UDC 621.318.3-501：537.624.4

論　文
49-B 70

磁気吸引力によるつり下げ制御系の一制御方式

金沢大学　松 村 文 夫
金沢大学　山 田 外 史

1. まえがき

将来の超高速列車の浮上方式の一つとして磁気吸引力を利用する方法が考えられ，一部で実験も行なわれている[1]。また，回転体を無接触で保持し回転させる磁気軸受も考案されている[2]~[5]。これらに限らず物体を，重力に抗して浮かせることができれば，風洞実験，塗装など，その他の分野での応用も開けると思われる。電磁石の吸引力を用いて物体をある位置に無接触でつり下げるということは，容易に想像されるように，本来きわめて不安定なものであるし，また，系には著しい非線形性がはいってくる。このように，本来，不安定な系を安定化するには特別な制御方式が必要である。

従来，行なわれている制御方法としては，

（ｉ）変位のみを検出，帰還して位相進み補償または PID 制御を行なって電磁石のコイルに電圧を加える方法[2]~[7]

（ii）変位のほかコイル電流も帰還する方法[8]などがとられている。

筆者らは直流電磁石を用いたつり下げ制御系について，望みの特性根を持たせるためには，現代制御理論の教えるところにより[9]，系の状態変数をすべてフィードバックして電磁石のコイル電圧を制御すればよいとの観点からいくつかの検討を行なってきた[10][11]。本文ではさらに磁束の漏れを考慮したり，基準化を行なったりして一般性を持たせたうえで系の制御方式を提案し，その結果得られる制御特性を理論，シミュレーション，実験によって求めている。

この基準化によると系の状態方程式にはわずか二つの相似パラメータが現われるのみであり，そのため種々な形，大きさの磁気つり下げ系を一般的に論じ，設計を行なうことが可能になった。ただし，研究の対象としている範囲は単につり下げられた物体の垂直方向の変位についての検討であり，水平方向の移動，回転はないものとしている。

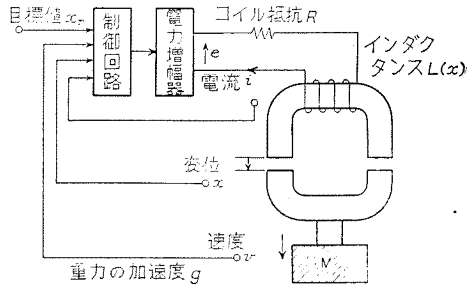
A Control Method of Suspension Control System by Magnetic Attractive Force. By F. MATSUMURA, Member & S. YAMADA, Member (Faculty of Engineering, Kanazawa University).
松村文夫：正員，金沢大学工学部電気工学科
山田外史：正員，金沢大学工学部電気工学科

2. 系の構成と定式化

ある質量 M の物体を無接触でつり下げるために，制御できる直流電磁石を用いて第1図のような系の構成にする。すなわち，変位 x（＝ギャップの長さ），速度 v，コイル電流 i を何らかの方法によって検出し，フィードバックしてコイル電圧 e を制御する。

〈2・1〉 ラグランジの運動方程式による系の定式化

この系は電気系と機械系が結合されたものであるので，ラグランジの運動方程式によって系で成り立つ式を導く。この際，簡単化のために次の仮定をおく。



第1図　系の構成
Fig. 1. Composition of system.

仮定 1　電磁石の磁心の透磁率は無限大とし，ヒステリシスはなく，使用範囲では飽和も起こらないものとする。

仮定 2　磁心は積層されており，磁心中に生ずるうず電流は無視できるものとする。

最初の仮定によってコイルのインダクタンスは変位 x のみの関数となり，ラグランジの運動方程式を適用して次の基本式を得る。

$$\left.\begin{aligned} &dx/dt=v \\ &M\,dv/dt=Mg+\frac{1}{2}i^2 dL(x)/dx \\ &e=d\{L(x)i\}/dt+Ri \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

上式を具体化するため，さらに次の仮定をおく。

仮定 3　コイルのインダクタンス $L(x)$ は次式で示すように「定数成分」+「ギャップの長さに反比例する成分」で表わせるとする。

$$L(x)=L_{00}+L_0X_0/x \quad \cdots\cdots(2)$$

ここで，X_0 は保ちたいギャップの長さである。(2)式を用いて(1)式を書き改めると

$$\left.\begin{aligned} &dx/dt=v \\ &M\frac{dv}{dt}=Mg-\frac{L_0X_0i^2}{2x^2} \\ &e=-\frac{L_0X_0vi}{x^2}+\left(L_{00}+\frac{L_0X_0}{x}\right)\frac{di}{dt}+Ri \end{aligned}\right\} \cdots(3)$$

