励磁の場合

(a) 第三次高調波までを考慮した解析　(b) 第七次高調波までを考慮した解析

図 6 調波有限要素法の検証(Ⅱ)
Fig. 6. Clarification of HBFEM(Ⅱ).

いた場合の解析を同様に行った。図 6（a）は三次高調波まで，また図 6（b）は第七次高調波までを考慮した解析結果である。両者を比較すればギャップがない場合は鉄心の飽和特性が顕著に現れるため高次の調波成分までを考慮した解析が必要となることが明らかである。

以上の調波有限要素法の計算においては，減速緩和法（緩和係数 $E=0.15\sim0.3$）を用いた繰返し計算にて行っており，その繰返し回数は収束の判断条件を $\varepsilon=0.2\%$ としたとき，20〜40 回であった。なお，図 5 および図 6 での励磁電流密度成分の値は sin 成分を示し，cos 成分の値は零である。

〈3・2〉 くま取りコイル付き電磁石の解析　解析領域中に渦電流が存在する問題に調波有限要素法を適用するため，図 7（a）に示すくま取りコイル付き電磁石を解析対象に取上げた。鉄心にはフェライトコア（TDK 製　H_{7c1}）を用い，その磁化特性は（b）図にて近似し，その関数は付録に示す。くま取りコイルには渦電流が誘導されるものとして，渦電流解析の対象とする。

この解析では五次高調波成分までを考慮した調波有限要素法を適用し，解析領域は図 7（a）の断面の 1/2 を要素数 336，節点数 195 にて分割した。繰返し計算の収束条件値は，繰返し回数 k での磁気ベクトルポテンシャルの最大値 $A_{max}^{(k)}$ に対して

$$\left|\frac{A_i^{(k+1)}-A_i^{(k)}}{A_{max}^{(k+1)}}\right|<0.001 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

としている。計算に用いた定数は以下の値である。

励磁電流密度：　$J_{1s}=1.00\times10^6\ \mathrm{A/m^2}$

$J_{3s}=-5.4\times10^4\ \mathrm{A/m^2}$

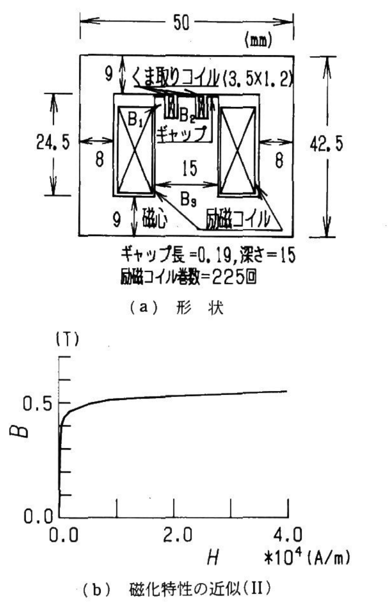
$J_{1c}=J_{3c}=J_{5s}=J_{5c}=0$

くま取りコイルの導電率：$\sigma=3.8\times10^7\ \mathrm{S/m}$

励磁基本周波数：$f=180\ \mathrm{Hz}$

なお，励磁電流密度は解析する実験の測定値である。

図 8 の結果は，基本周波数，第三および第五調波成分のそれぞれについての磁気ベクトルポテンシャルを位相 $n\omega t=0, 60, 90°(n=1, 3, 5)$ での瞬時値として描いた等ポテンシャル線図である。ただし，これらにおいては分布図を明りょうにするため基本周波数成分に対してベクトルポテンシャルを 3 倍周波数成分では 2.5 倍，5 倍周波数成分では 10 倍に拡大してから等ポテンシャル線図を描いている。基本周波数および 3 倍周波数成分の磁束分布図においては，くま取りコイル内側では磁束が小さく，くま取りコイル外側では磁束が集中している。この原因は，くま取りコイルに誘導される電流により，くま取りコイル内では減ずるように外側ではその反対に作用している結果であろうと考えられる。第五調波成分は極めて小さく，明りょうな分布を示していない。



（a） 形　状

（b） 磁化特性の近似（II）

図 7　くま取りコイル付き電磁石
Fig. 7.　Electromagnet with shading coil.

