

空気圧シリンダにおけるスティックスリップ運動*

岡部佐規一** 神谷好承** 三浦美智雄*** 横山恭男**

Stick-slip Motion of Pneumatic Cylinder

Sakiichi OKABE, Yoshitsugu KAMIYA, Michio MIURA and Yasuo YOKOYAMA

When the difference of pressures between inlet cylinder chamber and exhaust one is small and also the sliding velocity of piston becomes considerably small, the stick-slip motion is generated. Under some assumptions, the approximated practical equations of motion of pneumatic cylinder is obtained. The period of stick-slip motion and the displacement of piston during one period of stick-slip motion are also obtained by approximated equations. Analytical results show that the period of stick-slip motion and the displacement of piston are affected by the position of piston, orifice area of speed controller, pressure of air supply and so on. For example, in the case of meter-out circuit, the period of stick-slip motion and the displacement of stick-slip motion increase as the volume of exhaust cylinder increases. On the contrary, in meter-in circuit, both period and displacement decrease as the volume of exhaust cylinder increases. In either case, the period and the displacement decrease as the pressure of air supply increases. But the influences of load on the period and the displacement are quite small. These results are shown in various diagrams. The theoretical results agree well with the experimental studies.

Key words: pneumatic cylinder, stick-slip motion, meter-in circuit, meter-out circuit, piston, pressure of air supply

1. はじめに

空気圧シリンダは小型で比較的大きい出力が得られ、しかも取扱いが容易であることから各種の自動化システムにおけるアクチュエータとして広く用いられている。反面、空気の圧縮性、使用に伴う温度変化、ピストン-シリンダ間の摩擦など非線形な特性が空気圧シリンダの厳密な動特性の解析を困難にしており、使用に際しても、中間点での位置決め制御、速度制御などの高度な制御は行われていないと言っても過言でない。特に、空気圧シリンダの低速駆動時や停止直前には顕著なスティックスリップ運動が見られ、これがさらに高精度な位置決め制御を困難にしている^{1)~3)}。

本報では、いくつかの仮定を導入して空気圧シリンダの近似的な運動の式を求め、スティックスリップ運動に関する理論的解析を行うとともに実験結果について報告する⁴⁾。

2. 空気圧シリンダのモデルと記号

図1に空気圧シリンダのモデル図を示す。空気圧シリンダの駆動方法は基本的には、メータイン回路（以下、MI回路と書く）とメータアウト回路（MO回路）の2種類に大別され、それぞれの場合の運動について解析を行う。本解析で用いる記号をまとめると次のようになる。

A_1, A_2 : ピストンの受圧面積

C, C_1, C_2 : 絞りの有効断面積

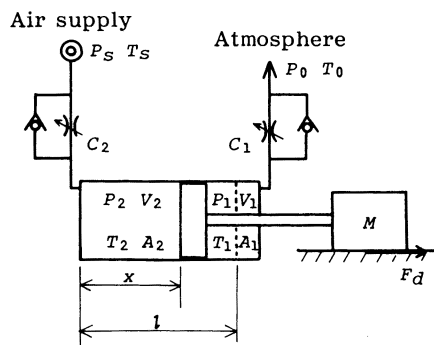


Fig. 1 Model of the pneumatic cylinder

* 原稿受付 昭和61年12月20日。昭和55年度精機学会春季大会学術講演会（昭和55年3月29日）にて発表

** 正会員 金沢大学工学部（金沢市小立野2-40-20）

*** 正会員（株）日立製作所（横浜市戸塚区吉田町292）

- c_1, c_2 : 絞りの無次元有効断面積 ($c_1 = C_1/A_1, c_2 = C_2/A_2$)
- f_a : 強制加速度 ($= A_2 P_s / M$)
- F : ピストン-シリンダ間の摩擦力
- F_s : ピストン-シリンダ間の静摩擦力
- F_d : ピストン-シリンダ間の動摩擦力
- F_{dc} : ピストン-シリンダ間の動摩擦力 (相対速度が大きい場合の定常値)
- f, f_s, f_d : $f = F/M, f_s = F_s/M, f_d = F_d/M$
- G : 流量制御弁を通過する重量流量
- g : 重力加速度
- l : ピストンの全ストローク
- M : 負荷質量
- P, P_1, P_2 : シリンダ室内の圧力
- p_1, p_2 : シリンダ室内の無次元圧力 ($p_1 = P_1/P_s, p_2 = P_2/P_s$)
- P_0 : 大気圧
- p_0 : 無次元大気圧 ($p_0 = P_0/P_s$)
- P_s : 供給圧
- R : ガス定数
- T_0 : 大気温度
- T, T_1, T_2 : シリンダ室内の温度
- T_s : 供給源空気温度
- t : 時間
- t_a : スリップ時間
- t_b : スティック時間
- t_s : スティックスリップの周期
- V, V_1, V_2 : シリンダ室内の体積 ($V_1 = \alpha A_2(l-x), V_2 = A_2 X$)
- x, x_c : ピストンの変位
- X, X_c : ピストンの無次元変位 ($X = x/l, X_c = x_c/l$)
- X_s : スティックスリップのステップ量
- α : A_1/A_2
- γ : 空気の比重量
- ε : 減衰率 ($= \lambda/2M$)
- κ : ポリトロープ指数
- λ : 粘性減衰の係数