となり，上式が電磁石とつり下げ物体の運動方程式となる。

〈2・2〉 基本式の基準化　この系には多くのパラメータが含まれていて取り扱いが困難になるので，これをさけるために，また，一般化をはかるために次の基準値を用いて，各パラメータ，変数の基準化を行なう。

$$\left.\begin{aligned} &\text{変位の基準値}\quad X_0 \\ &\text{インダクタンスの基準値}\quad L_0 \\ &\text{時間の基準値}\quad T_0=L_0/R \\ &\text{速度の基準値}\quad V_0=gT_0 \\ &\text{電流の基準値}\quad I_0=\sqrt{2MgX_0/L_0} \\ &\text{電圧の基準値}\quad E_0=RI_0 \end{aligned}\right\} \cdots(4)$$

上式を用いて(3)式を基準化する。基準化された変数を x_0, v_0, i_0, t_0, e_0 などと示すと次式となる。

$$\left.\begin{aligned} &dx_0/dt_0=2Hv_0 \\ &dv_0/dt_0=1-i_0^2/x_0^2 \\ &\frac{di_0}{dt_0}=\frac{x_0^2(e_0-i_0)+2Hv_0i_0}{x_0\{(a-1)x_0+1\}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(5)$$

ここで，

$$H=(1/2)gT_0^2/X_0,\quad a=L_{00}/L_0+1 \quad \cdots(5')$$

基準化によって運動方程式には H, a の二つだけの相似パラメータが生じてきている。つり下げ重量がおよそ5kg (変位3～8mm)～1,000kg(変位20～60mm)の場合を想定して，従来の技術で可能な電磁石を設計してみると，H の値は多くは 0.1～10 の間にはいる。a の値は磁束の漏れの程度を示すものであり，漏れの全くない場合には $a=1$ となる。実際には漏れ磁束は無視できず，a の値はおよそ 1.5～3 の範囲と考えられる。

〈2・3〉 基本式の線形化　基準化された系の式には非線形が含まれており，広い範囲の変化を考える場合はこの式を扱わねばならない。しかし，平衡点の近傍での特性を論ずるときには，その点のまわりで式を線形化すれば線形制御理論を用いることができる。目標値 x_r が一定値 $(=X_0)$ の定常状態においては(5)式から

$$v_0=0,\quad x_0=i_0=e_0 \quad \cdots\cdots(6)$$

となり，さらに後述のようなコイル電圧の与え方をすれば

$$x_0=i_0=e_0=1 \quad \cdots\cdots(7)$$

とすることができる。そこで v_0, x_0, i_0, e_0 をそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} &v_0=v',\quad x_0=1+x' \\ &i_0=1+i',\quad e_0=1+e' \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(8)$$

とおけば，(5)式は次のように線形化される。

$$\left.\begin{aligned} &dx'/dt_0=2Hv' \\ &dv'/dt_0=2(x'-i') \\ &di'/dt_0=(2Hv'-i'+e')/a \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(9)$$

〈2・4〉 フィードバック方法　(5)または(9)の式からこの系は変位 x，速度 v，電流 i の三つの状態変数を持つと考えることができる。また，線形化した(9)式からこの系は可制御であることが知られる。そこで状態変数のすべて，すなわち，変位，速度，電流をフィードバックし，かつ定常状態において目標値 $x_r=X_0$ に対して変位 x が x_r に等しくなるようにするため，次のようなコイル電圧の与え方を行なう。

$$e=K(x-x_r)+K_vv+K_i(I_0x_r/X_0-i) +E_0x_r/X_0 \quad \cdots\cdots(10)$$

ここで，K, K_v, K_i はそれぞれ変位，速度，電流に対するフィードバック係数である。このようにすれば $x=x_r=X_0$, $v=0, i=I_0$ の定常状態のとき $e=E_0$ となる。また，可制御の系においてすべての状態変数をフィードバックするので望みの位置に特性根を持ってくることができる[9]。

(10)式を(4)式で基準化すると次式となる。

$$e_0=K_0(x_0-x_{r0})+K_{v0}v_0+K_{i0}(x_{r0}-i_0)+x_{r0} \quad \cdots\cdots (11)$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned} &K_0=\frac{KX_0}{E_0},\quad K_{v0}=\frac{K_vV_0}{E_0},\quad K_{i0}=\frac{K_iI_0}{E_0} \\ &x_{r0}=x_r/X_0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (11')$$

さらに，(11)式を $x_{r0}=1$ に対する平衡点のまわりで線形化すると次式となる。

$$e'=K_0x'+K_{v0}v'-K_{i0}i'+(-K_0+K_{i0}+1)x_r' \quad \cdots\cdots (12)$$

ここで，

$$x_r'=x_{r0}-1 \quad \cdots\cdots (12')$$

3. 系の安定条件

この系は非線形系であるので，変数の広い変化範囲にわたって安定を論ずるのは容易ではない。そこでまず，少なくとも平衡点の近傍では安定でなければならないとして安定条件を調べる。線形化した(9)，(12)式をラプラス変換し，x'，v'，i'，e'，x_r' のラプラス変換をそれぞれ $X(s)$，$V(s)$，$I(s)$，$E(s)$，$X_r(s)$ と書けば次式となる。

$$\left.\begin{aligned} &sX(s)=2HV(s) \\ &sV(s)=2\{X(s)-I(s)\} \\ &sI(s)=\{2HV(s)-I(s)+E(s)\}/a \\ &E(s)=K_0X(s)+K_{v0}V(s)-K_{i0}I(s) \\ &\qquad +(-K_0+K_{i0}+1)X_r(s) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

