

# 渦電流場の三次元有限要素計算法と 磁束収束装置基礎モデルの磁界解析

正員 吉元 武 (石川高専)  
正員 山田 外史 (金沢大)  
正員 別所 一夫 (金沢大)

## 1. まえがき

渦電流場の磁界解析は電気機械中に発生する損失の推定やこれを減少させるための機器設計の面、更に渦電流を利用した非破壊検査機器の設計分野において重要である。渦電流場の磁界解析は、従来、主として二次元または軸対称モデルに擬して有限要素法、差分法、積分方程式などを使用して行われてきた。しかし、渦電流は経路が複雑で、しかも有限領域内を循環するものであるという理由から、その正確な把握のためには特殊な場合を除いて三次元解析が必要である。特に近年、金沢大学で昭和56年から行われている渦電流を積極的に利用した磁束収束装置<sup>(1)</sup>の解析には、全体領域の傾向を把握するために三次元解析が必要である。二次元問題として既に多数の解析が行われて<sup>(2)-(4)</sup>、それぞれ部分的な説明はなされてきたが、なお全体場の実験値との比較の段階になると三次元解析が必要になってくる。

有限要素法を利用した三次元解析としては、ベクトルポテンシャルおよびスカラーポテンシャルを未知数とした三次元磁界解析が Chari 氏<sup>(5)</sup>や Salon 氏<sup>(6)</sup>らにより試みられてきた。また、薄板内の渦電流分布の求め方に限っては、渦電流が導体表面に集中しているとする仮定により、導体表面のみの解析に置換して二次元計算とする巧妙な方法もある<sup>(7)</sup>。しかし、厚みのある導体内に渦電流が流れるような一般的な場の解析法としては、前者のほうが一般的であろう。

Chari 氏、Salon 氏とも、渦電流場の定式化を示しているが、実際問題としては Chari 氏は静磁界の問題だけを扱っており、Salon 氏はその膨大なシステムマトリックスのゆえに極めて小さなモデルについてしか適用を行っていない。渦電流問題を扱う三次元有限要素法の第一の問題点は、領域の三次元分割および一節点につきベクトルポテンシャルの3軸成分と、スカラーポテンシャルからなる4個の未知数を扱うことによって必然的に発生する大規模なシステムマトリックスをいかに処理するかである。派生的な問題として現在、種々論じられているスカラーポテンシャルの意味付けを明確にする必要があると思われる。

本論文は、この三次元システムマトリックスを限られたメモリーで計算する一手法を提起するものである。方法は全システム方程式を四群に分割し、この四群の間で反復計算を行うことにより最終的な磁束密度分布、渦電流分布およびスカラーポテンシャル分布を求めようとするものである。三次元システムマトリックスの計算には、一般に ICCG 法が適応性があるといわれている<sup>(8)(9)(10)</sup>が、本論文においては四群に分割した複素係数システムマトリックスを、それぞれ直接法であるガウスの消去法により計算して高速化を図り、全体の整合を反復法により行う方法をとる。

スカラーポテンシャルについては実際の分布を求めて論じるのも一方法であり、この観点より検討を行った。

## 2. 磁界解析方程式および連立反復法

〈2.1〉 磁界解析方程式 交流励磁場で、かつ変位電流が無視できる準定常電流界の場合のマクスウェルの電磁界方程式は次式で表される。ここで、 $\vec{J}$  は強制電流密度、 $\vec{j}$  は渦電流密度、 $\vec{E}$  は渦電流を流すための電界の強さである。また、すべての変数は

A Finite Element Calculation Method of 3-D Eddy Current Diffusion Problem and its Application to a Flux Concentration Apparatus. By Takeshi Yoshimoto, Member (Ishikawa College of Technology), Sotoshi Yamada, Member & Kazuo Bessho, Member (Kanazawa University).

吉元 武：正員，石川工業高等専門学校  
山田外史：正員，金沢大学  
別所一夫：正員，金沢大学

角周波数  $\omega$  で正弦的に変化するものとする。

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{J}_s + \bar{J}_e \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{rot } \bar{E}_e = -j\omega \bar{B} \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{div } \bar{B} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{div } \bar{D} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} \dots\dots\dots (5)$$

$$\bar{J}_e = \sigma \bar{E}_e \dots\dots\dots (6)$$

$$\bar{B} = \text{rot } \bar{A} \dots\dots\dots (7)$$

(2), (7)式を組合せ、次の(8)式を得る。

$$\bar{E}_e = -j\omega \bar{A} - \text{grad } \phi \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $\phi$  がいわゆるスカラーポテンシャルであり、 $\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0$  に起因し、軸対称以外のモデルの渦電流問題に必要なってくる。