特に指定がない場合は、添字の 1 は排出側、2 は流入側のシリンダを示す。また状態変化の式において、' はポリトロープ変化前の状態を示す。

3. 空気圧シリンダの運動の式

図 1 に示すように空気圧シリンダの可動部分 (ピストンとその付属部分) の等価質量を M とすると、ピストンの運動方程式は次式で表される。

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = P_2 A_2 - P_1 A_1 - F - \lambda \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

ここで、 F はピストンとシリンダとの間の摩擦力であり、次の関係がある。

$$(i) \quad dx/dt \neq 0 \text{ のとき } F = F_d \cdot \text{sgn}(dx/dt) \quad (2)$$

(ii) $dx/dt = 0$ で、かつ

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad P_2 A_2 - P_1 A_1 < -F_s \text{ のとき} \\ (b) \quad P_2 A_2 - P_1 A_1 > F_s \text{ のとき} \\ (c) \quad |P_2 A_2 - P_1 A_1| < F_s \text{ のとき} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F &= -F_s \\ F &= F_s \\ F &= P_2 A_2 - P_1 A_1 \end{aligned} \quad (3)$$

次に、空気圧シリンダ内におけるポリトロープ変化を仮定すると、各シリンダ内の温度変化は

$$T_1 = T_1' \left(\frac{p_1}{p_1'} \right)^{(1-1/\kappa)} \quad (4)$$

$$T_2 = T_2' \left(\frac{p_2}{p_2'} \right)^{(1-1/\kappa)} \quad (5)$$

で表され、またシリンダ内の圧力変化の状態式は

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\kappa p_1}{l-X} \left\{ \frac{c_1}{\alpha l} \sqrt{2gRT_1} \cdot \phi \left(\frac{p_0}{p_1} \right) - \frac{dX}{dt} \right\} \quad (6)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{\kappa}{X} \left\{ \frac{c_2}{l} \sqrt{\frac{2gR}{T_s}} T_2 \phi(p_2) - p_2 \frac{dX}{dt} \right\} \quad (7)$$

で与えられる。ここで、

$$\begin{aligned} \phi \left(\frac{P_b}{P_a} \right) &= \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa-1} \left\{ \left(\frac{P_b}{P_a} \right)^{2/\kappa} - \left(\frac{P_b}{P_a} \right)^{(\kappa+1)/\kappa} \right\}} \\ &: 0.528 \leq \frac{P_b}{P_a} < 1 \quad (\text{亜音速域}) \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+1} \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{2/(\kappa-1)}} \\ &: 0 < \frac{P_b}{P_a} \leq 0.528 \quad (\text{音速域}) \end{aligned} \quad (8)$$

また、式 (1) の運動方程式を無次元化すると次式で表される。

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{1}{l} \{ f_a (p_2 - \alpha p_1) - f \} - 2\varepsilon \frac{dX}{dt} \quad (9)$$

これらの式は非線形微分方程式となるため解析的に解を求めることは困難であるが、駆動の初期条件が与えられるならば計算機により数値的にピストンの運動を求めることができる。