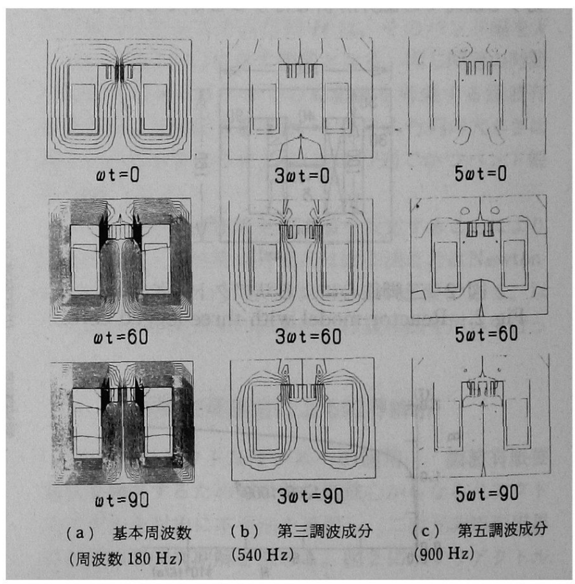


図 8　各調波に対する等ポテンシャル線図
Fig. 8.　Equi-potential line diagrams for each harmonic component.

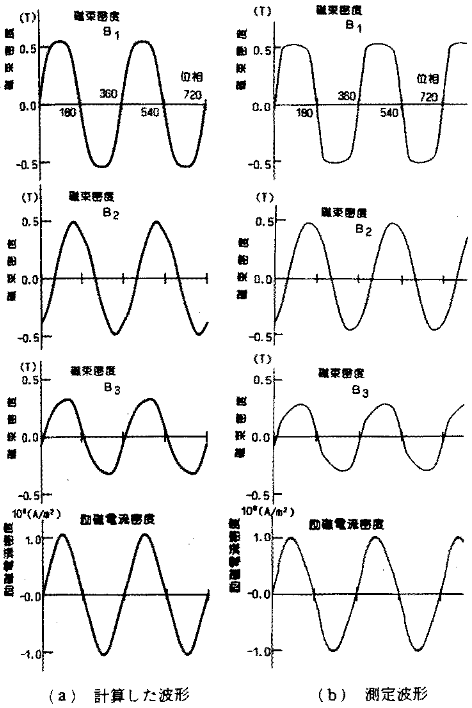


図 9 鉄心内の磁束密度波形

Fig. 9. Waveforms of flux density in core.

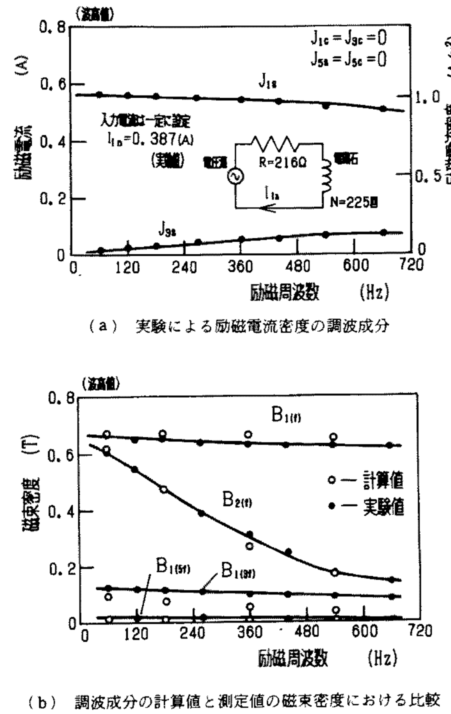


図 10 励磁周波数に対する磁束密度の調波成分

Fig. 10. Harmonic components of flux density versus magnetizing frequency.