上式をいくらか整理して構成図で示すと第2図となる。図または(13)式からこの系の閉ループ伝達関数を求めると次式となる。

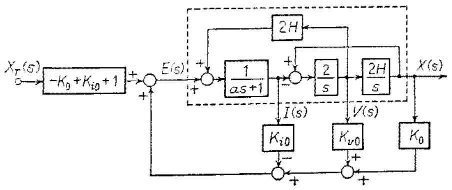
$$\frac{X(s)}{X_r(s)}=\frac{4H(K_0-K_{i0}-1)}{D(s)} \quad \cdots\cdots (14)$$

ここで，

$$D(s)=as^3+(1+K_{i0})s^2+(4H-4Ha+2K_{v0})s+4H(K_0-K_{i0}-1) \quad \cdots (15)$$

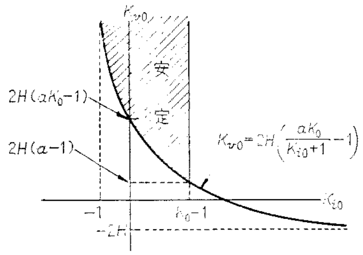
したがって，特性方程式は次式となる。

$$D(s)=0 \quad \cdots\cdots (16)$$



第2図 系の構成線図(点線内は電磁石及びつり下げ物体の部分)

Fig. 2. Block diagram of system.



第3図 安定条件

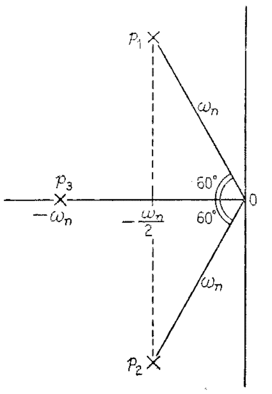
Fig. 3. Stability condition.

フルビッツの安定判別法によって，この系が安定であるためには，フィードバック係数は第3図に示す範囲をとらねばならないことがわかる。

4. 系の設計

〈4・1〉 フィードバック係数の設計　この系の方程式は3次式であり，系固有のパラメータ H, a と，フィードバック係数 K_0, K_{v0}, K_{i0} が決まれば三つの根が決まる。また，(15)式で s^3 以外の項には調整可能な値 K_0, K_{v0}, K_{i0} がついているので，この三つのフィードバック係数を適当に選ぶことによって，任意の位置に根をもってくることができる。

(14)式で見られるように，この系では零点はないから，特性方程式の三つの根を指定した位置にもってくると指定した過渡特性を持つことになる。そこで，先に三つの根を指定して特性方程式を満足するようなフィードバック係数を決めるという方法をとる。前述のように可制御の系であるからこの方法は可能である。いま，三つの根 p_1, p_2, p_3 が複素平面で第4図に示す相対的な位置にくるようにするとする。このようにすれば共役複素根 p_1, p_2 の制動係数 ζ は 0.5 となり，根 p_3 の影響も考慮すると，ステップ状の入力に対してゆき過ぎ量約8% のやや振動的な応答となる。また



第4図 指定した根配置

Fig. 4. Specified location of roots.

たとえば2% 整定時間は $6.6/\omega_n$ となり，3次系としてはかなり短い。このような根配置に選ぶ必然性は特にないが，共役複素根をこのような位置にもってくることは従来サーボ機構などでとられてきているし，また実根の位置はフィードバック係数を極端に大きくしないことを考慮してこのように選んだ。

根が第4図に示す関係にあるということは次の式

$$a(s+\omega_n)(s^2+\omega_n s+\omega_n^2)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

が成り立つことであり，上式と(16)式とを比較し，等しくおくことによって次の結果を得る。

$$\left.\begin{aligned} K_0&=a\omega_n(\omega_n^2/4H+2)\\ K_{v0}&=a\omega_n^2+2H(a-1)\\ K_{i0}&=2a\omega_n-1 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

乗り物のようにつり下げられた物体に人間が乗る場合は，乗り心地の点から適当な ω_n が存在する。また用途によって応答の速さを決める ω_n が指定される場合もあろう。これらの場合にはそれらの ω_n に対して上式からフィードバック係数を定めればよい。フィードバック係数が(18)式のように選ばれたとき，(14)式は次式となる。