4. MO 回路におけるスティックスリップ運動

両シリンダ間の圧力差が小さく、ピストンのすべり速度が小さくなるとピストンはスティックスリップ運動を始める。図 2 は、実用されている空気圧シリンダ

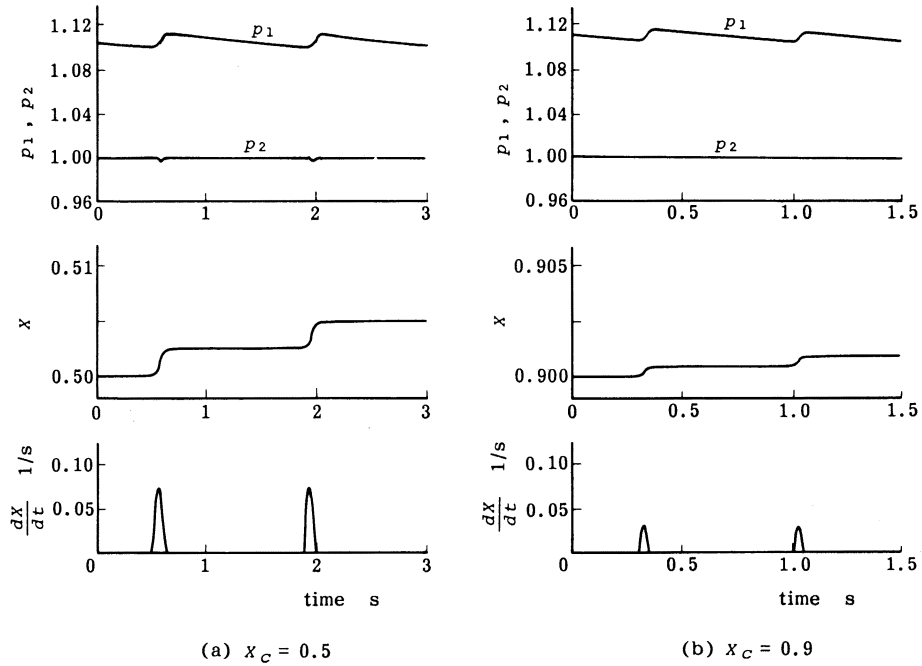


Fig. 2 Calculated results of stick-slip motion of pneumatic cylinder (M-O circuit)
 $M=8.64 \text{ kg}$, $l=15.0 \text{ cm}$, $A_2=19.6 \text{ cm}^2$, $\alpha=0.87$, $C_1=3.0 \times 10^{-5} \text{ cm}^2$, $C_2=5.84 \times 10^{-3} \text{ cm}^2$,
 $P_s=4.9 \times 10^5 \text{ Pa}$, $P_0=9.8 \times 10^4 \text{ Pa}$, $\lambda=0$, $\kappa=1.2$

の摩擦特性 (図5および図6に示される) を考慮して、式(2)から式(9)までの連立非線形微分方程式を数値計算によって解いた運動波形の例であるが、図(a)、図(b)いずれの場合にもスティックスリップ運動の発生が見られる。これらの運動は厳密には周期運動とはならないが、取扱いの便宜上、速度のピーク値から次のピーク値までの時間を1周期と定義することにする。MO回路では排気側シリンダの体積が減少するとともに等価的に系のばね定数が大きくなるため、図(a),(b)を比較しても分かるように、スティックスリップの周期、変位量(ステップ量)はともに X_c の増大とともに小さくなる傾向をとる。

次に、スティックスリップ運動に関する理論展開を簡単化するために、次のような仮定を導入する。

- (1) 排気側および流入側シリンダ内の温度変化は小さく、各シリンダ内の温度は近似的に $T_1 \approx T_0$, $T_2 \approx T_s$ で表される。
- (2) 排気側スピードコントローラを通過する空気は音速域である。したがって $\phi(P_0/P_1) = \text{一定}$ となる。
- (3) スティックスリップ発生時の変位量はピストンのストロークに比べて十分に小さい。ゆえに、流入側シリンダ内の圧力変化は無視できるとともに

$$\frac{1}{1-X} \approx \frac{1}{1-X_c} = \text{一定} \quad (10)$$

の関係が成り立つ。ここで、 X_c はスリップ運動の初期変位を示す。

- (4) 流体摩擦の項は固体摩擦の項に比べて小さく、無視できる。

いま、解析の便宜上ピストンに加わる推力が最大静止摩擦力より大きくなり、相対静止からすべり運動に移行する時刻を原点にとって考える。このとき、すべり運動中の圧力変化は近似的に

$$p_1 \approx \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{f_s}{f_a} \right) \left\{ 1 + \frac{\kappa(X - X_c)}{1 - X_c} - \frac{c_1 \kappa \sqrt{2gRT_0}}{al(1 - X_c)} \phi \left(\frac{p_0}{p_1} \right) t \right\} \quad (11)$$

で与えられる。さらに式(11)を式(9)に代入し、初期条件を考慮して解くことにより次式が得られる。

$$X - X_c = - \frac{(1 - X_c)(f_s - f_a)}{\kappa(f_a - f_s)} (\cos \omega_a t - 1) - \frac{c_1 \sqrt{2gRT_0}}{al} \phi \left(\frac{p_0}{p_1} \right) \left(\frac{\sin \omega_a t}{\omega_a} - 1 \right) \quad (12)$$