また、渦電流密度  $\bar{J}_e$  は(6), (8)式より

$$\bar{J}_e = -j\omega \sigma \bar{A} - \sigma \text{grad } \phi \dots\dots\dots (9)$$

更に、(9)式を(1)式に代入して

$$\frac{1}{\mu} \nabla(\nabla \bar{A}) - \frac{1}{\mu} \nabla^2 \bar{A} = -\sigma(j\omega \bar{A} + \nabla \phi) + \bar{J}_s \dots\dots\dots (10)$$

更に、導体中では渦電流のわき出しがないという条件より(11)式、また空間中では電荷の分布はないとして(12)式が得られる。

$$\text{div} \{ \sigma(j\omega \bar{A} + \text{grad } \phi) \} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

$$\text{div} \{ \epsilon_0(j\omega \bar{A} + \text{grad } \phi) \} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

(10)~(12)式が  $\bar{A}$  および  $\phi$  を求めるための三次元磁界解析方程式となる。ここで、(11), (12)式はそれぞれ導体中および空間中で成立すべき物理条件であり、全体方程式にまとめることにより領域全体のベクトルポテンシャル  $\bar{A}$  とスカラーポテンシャル  $\phi$  を関係づけるものになる。しかし、更に真空中の誘電率と導体導電率の比  $\epsilon_0/\sigma$  が導体として銅または鉄を対象とするとき  $10^{-19}$  のオーダーとなることを考慮すると、実際には(10), (11)式が事実上の三次元磁界解析方程式となる。

三次元磁界解析を始めるに際しては、通常ゲージ条件を明確にしてから行う。これまでの解析例をみると、大部分はクーロンゲージの付帯条件下で解かれ、まれにローレンツゲージを使用した例もある<sup>(8)</sup>。本来、ゲージは電磁界解析において不定さを除くと同時に式の取扱いを簡単にするためのものであるが、原方程式を元のまま解くことが可能であれば、ゲージ条件は設定しなくてもよい。実際このような解析法をとるものもある<sup>(9)</sup>。本論文でも二つの解析方程式(10)および(11)式をゲージ条件を仮定せずに扱う方法をとる。

まず、(11)式より

$$\nabla \bar{A} = -\nabla^2 \phi / j\omega \dots\dots\dots (13)$$

これを(10)式に代入してから、(10)式を X, Y, Z 各軸成分に分解する。 $\bar{A}$  および  $\bar{J}_s$  の各軸成分をそれぞれ  $A_x, A_y, A_z$  および  $J_{sx}, J_{sy}, J_{sz}$  とすれば、(10), (11)式は以下の四つの方程式群となる。

$$-\frac{1}{\mu} \nabla^2 A_x + j\omega \sigma A_x = J_{sx} - (\sigma \nabla \phi)_x + \frac{1}{j\omega \mu} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi) \dots\dots (14)$$

$$-\frac{1}{\mu} \nabla^2 A_y + j\omega \sigma A_y = J_{sy} - (\sigma \nabla \phi)_y + \frac{1}{j\omega \mu} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \phi) \dots\dots (15)$$

$$-\frac{1}{\mu} \nabla^2 A_z + j\omega \sigma A_z = J_{sz} - (\sigma \nabla \phi)_z + \frac{1}{j\omega \mu} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \phi) \dots\dots (16)$$

$$\nabla(\sigma j\omega(A_x \bar{u}_x + A_y \bar{u}_y + A_z \bar{u}_z) + \sigma \nabla \phi) = 0 \dots\dots\dots (17)$$

<2.2> ガラーキン法による定式化 (14)~(17)

式にガラーキン法を適用する。重み関数には補間関数  $N_i$  を使用する。各軸成分の方程式(14)~(16)の代表として、例えば(14)式を考え、これを積分形で表すと

$$-\int_V \left\{ N_i \frac{1}{\mu} \nabla^2 A_x \right\} dv + j\omega \sigma \int_V N_i A_x dv = \int_V N_i J_{sx} dv - \int_V N_i (\sigma \nabla \phi)_x dv + \frac{1}{j\omega \mu} \int_V N_i \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi) dv \dots\dots\dots (18)$$

(18)式の左辺第1項は  $N_i$  をスカラー、 $\bar{R}$  をベクトルとした場合の次のベクトル公式

$$\nabla(N_i \bar{R}) = N_i (\nabla \bar{R}) + (\nabla N_i) \bar{R} \dots\dots\dots (19)$$

とガウスの定理を使用することにより、次の(20)式のように変形される。

$$-\int_V \left\{ N_i \frac{1}{\mu} \nabla^2 A_x \right\} dv = -\frac{1}{\mu} \int_S N_i \frac{\partial A_x}{\partial n} dS + \frac{1}{\mu} \int_V \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) dv \dots\dots\dots (20)$$