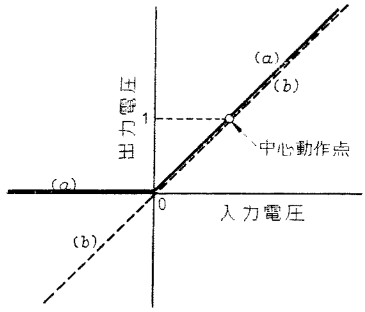
$$\frac{X(s)}{X_r(s)}=\frac{\omega_n^3}{(s+\omega_n)(s^2+\omega_n s+\omega_n^2)} \quad \cdots\cdots (19)$$

一方，応答速度ができるだけ速いことが望まれる場合には ω_n を大きく選べばよい。理論上はどのような大きな ω_n に対してもそれに対応するフィードバック係数が存在する。しかし，ω_n を大きくするということはコイル電圧を制御する増幅器の利得を高めることであり，しかもある入力変動に対しても増幅器の出力が飽和しないようにすることは経済的に好ましいことではない。仮に電圧に飽和が起こらないようにしたとしても，コイル電流がそれに従って大きく変動して電流が負に達することになる。しかし，コイルに負の電流が流れても反発力は生じないから，結局，制御が効かないことになる。また，コイル電圧に飽和が起こるということはそのとき制御能力を失なうということでありこの系は本来不安定な系であるから，そのまま不安定におちいってしまう可能性がある。

いま，変位を基準値のまわりで正弦波的に変化させるような目標値を与える場合を考える。系を線形とみると第2図及び(19)式から $E(s)/X_r(s), I(s)/X_r(s)$ の伝達関数を得る。あらゆる周波数に対して $|E(j\omega)/X_r(j\omega)|$ が1に比べてあまり大きくならないようにするためには，伝達関数の近似から

$$\omega_n<\omega_{n1}=\sqrt[3]{4H/a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

の条件を得る。同様に $|I(j\omega)/X_r(j\omega)|$ が1に比べて



第 5 図　電力増幅器の特性

Fig. 5. Characteristics of power amplifier.

あまり大きくならないようにするためには近似的に

$$\omega_n<\omega_{n2}=2\sqrt{H} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

の条件を得る。

コイル電圧を制御する電力増幅器が第5図に示すように，(a)正の電圧のみを出せる場合と，(b)正負の出力電圧を出せる場合とに分けて考える。(a)の場合は(20)，(21)式の両方の条件を満たさねばならないし，(b)の場合は(21)式だけを満せせばよい。ω_n はこれらの条件を満たす範囲でなるべく大きなほうがよいから，結局，与えられた H, a に対して第1表に示すように ω_n を選べばよいことになる。また，第2表に電磁石が与えられてから実際のフィードバック係数を決定するまでの手順をまとめて示す。

〈4・2〉 電力増幅器の最大出力電圧　フィードバ

第 1 表　ω_n の値の決定

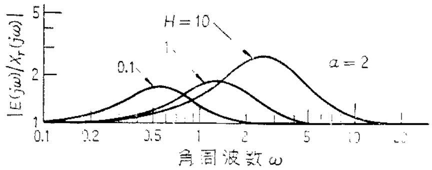
Table 1. Determination of value ω_n.

電力増幅器の出力 ＼ Ha^2	正出力のみ	正負とも可
$Ha^2<0.25$	$2\sqrt{H}$	$2\sqrt{H}$
$Ha^2>0.25$	$\sqrt[3]{4H/a}$	$2\sqrt{H}$

第 2 表　フィードバック係数を決定する手順

Table 2. Steps for determination of feedback coefficients.

手　順	決定する事項〔使用する式，表〕
1	つり下げたい質量 M と空げき長 X_0 を指定
2	コイル抵抗 R とインダクタンス $L(x)$ の特性を測定。L_{00}, L_0 の決定〔(2)式〕
3	基準量の決定〔(4)式〕
4	相似パラメータ H, a の決定〔(5')式〕
5	ω_n の指定〔できるだけ ω_n が大きいことが望まれる場合は第1表〕
6	フィードバック係数 K_0, K_{v0}, K_{i0} の決定〔(18)式〕
7	実際のフィードバック係数の決定〔(11')式〕



第 6 図　$|E(j\omega)/X_r(j\omega)|$ の値 $(\omega_n=\omega_{n1})$

Fig. 6.　Value for $|E(j\omega)/X_r(j\omega)|$, $(\omega_n=\omega_{n1})$

ック係数は第1表から選ぶとして，コイル電圧を制御する電力増幅器の出力電圧はどの範囲の値が要求されるかを考察する。

（1）　正弦波入力に対するコイル電圧の比

$\omega_n=\omega_{n1}$ に選ばれるとき　　$|E(j\omega)/X_r(j\omega)|$ の値を正確に計算し，図に示すと，たとえば $a=2$ の場合に対しては第6図の周波数特性となる。図から $\omega\simeq\omega_n$ の付近で共振を起こしているのがわかる。同様に $a=1, 3$ などに対して計算すると，$H=10$, $a=3$ の場合に $|E(j\omega)/X_r(j\omega)|$ のピーク値が最も大きくなり，この値は約4である。