ただし

$$\omega_a = \sqrt{\frac{\kappa(f_a - f_s)}{l(1 - X_c)}} \quad (13)$$

である。式 (12) は、次式で与えられる時刻 t_a において $dX/dt=0$ となり極値をとる。

$$t_a = \frac{\pi + 2\delta_1}{\omega_a} \quad (14)$$

ただし、

$$\delta_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{\omega_a c_1 \sqrt{2gRT_0}}{\alpha(f_s - f_a)} \right. \\ \left. \times \phi \left(\frac{p_0}{p_1} \right) \right\}$$

この時点で摩擦の方が駆動力よりも大きいと、ピストンはスティック状態に移行する。このときのシリンダ内の圧力変化およびピストンの変位量 (ステップ量) $X_s (= X - X_c)$ は式 (11), (12) に $t=t_a$ を代入することにより近似的に求めることができる。

次にスティック状態について考える。シリンダ内の圧力変化は式 (6) によって与えられるが、改めてスティックの開始時刻を $t=0$ とおき、初期条件を考慮して積分すると、

$$p_1 = p_{10} \exp \left\{ -\frac{xc_1 \sqrt{2gRT_0}}{\alpha l (1 - X_c)} \phi \left(\frac{p_0}{p_1} \right) t \right\} \quad (15)$$

ここで、

$$p_{10} = \frac{f_a - f_s}{\alpha f_a} \exp \left\{ -\frac{xc_1 \sqrt{2gRT_0}}{\alpha l (1 - X_c)} \phi \left(\frac{p_0}{p_1} \right) t_a + \frac{X_s}{1 - X_c} \right\}$$

が得られる。スティック状態からスリップ運動に移行する時刻を t_b とすれば

$$t_b = \frac{\alpha l X_s}{xc_1 \sqrt{2gRT_0} \phi(p_0/p_1)} - t_a \quad (16)$$

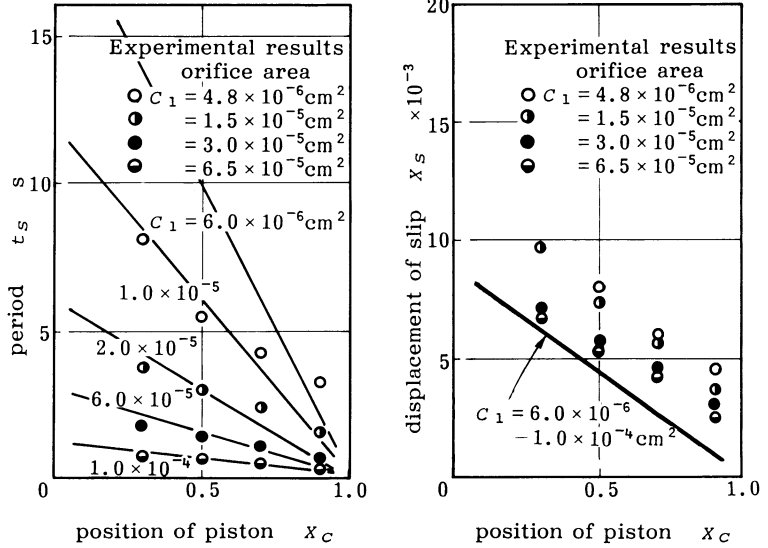
が求められ、スティックスリップ運動の周期 t_s は

$$t_s = \frac{\alpha l X_s}{xc_1 \sqrt{2gRT_0} \phi(p_0/p_1)} \quad (17)$$

で与えられる。

次にこれらの近似式に数値を代入し、さまざまなパラメータがスティックスリップ運動に及ぼす影響について調べてみる。なお数値計算にあたっては次のような仮定を置くことにする。

- (i) 静摩擦力はスティック時間と無関係に一定値をとる。
- (ii) 動摩擦力は、スリップ運動中の平均すべり速度を考慮して次式で示されるような平均摩擦力 (図6参照) をとり、一定の値とする。



(a) Period of stick-slip motion (b) Displacement during one period of stick-slip motion

Fig. 3 Influence of position of piston (M-O circuit)