(20)式の右辺第1項は全領域  $V$  を囲む  $S$  上での  $N_i (\partial A_x / \partial n)$  の積分であるので、自然境界条件または固定境界条件が成立する場合いずれも0となる<sup>(11)</sup>。

また、(18)式の右辺第3項については積分項が  $\partial/\partial x (\nabla^2 \phi)$  であり、これは  $\phi$  を三次以上の補間関数で

表現した場合に限り現れる項で、二次以下の補間関数で表現した場合は零となる。この場合は(13)式を考慮合せ、クーロンゲージの成立している場を考慮していることと同等になる。

結局、(14)式は二次以下の補間関数をもつ立体要素を使用した場合は、次の(21)式ようになる。また、ほかの Y 軸および Z 軸成分に対する式も同様に变形される。

$$-\frac{1}{\mu} \int_V (\nabla N_i)(\nabla A_x) dv + j\omega \sigma \int_V N_i A_x dv = \int_V N_i J_{sx} dv - \int_V N_i (\sigma \nabla \phi)_x dv \dots (21)$$

一方、(17)式についても補間関数  $N_i$  を重み関数として同様な変換を行うと

$$\int_S N_i \sigma (j\omega \bar{A} + \nabla \phi) \bar{n} dS - \int_V (\nabla N_i) \sigma (j\omega \bar{A} + \nabla \phi) dv = 0 \dots (22)$$

第 1 項は領域から外へ流出する渦電流の総和と考えられ、定常状態において 0 と考えられるので、結局次の(23)式のように变形される。

$$\int_V (\nabla N_i) j\omega (A_x \bar{u}_x + A_y \bar{u}_y + A_z \bar{u}_z) dv + \int_V (\nabla N_i) \nabla \phi dv = 0 \dots (23)$$

結局、(21)式および(23)式に被解析モデルに適当な立体要素の補間関数を代入して、一要素あたりの未知数間の関係式を求め、これを全領域にわたって総合することにより、有限要素法による定式化が完了する。

### 〈2.3〉 一次三角プリズムを用いたときの定式化

層状モデルの場合、領域底面に垂直に立てた三角柱により三次元領域を分割できる。この三角プリズムを立体要素とした場合の分割は、特別なメッシュジェネレータをもたなくてもプログラム上で容易にできる。また、定式化時の積分計算も二次元三角要素の面積積分公式が利用できる。反面、層状モデル以外に対してはモデル適合性が悪く、四面体要素と組合せねばならない。

図 1 のような X-Y 平面に垂直で一次補間関数を使用した三角プリズムを用いて、(21)式および(23)式を計算してみる。

まず、ベクトルポテンシャルおよびスカラーポテンシャルを次式のように表す。

$$\bar{A} = A_x \bar{u}_x + A_y \bar{u}_y + A_z \bar{u}_z \dots (24)$$

$$\phi = \sum_{k=1}^6 N_k \phi_k \dots (25)$$

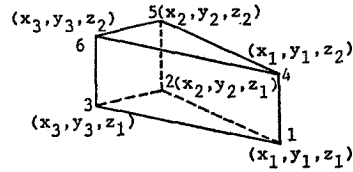


図 1 三角プリズム

Fig. 1. Prism element.

ここで、

$$A_x = \sum_{k=1}^6 N_k A_{xk}, \quad A_y = \sum_{k=1}^6 N_k A_{yk}$$

$$A_z = \sum_{k=1}^6 N_k A_{zk}$$

このときの補間関数は<sup>(12)</sup>、

$$N_i = (1 - \xi) \lambda_i \quad (i = 1, 2, 3) \\ = \xi \lambda_i \quad (i = 4, 5, 6) \dots (26)$$

ただし、

$$\xi = (z - z_1) / (z_2 - z_1) \\ \lambda_i = (d_i + e_i x + f_i y) / 2\Delta \dots (27)$$

(21)式および(23)式に代入後、まとめて次の(28)、(29)式を得る。以下において、 $\Delta$  および  $l$  は三角プリズムの断面積および高さである。

$$\left\{ \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} a_{i,j} & a_{i,j+3} \\ a_{i+3,j} & a_{i+3,j+3} \end{bmatrix} + j\omega \sigma \begin{bmatrix} b_{i,j} & b_{i,j+3} \\ b_{i+3,j} & b_{i+3,j+3} \end{bmatrix} \right\} \\ \times \begin{bmatrix} A_{x1} \\ A_{x2} \\ A_{x3} \\ A_{x4} \\ A_{x5} \\ A_{x6} \end{bmatrix} = \left\{ J_{sx} - (\sigma \nabla \phi)_x \right\} \frac{\Delta l}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \dots (28)$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{i,j} & a_{i,j+3} \\ a_{i+3,j} & a_{i+3,j+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{bmatrix} \right\} \\ = -j\omega l \left\{ \begin{bmatrix} p_{i,j} & p_{i,j+3} & q_{i,j} & q_{i,j+3} \\ p_{i+3,j} & p_{i+3,j+3} & q_{i+3,j} & q_{i+3,j+3} \end{bmatrix} * \right. \\ \left. * \begin{bmatrix} r_{i,j} & r_{i,j+3} \\ r_{i+3,j} & r_{i+3,j+3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} \right\} \dots (29)$$