$\omega_n=\omega_{n2}$ に選ばれるとき　　$|E(j\omega)/X_r(j\omega)|$ の値を同様に正確に計算し，図に示すとたとえば $a=2$ の場合に対して第7図の周波数特性となる。この場合は $\omega\simeq\omega_n$ のところで共振を示したあと，高域でも $2a\sqrt{H}$ 倍の利得が残る。同様に $a=1, 3$ などに対して調べてみると $H=10$, $a=3$ の場合に最大値が最も大きくなり，この値は約 23 である。

$|E(j\omega)/X_r(j\omega)|$ の値と，どのような大きさの目標値変動が与えられるかによってコイルに必要な最大電圧と最小電圧が定まる。

（2）　始動時に必要な電圧　　電力増幅器に電源がはいっていないとき，つり下げ物体はギャップの長さ $x_0(0)$ の位置に置かれているとする。そこで $t_0=0$ で急に電力増幅器に電源が印加され，$x_0=1$ の位置に引き上げられる場合を考える。初めコイルに電流が流れはじめ，この電流による磁束によって生ずる吸引力が重力を上まわるようになる瞬間 $(t_0=t_{10})$ から物体が浮き上り，ある過渡現象を経て目標とする位置に安定する。この過程は(5)，(11)式に従う。

$0\leqq t_0\leqq t_{10}$　　(5)式から $i_0<x_0(0)$ の間は吸引力は重力より小さく，物体は $x_0=x_0(0)$ の位置に静止したままである。(11)式で $x_0=x_0(0)$, $x_{r0}=1$, $v_0=0$ とおくと，コイル電圧は

$$e_0=K_0\{x_0(0)-1\}+K_{i0}(1-i_0)+1 \quad \dots(22)$$

となる。ω_n が第1表から選ばれ，それから K_0, K_{i0} が決まるとき，上式の値は普通かなり大きい。このため実用上は電力増幅器の出力に上限があるものと考えなければならない。いま，この上限値を E_{up0} とし，物体が静止しているとき，コイル電圧はこの上限値になっているものとすると，電流は(5)式から

$$i_0=E_{up0}\left\{1-\exp\left(-\frac{x_0(0)}{(a-1)\,x_0(0)+1}t\right)\right\} \quad (23)$$

の式に従って指数関数的に増大し，次の時刻 t_{10} で $i_0=x_0(0)$ に達する。

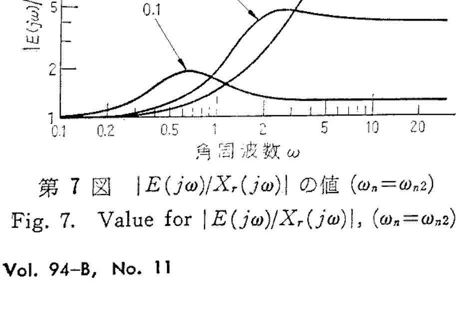
$$t_{10}=\left(a-1+\frac{1}{x_0(0)}\right)\ln\left(\frac{1}{1-x_0(0)/E_{up0}}\right) \quad (24)$$

上式の値は E_{up0} が大きいほど小さく，また，H の値には無関係となっている。t_{10} が有限の値をとるためには

$$E_{up0}>x_0(0) \quad \dots\dots(25)$$

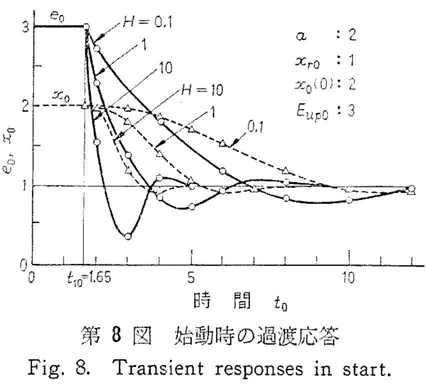
であればよい。

$t_0\geqq t_{10}$　　電力増幅器の出力に上限があると，当然動き始めてからも e_0 はこの値以下におさえられるがしかしこの過渡時において e_0 が負になることがあるかどうかということと，線形化して設計された系が実際に安定になっているかどうかということを調べねばならない。浮上後は(5)，(11)式の3階非線形微分方程式を取り扱わねばならないが，理論的解析は困難であるので，ディジタル計算機によってシミュレーションを行なった。$a=2$, $x_0(0)=2$, $E_{up0}=3$, 増幅器は正出力のみの場合について行なった例を第8図に示す。



第 7 図　$|E(j\omega)/X_r(j\omega)|$ の値 $(\omega_n=\omega_{n2})$

Fig. 7.　Value for $|E(j\omega)/X_r(j\omega)|$, $(\omega_n=\omega_{n2})$



第 8 図　始動時の過渡応答

Fig. 8.　Transient responses in start.