図9は各鉄心部分における磁束密度および励磁電流密度波形を描いたものである。磁束密度 B_1, B_2 および B_3 は図7(a)に示すくま取りコイル外部，内部および中央脚での値を示す。実験では磁束密度は，探りコイルの電圧をディジタル積分(横河電機，type 3656)して測定した。くま取りコイル内部では高調波成分が排除された正弦波に近くまた位相遅れが大きいのに対し，くま取りコイル外側では磁束密度は飽和値に達し波形ひずみが観測される。

次に，励磁周波数を 60 から 660 Hz まで変化させた場合，磁束密度の各調波成分がどのように変化するかを計算し，実験値と照合した。この調波有限要素法では電流密度を入力することにより計算するために，まず正弦波電圧源に励磁コイルと抵抗(抵抗値216Ω)を直列接続した回路での励磁電流の周波数成分を測定し，その値を用い調波有限要素法による解析を行った。ただし，実験条件として電流の実効値を一定とした。図10(a)は励磁電流の周波数成分を測定した結果であり，この周波数分析には 8 bit 精度の周波数分析器（松下通信 VS-3310 A）により行った。ただし，第五調波以上の電流成分はその精度以下の値のために零と置き，また励磁電流密度は巻線が均一に巻かれているとして励磁電流値，コイル巻数および断面積から算出した。(b)図は磁束密度成分の解析結果と実験結果の比較を示す。この結果から，両者にはよい一致が見受けられるが，励磁周波数の周波数が高くなるほどまた基本周波数よりも第三調波成分において幾分誤差が大きくなっている。この原因として，解析ではくま取りコイル部分を4分割しており，励磁周波数での渦電流の表皮厚さ (f=660 Hz, δ=3.18 mm) に比べ十分小さく分割されていないためと考えられる。

4. ま と め

鉄心の動作領域が飽和に達するような場合の時間周期磁界分布を求める手法として調波有限要素法を提案し，実験値と計算値を比較することより定式化の正しいことの検証を行った。この手法では，交流定常状態における解を低次の調波成分の和と仮定することにより近似解を得るものであり，そのため時間偏微分に関する計算を除くことができる。また，時間周期解を求

める際に時間周期状態を定める条件を追加する必要がなく，その計算過程は非線形静磁界解析と基本的には同じように取扱うことができる。

本論文では，調波有限要素法を二次元直角座標において鉄心のヒステリシス特性を無視した場合の解析に限定したが，同手法はヒステリシス特性を考慮した場合，更に三次元座標系での磁界解析に対しても適用可能であり，今後発展させる予定である。

(平成元年2月3日受付)

文　献

(1) 中田：「磁界の解析技術」, 電学誌, 108, 217 (昭63-3)
(2) 別所・山田・金丸：「プランジャ形直流電磁石の過渡特性の解析」, 電学論B, 98, 625 (昭53-7)
(3) 原・内藤・卯本：「時間周期有限要素法による高圧回転機コロナ・シールド部の電界解析(I部数値解析法)」, 同上B, 102, 423 (昭57-7)
(4) 中田・河瀬・松原・伊藤：「時間周期有限要素法によるくま取りコイル付き電磁石の特性」, 同上B, 105, 475 (昭60-5)
(5) 例えば, 牛田・森：非線形回路の数値解析法, p. 117 (昭62) 森北出版
(6) 例えば, 中田・高橋：電気工学の有限要素法, 1章 (昭57) 森北出版
(7) P. Silvester & M. V. K. Chari: "Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problems", *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.*, **PAS-89**, 1642 (1970)

付　録

鉄心の磁化特性は，測定した特性を多項式および折れ線関数を組合せて下記の式にて近似した。磁束密度 B が正の場合は上の符号，負の場合は下の符号を用いる。

$$|B|<0.400:\ H=84.55B+1.58\times10^3B^5 \quad \cdots\cdots(\text{付}1)$$

$$0.400<|B|<0.435:$$
$$H=\pm50.0+1.43\times10^3(B\mp0.400) \quad \cdots\cdots(\text{付}2)$$

$$0.435<|B|<0.460:$$
$$H=\pm100.+4.00\times10^3(B\mp0.435) \quad \cdots\cdots(\text{付}3)$$

$$0.460<|B|<0.490:$$
$$H=\pm200.+1.00\times10^4(B\mp0.460) \quad \cdots\cdots(\text{付}4)$$

$$0.490<|B|<0.510:$$
$$H=\pm500.+2.00\times10^4(B\mp0.490) \quad \cdots\cdots(\text{付}5)$$

$$0.510<|B|<0.520:$$
$$H=\pm900.+6.00\times10^4(B\mp0.510) \quad \cdots\cdots(\text{付}6)$$

$$0.520<|B|:$$
$$H=\pm1500.+1.00\times10^5(B\mp0.520) \quad \cdots\cdots(\text{付}7)$$