ただし、各係数は以下のとおりである。また  $\delta_{i,j}$  はクロネッカーのデルタであり、 $i$  および  $j$  はそれぞれ 1, 2, 3 と変化する。

$$a_{i,j} = a_{i+3,j+3} \\ = \frac{2l}{24\Delta} (e_i e_j + f_i f_j) + (1 + \delta_{i,j}) \frac{\Delta}{12l}$$

$$a_{i+3,j} = a_{i,j+3}$$

$$= \frac{l}{24\Delta} (e_i e_j + f_i f_j) - (1 + \delta_{i,j}) \frac{\Delta}{12l}$$

$$b_{i,j} = b_{i+3,j+3} = \frac{2}{72} (1 + \delta_{i,j}) \Delta l$$

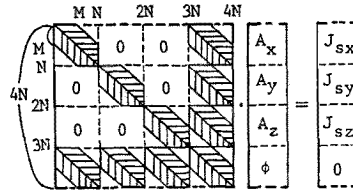
$$b_{i+3,j} = b_{i,j+3} = \frac{1}{72} (1 + \delta_{i,j}) \Delta l$$

$$p_{i,j} = p_{i+3,j+3} = \frac{2}{36} e_i, \quad q_{i,j} = q_{i+3,j+3} = \frac{2}{36} f_i$$

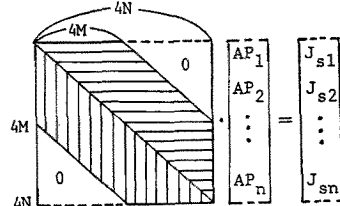
$$p_{i+3,j} = p_{i,j+3} = \frac{1}{36} e_i, \quad q_{i+3,j} = q_{i,j+3} = \frac{1}{36} f_i$$

$$r_{i,j} = r_{i,j+3} = -(1 + \delta_{i,j}) \frac{\Delta}{24l}$$

$$r_{i+3,j} = r_{i+3,j+3} = (1 + \delta_{i,j}) \frac{\Delta}{24l}$$



(a) 全体システムマトリックス



(b) バンド幅を最適化した場合

### 3. 反復計算法によるシステム方程式の解法

複素係数連立方程式(14)~(17)式を離散化して、一つの全体システムマトリックスで計算する場合には、

- (i) 1節点4変数によるマトリックスの膨大さ
- (ii)  $\phi$ の項によりバンド幅がフルマトリックスのそれに近くなる

などの問題がある。

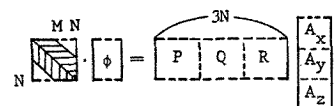
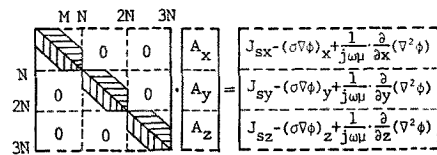
この場合、全節点数を  $N$ 、未知数が一つの場合のバンド幅を  $M$  と仮定して、全体システムマトリックスの構造は図2(a)のように、いわゆる対称へり付きバンドマトリックスになる。バンド幅は  $3N+M$  でほぼ  $4N$  に近い。このマトリックスバンド幅を最小化するために、変数列マトリックスを今までの

$$\begin{bmatrix} A_{x1} A_{x2} \cdots A_{xn} & A_{y1} A_{y2} \cdots A_{yn} \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix}^T$$

から次のように

$$\begin{bmatrix} A_{x1} A_{y1} A_{z1} \phi_1 & A_{x2} A_{y2} A_{z2} \phi_2 & \cdots \\ * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix}^T$$

と並べ変えて作成すると、マトリックス構造は図2(b)のようになり、バンド幅は  $4M$  に減少する。この場合のバンドマトリックスの容量は  $16NM$  とすることができる。本論文で提唱する方法のマトリックス構造は図2(c)のようになり、見掛け上  $A_x, A_y, A_z, \phi$  を変数分離した形になって、それぞれ別個に解くことができる。各群のシステムマトリックスはバンド幅  $M$  となり、バンドマトリックス容量は  $NM$  で、図2(b)に比較して  $1/16$  となり、計算データをディスクなどへ一時保存することを行えば、従来に比べてかなり実用的な問題に適用できることになる。個別方程式群は、システムマトリックスのコンパクト化により直