図に示すように，コイル電圧 e_0 は負にまでは落ち込んでいないので，始動についていえば，増幅器は $E_{up0}>x_0(0)$ なる上限値をもち，正出力のみをだすものでよいことがわかる。また，変位 x_0 の応答も線形化して考えた応答に近いものとなっている。シミュレーションによると $a\leqq3$, $E_{up0}\leqq10$ 程度の値について上述の結論が得られる。

5. 系の特性

以上述べた制御方式によると，どのような特性が得られるかということを理論的に考察する。

〈5・1〉 静特性

（1） 目標値の変化に対する特性　〈2・4〉節では $x_{r0}=1$ の目標値に対して $x_0=1$ となるようなコイル電圧の与え方をした。この方法によると，(5)式から $x_{r0}\fallingdotseq1$ の場合でも定常状態では

$$x_0=i_0=e_0=x_{r0} \quad\cdots\cdots(26)$$

となり，制御量は目標値に一致する。

（2） 静的外力の印加に対する特性　いま，つり下げ物体に対して新たに下方に外力 f が加わる場合を考える。このとき(3)式の一つは

$$M\frac{dv}{dt}=Mg+f-\frac{L_0X_0i^2}{2x^2} \quad\cdots\cdots(27)$$

となる。(4)式の基準値のほかに力については Mg を基準値にとって

$$f_0=f/Mg \quad\cdots\cdots(28)$$

として基準化すると(27)式は

$$\frac{dv_0}{dt_0}=1+f_0-\frac{i_0^2}{x_0^2} \quad\cdots\cdots(29)$$

となる。静的外力に対しては基準化した力を $f_0=F_0$ として，定常状態では上式から

$$i_0=\sqrt{1+F_0}\,x_0 \quad\cdots\cdots(30)$$

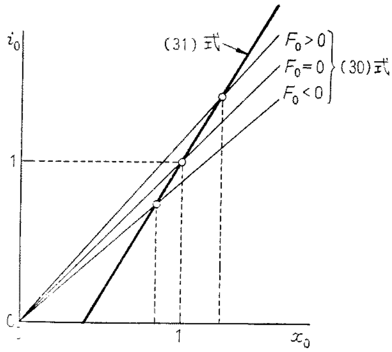
となる。一方，コイル電圧の式〔(11)式〕と(5)式から，定常状態では $x_{r0}=1$ として

$$i_0=\frac{K_0}{1+K_{i0}}(x_0-1)+1 \quad\cdots\cdots(31)$$

を得る。(30)，(31)式は図示すると第9図に示す関係となり，静的外力 F_0 の印加によって変位の平衡点 x_0 は動く。変化の割合は

$$\left.\frac{dx_0}{dF_0}\right|_{F_0=0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{K_{i0}+1}{K_0-K_{i0}-1} \quad\cdots\cdots(32)$$

となるが，K_0, K_{i0} が(18)式で決められる場合には上式の値は $4H/\omega_n^2$ となる。さらにその ω_n がたとえば(21)式によって選ばれる場合はちょうど1となり，静的外力の印加に対し直接的に影響を受ける。これは過渡状態及び振動的入力に対して系が十分安定に働らくように ω_n を小さく（K_0 を小さく）選んだ結果である。もし，外力に対する偏差が小さいことが望まれる場合には ω_n を大きく選び，その代わり最大電圧の大きな増幅器を用いるか，または，目標値の急激な変化を避け，増幅器に飽和を起こさせないという使用法をとるかすればよい。



第9図　静的外力の印加に対する平衡点の移動

Fig. 9. Displacement of equilibrium state due to static external force.

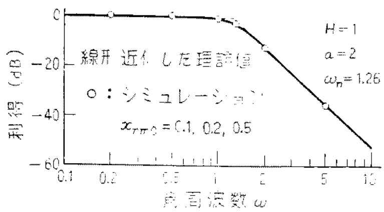
〈5・2〉 動特性

（1） ステップ応答　平衡点の近傍での小さなステップ状の入力変化に対しては線形化した式を考えればよく，そこから導かれた伝達関数によって特性を論ずることができる。そして，第4図に示す根指定を行なって，フィードバック係数を定めたから，ゆき過ぎ量，整定時間などは〈4・1〉節で述べた値となる。一方大きなステップ状の変化に対しては理論的取り扱いは困難であり，ディジタル計算機によるシミュレーションによって応答を求める。たとえばすでに示した第8図の応答は $t_0=1.65$ において，目標値が $x_{r0}=2$ からステップ状に $x_{r0}=1$ に変わった場合のものに相当する。図のように，この場合も線形系で考えたときの応答に近いものになっている。ただし，これは安定に向かう場合であり，著しく平衡点からはずれた初期値の場合には，$x_0\to0$ または $x_0\to\infty$ への不安定を引き起こすことがある。

（2） 周波数応答　平衡点の近傍での小振幅の正弦波状入力に対しては伝達関数を用いて調べることができる。(19)式をもとにして，$\omega_n=\sqrt[3]{4H/a}$ として設計された系に

$$x_{r0}=1+x_{rm0}\sin\omega t_0 \quad\cdots\cdots(33)$$

なる入力が入る場合の理論的な利得を求めて図示すると第10図の実線となる（図は $H=1, a=2$ の場合)。小振幅ではない場合については非線形の式に帰ってシミュレーションによって応答を求めると $x_{rm0}=0.1$,



第 10 図　正弦波入力に対する応答
Fig. 10.　Responses for sinusoidal input.

0.2, 0.5 に対しいずれも○印のようになり線形近似とよく一致した結果が得られた。ただし，x_{rm0} が大きいと x_0 の波形はひずみ，さらに大きくなり電力増幅器の出力電圧が飽和するようになると不安定現象が発生するようになる。H, a のその他の値に対しても類似の結果が得られる。

（3）　振動的外力に対する応答　　外力が加わる場合の加速度の式として，すでに，(29)式が導かれている。この式を線形化するために（8）式のほか，$f_0=f'$ とおくと次式を得る。

$$dv'/dt_0=f'+2x'-2i' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

さらに上式をラプラス変換し $\mathcal{L}[f']=F(s)$ と書くと

$$sV(s)=F(s)+2X(s)-2I(s) \quad \cdots\cdots\cdots(35)$$

となる。上式と(13)式を用い，かつ $X_r(s)=0$ として $F(s)$ に対する $X(s)$ の伝達関数を求めると次式となる。

$$\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{2H(as+K_{i0}+1)}{D(s)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

ここでもフィードバック係数を(18)式のように選べば上式は

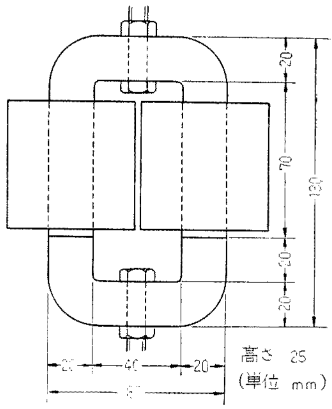
$$\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{2H(s+2\omega_n)}{(s+\omega_n)(s^2+\omega_n s+\omega_n{}^2)} \quad \cdots\cdots\cdots(37)$$

となる。この伝達関数の利得の周波数特性は低域では平たんであり，およそ $\omega>\omega_n$ の高域で単調に減少する性質をもっている。したがって，特有の周波数で共振を示すというようなことはない。

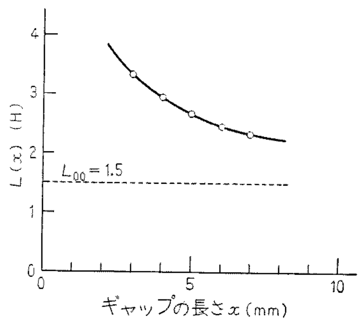
6.　実　験　例

〈6・1〉　実験方法及び設計

（1）　電磁石　　第 11 図に示すようにカットコアに 0.6mmφ の PVF 線を 2,000×2 回巻いた電磁石を作り，コイルを巻いたほうの鉄心を上部に固定し，巻かないほうの鉄心につり下げ物体を固定した。ここでは垂直方向の動きだけを注目しているので，可動部のガイドとして，ボールスライドベアリングを使用した。コイル抵抗は 35.6Ω であり，またインダクタンスの値を直流の過渡現象によって測定すると第 12 図に示すように，ほぼ（2）式で仮定した特性を示している。いま，たとえば 5.1kg の質量をギャップの長さ 6mm の位置につり下げたいとする。このとき，電磁石については第 2 表の手順 1〜4 に従がって次の数値を得る。



第 11 図　電　磁　石
Fig. 11.　Electromagnet.



第 12 図　コイルインダクタンスの特性
Fig. 12.　Characteristics of coil inductance.

$M=5.10\,\mathrm{kg}$,　$X_0=0.0060\,\mathrm{m}$,　$R=35.6\,\Omega$
$L_{00}=1.50\,\mathrm{H}$,　$L_0=1.15\,\mathrm{H}$,　$T_0=0.0323\,\mathrm{s}$
$V_0=0.316\,\mathrm{m/s}$,　$I_0=0.722\,\mathrm{A}$,　$E_0=25.7\,\mathrm{V}$
$H=0.851$,　$a=2.30$

（2）　各状態量の検出方法　　変位信号は差動変圧器を 5kHz で使用し，その出力を整流，平滑して得た。使用領域ではこの周波数は十分高く，平滑回路の時間遅れは問題になっていない。速度信号はこう配を持った直流磁界を作っておき，つり下げ物体に直結した空心可動コイルに誘起する電圧を用いた。ここでは理論に対してなるべく忠実に実験を行なうために，速度信号を直接検出したが，それが困難な場合には変位