(c) 連立反復法の場合

$$\begin{aligned} A_x &= [A_{x1} \ A_{x2} \ A_{x3} \ \cdots \ A_{xn}]^T & AP_1 &= [A_{x1} \ A_{y1} \ A_{z1} \ \phi_1]^T \\ A_y &= [A_{y1} \ A_{y2} \ A_{y3} \ \cdots \ A_{yn}]^T & AP_2 &= [A_{x2} \ A_{y2} \ A_{z2} \ \phi_2]^T \\ A_z &= [A_{z1} \ A_{z2} \ A_{z3} \ \cdots \ A_{zn}]^T & \vdots & \\ \phi &= [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \cdots \ \phi_n]^T & AP_n &= [A_{xn} \ A_{yn} \ A_{zn} \ \phi_n]^T \\ J_{sx} &= [J_{sx1} \ J_{sx2} \ \cdots \ J_{sxn}]^T & J_{s1} &= [J_{sx1} \ J_{sy1} \ J_{sz1} \ 0]^T \\ J_{sy} &= [J_{sy1} \ J_{sy2} \ \cdots \ J_{syn}]^T & J_{s2} &= [J_{sx2} \ J_{sy2} \ J_{sz2} \ 0]^T \\ J_{sz} &= [J_{sz1} \ J_{sz2} \ \cdots \ J_{szn}]^T & \vdots & \\ & & J_{sn} &= [J_{sxn} \ J_{syn} \ J_{szn} \ 0]^T \end{aligned}$$

図2 マトリックス構造

Fig. 2. Structure of system matrix.

接法が使用でき、全体を反復法で計算するより高速である。

計算アルゴリズムの流れ図を図3に示す。最初、 $\phi$ の初期値を任意に与えて(14)~(16)式より  $A_x^{(1)}, A_y^{(1)}, A_z^{(1)}$  を個別に求める。これらを(17)式に代入して  $\phi^{(1)}$  を求める。次に、この  $\phi^{(1)}$  を与えて再度(14)~(16)式より2回目のベクトルポテンシャル  $A_x^{(2)}, A_y^{(2)}, A_z^{(2)}$  を求める。上記の過程を反復して、ベクトルポテンシャルおよびスカラーポテンシャルの収束値を求める。

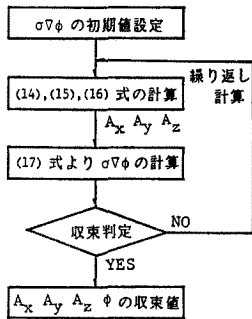


図 3 反復計算流れ図

Fig. 3. Iterative calculation algorithm.

$\phi$  の反復については過小緩和法を使用し、各方程式群を解くにはガウスの消去法を使用している。計算機使用に際して、一人あたりの使用メモリー領域が制限されている現状で実用的な問題を扱うには、一つの有用な方法であると考えられる。

また以上の方法は、いわゆる  $j\omega$  法であるので、飽和などの非線形性を正確に取扱うことはできないが、各部分の磁束波形を等価正弦波とみなすことにより近似的な取扱いは可能である。

#### 4. 交番磁界中に並行銅板を有するモデルの解析

〈4・1〉 解析モデル 図 4 に示すような交流励磁空心コイルにより、発生する交番磁界中に 2 枚の並行銅板が置かれたモデルの解析に、上述の連立反復計算法を適用してみた。解析時の空心コイルおよび銅板の寸法と相互の位置関係は図 5 に示す。これは、第 1 章で言及した磁束収束装置の基礎モデルである。三次元領域での対称性を利用して全領域の 1/8 を解析した。ベクトルポテンシャルの境界条件としては、Z 軸を固定境界条件 ( $\vec{A}=0$ )、外側境界条件は自然境界条件が成立するとした。スカラーポテンシャルの境界条件はこのモデルの場合、渦電流が垂直に流れる位置  $EF$  において、固定境界条件 ( $\phi=0$ ) を設定した。これは、

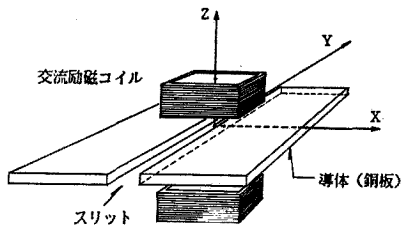


図 4 磁束収束基礎モデル

Fig. 4. Basic model of flux concentration apparatus.

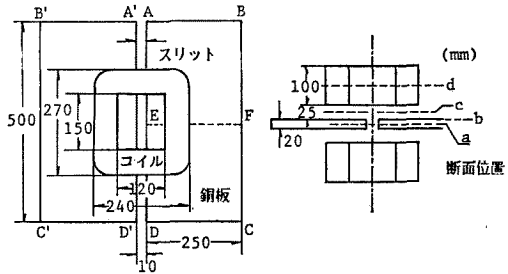


図 5 モデル配置

Fig. 5. Model configuration.

(9)式で表される渦電流と実際モデルでの渦電流の方向を一致させるためである。なお、1/8 領域の要素数は 2,160、節点数は 1,430 であり、計算機は大形計算機 M-382 をリージョン 6 MB で使用し、計算時間は 60 回の繰返しで約 45 分であった。

コイル印加電源の周波数は 60 Hz、銅板の導電率は  $8.62 \times 10^7$  S/m、スリット幅 10 mm、銅板厚みは 20 mm、コイルの起磁力は  $1.2 \text{ AT/mm}^2$  とする。

〈4・2〉 解析結果 図 6 に Y-Z 平面および Z-X 平面における磁束密度分布の実際の解析結果を示す。コイル電流による磁界と銅板中の渦電流による反作用磁界が影響し合って、スリット間で磁束の収束効果、導体上で磁束の反射現象が見られる。

図 7 は渦電流の中央面および最上面での分布であり、渦電流が励磁束を取囲むように流れて、特にスリ

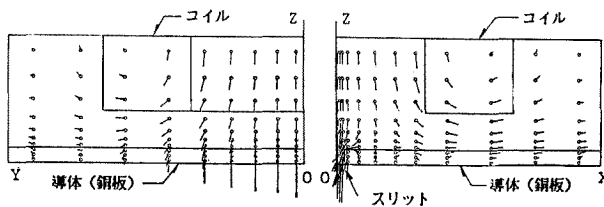


図 6 磁束密度分布

Fig. 6. Flux density distribution.

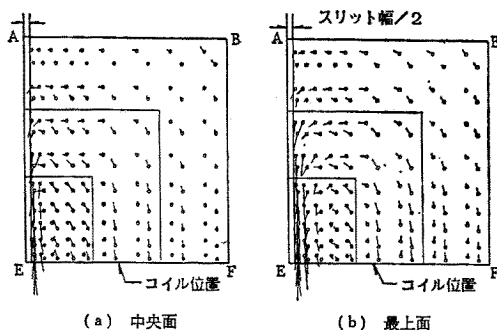


図 7 渦電流密度分布

Fig. 7. Density distribution of eddy current.

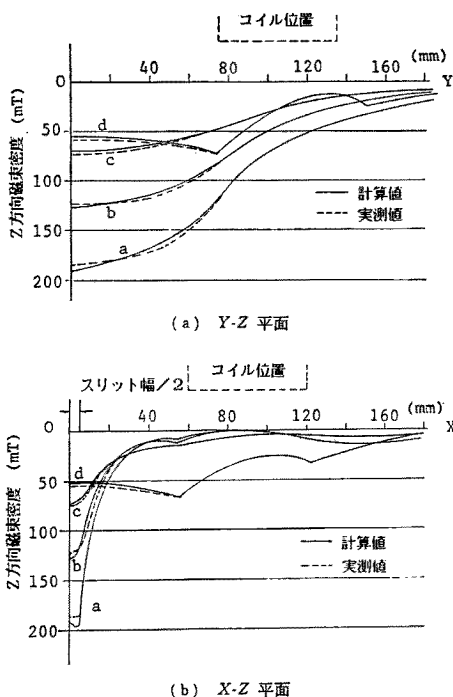


図 8 -Z 方向磁束密度 (絶対値) 分布

Fig. 8. Density distribution of -Z direction flux.

ットに隣接した縁には渦電流が集中しているのがわかる。この電流がスリット部の磁束を高める原因となっていることが推定される。

図 8 は -Z 方向の磁束密度絶対値の計算値と実測値の比較である。励磁電流を位相基準にとるとき各部の磁束密度は渦電流の影響により位相ずれを生ずる。計算値では実部および虚部の二乗と平方根より絶対値を求めた。実測値は極薄形のホール素子を使用して Z 方向磁束を求めている。値および傾向において良く一

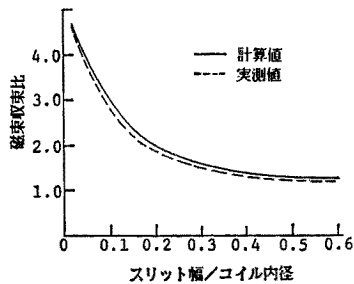


図 9 磁束収束比

Fig. 9. Ratio of flux concentration.