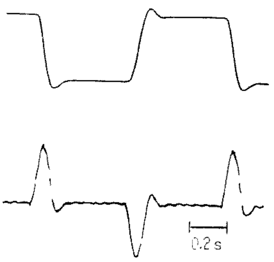
信号を微分して得てもよい。電流信号は電磁石のコイルに直列に小抵抗をそう入して得た。

（3） 電力増幅器　コイル電圧の制御にはサイリスタチョッパ回路を使用した。ここでは 70V の直流電源を用い，くり返し周波数 500Hz で動作させた。このため，正の出力のみとなり，かつ確実な転流動作を行なわせるために上限約 60V，下限約 17V という出力範囲となっている。使用領域では 500Hz のくり返し周波数は十分高く，系の特性に影響を及ぼしていない。

（4） フィードバック係数の決定　すでにあげた数値及び電力増幅器の制約から，最も速い応答を得る場合の ω_n の決定は(20)式を用いることになり，$\omega_n=1.14$，$K_0=6.25$，$K_{v0}=5.20$，$K_{i0}=4.25$ となる。このことは実際の系では (11′) 式を逆に用いて $K=2.74\times10^4$ V/m，$K_v=433$ V/m/s，$K_i=151$ V/A とすることに相当する。また，このようにした結果，実際の系での自然角周波数は 35.3 rad/s (5.55 Hz) となる。

〈6·2〉 **実測した系の特性**　〈6·1〉節の方法を用いて設計し実験を行なったところ，安定につり下げることができた。たとえば目標値として 1Hz の方形波を与え，ギャップの長さが 6±0.75 mm となるようにしたときの観測された変位と速度信号のオシログラムを第 13 図に示す。これはステップ状の目標値変化に対する応答の連続と考えられる。オシログラムから変位のゆき過ぎ量は約 7%，2% 整定時間は 0.16 秒と読みとれ，線形近似した理論値（8 %，0.18 秒）に近いものとなっている。つり下げ物体はあたかも適度に制動のきいたばねによってつり下げられているかのように動いている。速度信号には細かい振動が見られるが，これは速度検出のための空心可動コイルが機構固有の細かい機械的振動に感じているからである。

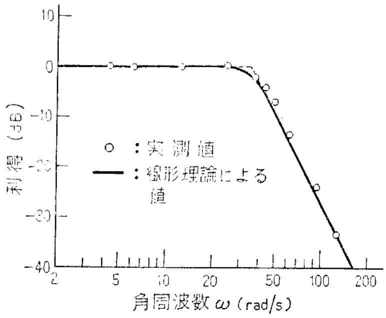
次に，測定された周波数特性の例を第 14 図に示す。図はつり下げ物体が 6 mm を中心にして ±0.75 mm の範囲で正弦波状に上下に動くように目標値を与えた



（上） 変位　（下） 速度

第 13 図　観測された波形

Fig. 13. Observed waveforms.



第 14 図　実測した周波数特性

Fig. 14. Measured frequency characteristics.

ときの応答である。低周波ではほぼ忠実に動作するが設計した自然角周波数より高くなると利得がおちる。図には線形近似した理論値を実線で示したが，実験ではそれに近い値が得られた。

7. む す び

以上，直流電磁石による磁気吸引力によって物体を無接触でつり下げるための制御方式を提案し，基準化を行なってその設計法，特性を一般的に導き，実験的にも確かめた。つり下げ物体の水平方向の移動，回転が加わる場合の考察は今後の課題としたい。

終わりに，日ごろご指導賜わる本学別所一夫教授に深く感謝の意を表します。実験に際しては，本学技官竹内忠雄氏，卒研生伊藤誠二〔現在，富士電機製造(株)〕香村一美〔現在，日本電装(株)〕，津田　保，村田敦彦君に多大の援助をいただいた。また，機構部は本学工作センタの方々に製作していただいた。ここに付記して各位に厚くお礼申し上げます。

(昭和 49 年 2 月 20 日受付，同 49 年 7 月 25 日再受付)

文　　献

（1） たとえば，H.H. コルム，他：サイエンス（日本版）3, 12, 10（昭 48-12）
（2） 後藤，他：日本機械学会誌 63, 502, 1452（昭 35-11）
（3） 佐々木，他：日本機械学会論文集(第 3 部) 33, 247, 484(昭 42-3)
（4） 清水・谷口：日本機械学会論文集(第 1 部) 33, 255, 1753（昭 42-11）
（5） 荻原，他：昭 47 年電気学会全国大会 No. 1020
（6） 山村・塚本：昭 46 年電気学会全国大会 No. 785
（7） 山村，他：昭 48 年電気学会全国大会 No. 897
（8） В. А. Гапонен·о：Электромеханика 14, 3, 315 (1971)
（9） たとえば，D.G. Schultz, J.L. Melsa (久村訳)：状態関数と線形制御系 304（昭 45）
(10) 松村・山田：昭48年電気学会全国大会 No. 553
(11) 山田・松村：昭48年電気学会全国大会 No. 554