致している。X-Z 平面における磁束密度は、a 断面でギャップ中央より導体縁のほうがやや高く、以後急速に減少していく。b 断面、c 断面においては中央部において最大で、以後やはり減少していく。d 断面においては、コイル内部ではほぼ一定で、外部では直線的に減少していく。また、Y-Z 平面の磁束密度は a, b, c 断面とも中央部が最大で、以後徐々に減少していく。d 断面については X-Z 平面のそれとほぼ同様である。

図 8 を図 6 と比較するとき、図 6 ではコイルの内側と外側で磁束密度の Z 方向反転があったが、これはあくまで  $t=0$  の瞬時値を求めたもので、図 8 の磁束密度分布とは矛盾しない。コイルの内側と外側では位相が  $180^\circ$  近く異なるためである。

図 9 は磁束収束比の実測値との比較である。定電圧電源での銅板を、置かない場合の磁束密度に対する置いた場合のスリット中央部の磁束密度の比を磁束収束比と定義する。スリットの間隔を狭めるほど収束比が上がる。スリット幅/コイル内径の比を横軸にしてある。

### 5. スカラーポテンシャルの分布と働き

図 10 はコイル電流が -Z 軸方向に磁束を生ずるように流れているときの導体最上面におけるスカラーポテンシャル実部の分布である。E-F が中央部で、A-D

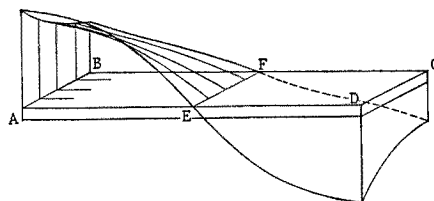


図 10 導体上のスカラーポテンシャル分布 (実部)

Fig. 10. Scalar potential distribution on a conductor plate.

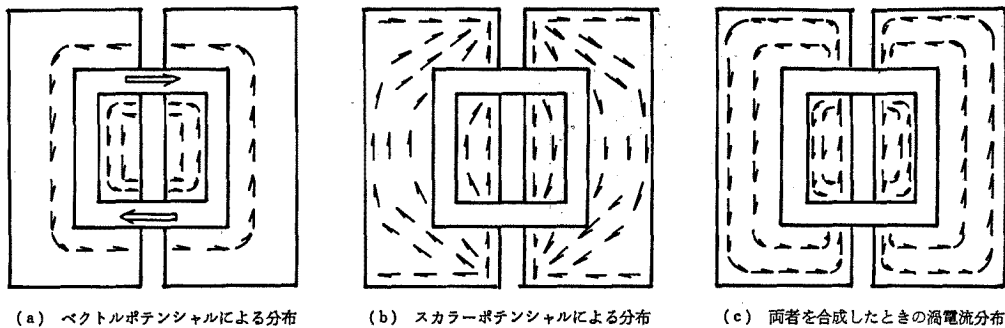


図 11 渦電流の構成  
Fig. 11. Composition of eddy currents.

がスリットに隣接した辺である。スカラーポテンシャルは  $B-F$  部より  $A-E$  部のほうが高くなっている。

スカラーポテンシャルに関しては、二次元問題については文献(13)に、また軸対称問題については文献(14)に明らかにされているように、導体の無限遠または途中での切断により、渦電流が励磁回路と対称な形で流れ得ない場合に、スカラーポテンシャルは考慮されなければならない。三次元問題に関してもこの考えは同様であるが、この場合、渦電流は三次元的広がりを有するので端効果を明確にできる。

以下、具体的に被解析モデルについてスカラーポテンシャルの働きを考えてみる。

渦電流密度は(9)式より

$$\vec{J}_e = -j\omega\sigma\vec{A} - \sigma \text{grad } \phi \dots\dots\dots(9)$$

と表される。このうち、スカラーポテンシャルに起因する成分である第2項は、三次元モデルでも通常の軸対称モデルのように、1 rad あたりの各要素への渦電流の流出入総計が自動的に零を満足するときは考えなくてよい。しかし、一般の三次元モデルすなわち途中に欠陥部や切断面がある場合は、ベクトルポテンシャルによって表現できない部分を補償するために必要になる。

いま、 $t=0$  での渦電流の瞬時値によりこのことを考えてみる。ベクトルポテンシャルのみの計算では、渦電流は励磁電流を打消すように図 11(a) のようになる。これは、スリット部空げきの存在に対して垂直に流入または流出しようとする分布で不適当である。次に、スカラーポテンシャルを考慮した計算法により、この分布による電流を求めると同図(b)のようになる。(a)図および(b)図を合成すると(c)図のようになり、導体上で循環する渦電流が得られる。従って、空げきおよび切断面のある場合、言い換えれば、励磁電流回路と軸を共有して平行に相対して、かつ相

似の形で渦電流が流れ得ない場合は、スカラーポテンシャルを考慮しなくてはならない。著者らは、上述の計算結果およびそれに対する考察より、スカラーポテンシャルはベクトルポテンシャルと共に渦電流分布を正確に表現するために数式上必要となるもので、それ自体物理的な量ではないと考える。 $\phi$  を媒質間境界面における電荷の蓄積に起因するとして物理的意味付けまで行う文献もあるが<sup>(6)(15)(16)</sup>、著者らと同様に非物理量とする説<sup>(8)(17)</sup>もある。しかし、これまで具体的モデルについてスカラーポテンシャル分布を求めて説明したものはない。

## 6. 結 論

以上、渦電流の流れる場の磁界解析をベクトルポテンシャルおよびスカラーポテンシャルを未知数とした有限要素法で三次元計算する一手法を提起すると共に、この計算法を適用して磁束収束装置基礎モデルの磁束分布、渦電流分布およびスカラーポテンシャル分布を求めた。

- (1) 反復計算法についてまとめると、
  - (i) システム方程式を4群に分割することにより、1群あたりの計算に必要なシステムマトリックスの容量は1/16になる。このことにより、実用規模のモデルの計算が可能となる。
  - (ii) 各群ごとの計算は直接法が使用できる。
  - (iii) 三角プリズム要素の使用により分割が容易で分割状態が直感的に理解できる。
- (2) 磁束収束モデルの解析結果をまとめると、
  - (i) 導体上では磁束は渦電流により反射され、空げき部においては磁束が収束されることが確認できた。
  - (ii) 空げき部のZ方向磁束密度はX方向に対しては中央部よりも導体板に近づくにつれて大き

くなること、Y軸方向に対しては中央部が最大で以後徐々に減少していくこと。

- (ii) 渦電流の経路を確認することができ、空げきに隣接する部分で電流密度が大となり、これが空げき部の磁束を強めることに寄与することを明確にした。
- (3) スカラーポテンシャルの意味について、
- (i) 本モデルのスカラーポテンシャル分布計算結果より、励磁回路と軸を共有して平行に相対する渦電流回路を有しないような導体を含むモデルでは、スカラーポテンシャルが必要であり、ベクトルポテンシャルのみによる渦電流表示の不備を数学的に補う役目を果たすという推定がなされる。

最後に、本計算には名古屋大学大形計算機 M-382を使用したことを付記する。

(昭和61年9月24日受付)

## 文 献

- (1) K. Bessho, et al.: "High-speed Rotating Disc Generator for High Magnetic Field", *IEEE Trans. Magnetics*, MAG-19, No. 5 (1983)
- (2) 守末: 「渦電流による磁束濃縮機構の解析」, 電気学会回転機

- 静止機研究, SA-84-12 (昭59)
- (3) 中田, 他: 「有限要素法による非磁性板中の渦電流解析」, 電気学会静止機研究, SA-80-7 (昭55)
- (4) 榎園, 他: 「渦電流による交流磁束の収束作用」, 電気学会マグネティクス研究, MAG-86-58 (昭61)
- (5) M. V. K. Chari, et al.: "3-D Vector Potential Analysis for Magnetic Field Problems", *IEEE Trans. Magnetics*, MAG-18, No. 2 (1982)
- (6) S. J. Salon, et al.: "3-D Eddy Currents Using a Four Component Formulation", *ibid.*, MAG-20, No. 5 (1984)
- (7) 武智, 他: 「磁性固体の渦電流解析」, 電気学会回転機静止機研究, SA-83-15 (昭58)
- (8) 長谷部, 他: 「うず電流を含む三次元磁界解析の定式化」, 電学論A, 103, 659 (昭58-12)
- (9) 中田, 他: 日本シミュレーション学会第6回電気電子工学への有限要素法応用シンポジウム論文集, p. 185 (昭60)
- (10) 中田, 他: 「不完全コレスキー分解がICCG法の計算時間と記憶容量に及ぼす影響の検討」, 昭61電気学会全大, No. 730
- (11) 中田・高橋: 電気工学の有限要素法 (昭57) 森北出版
- (12) O. C. Zienkiewicz: *The Finite Element Method in Engineering Science* (1971) McGraw-Hill, England
- (13) 中田・高橋: 日本シミュレーション学会第1回電気電子工学への有限要素法応用シンポジウム論文集, p. 56 (昭54)
- (14) 小倉, 他: 「有限要素法によるジュール損解析」, 電学論B, 99, 229 (昭54-4)
- (15) J. H. McWirtter: "Computation of 3-D Eddy Currents in Thin Conductors", *IEEE Trans. Magnetics*, MAG-18, 456 (1982)
- (16) C. S. Biddlecombe, et al.: "Methods for Eddy Current Computation in Three Dimensions", *ibid.*, MAG-18, No. 2 (1982)
- (17) M. V. K. Chari, et al.: "Three Component, Two Dimensional Analysis of the Eddy Current Diffusion Problem", *ibid.*, MAG-20, No. 5 (1984)