$M=8.64 \text{ kg}$, $l=15.0 \text{ cm}$, $A_2=19.6 \text{ cm}^2$, $\alpha=0.87$, $P_s=4.9 \times 10^5 \text{ Pa}$, $C_2=5.84 \times 10^{-3} \text{ cm}^2$, Solid lines; approximated results under the conditions $\lambda=0$, $\kappa=1.2$, $F_{ac}=27.5 \text{ N}$ and $F_s=37.3 \text{ N}$

$$f_a = \frac{F_s + F_{ac}}{2M} \quad (18)$$

図3 (a), (b) はそれぞれピストン位置とスティックスリップ周期およびステップ量との関係を、絞りの有効断面積をパラメータとして、図示したものの例である。なお図中には都合上、実験結果をも記入している。ステップ量は式 (12) において $t=t_a$ とおいた値で与えられるが、一般に右辺の2項目は1項目に比べて微小と見なすことができ、 $X_c=1.0$ の近傍を除いて $\cos \omega a t_a = -1$ となるため絞りの影響はほとんど現れない。したがって図 (b) に示されるようにステップ量は X_c の増加、すなわち排気側シリンダの体積の減少とともにほぼ直線的に減少する傾向をとる。一方、周期は式 (17) から明らかのように、 X_c の増加とともにほぼ直線的に減少する傾向をとり、また排気側の絞り有効断面積が小さくなるとともに周期は増大することがわかる。

図4 (a), (b) はそれぞれ周期およびステップ量に及ぼす供給圧の影響を示したものである。 X_c をパラメータとして描いたものであるが、周期、ステップ量ともに近似的に $(f_a - f_s)$ に逆比例し、したがって周期、ステップ量ともに供給圧の増加とともに減少傾向をとる。

また、周期およびステップ量に及ぼす負荷の影響に

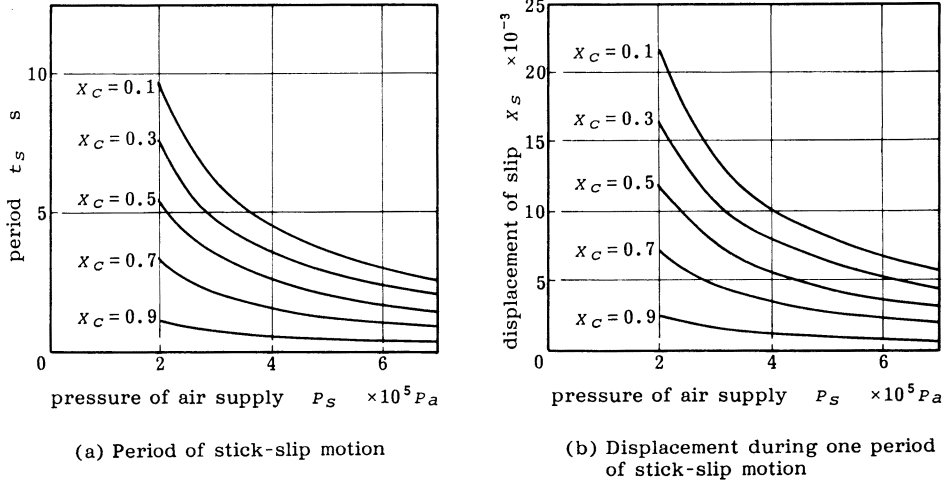


Fig. 4 Influence of pressure of air supply (M-O circuit)

$M=8.64 \text{ kg}$, $l=15.0 \text{ cm}$, $A_2=19.6 \text{ cm}^2$, $\alpha=0.87$, $C_1=3.0 \times 10^{-3} \text{ cm}^2$, $C_2=5.84 \times 10^{-3} \text{ cm}^2$,
 Solid lines; approximated results under the conditions $\lambda=0$, $\chi=1.2$, $F_{dc}=27.5 \text{ N}$ and $F_s=37.3 \text{ N}$

着目してみると、運動に大きな影響を及ぼす式 (12) の右辺第 1 項目には負荷質量の項は含まれず、したがって負荷の大きさはスティックスリップ運動にほとんど影響しないと言える。

5. MI 回路におけるスティックスリップ運動

前節と同様な仮定を導入して運動の式を解くことにより、MI 回路におけるピストンのスリップ時間 t_a は

$$t_a = \frac{\pi + 2\delta_2}{\omega_b} \quad (19)$$

となる。ここで

$$\omega_b = \sqrt{\frac{\chi(af_a p_0 + f_s)}{l \cdot X_c}}$$

$$\delta_2 = \tan^{-1} \frac{\chi f_a c_2 \sqrt{2gRT_s}}{\omega_b (f_s - f_a) X_c l} \phi(p_2)$$

また、スリップ運動による変位量 (ステップ量) は

$$\begin{aligned} X_s = & -\frac{X_c(f_s - f_a)}{\chi(af_a p_0 + f_s)} \cos \omega_b t_a \\ & - \frac{f_a c_2 \sqrt{2gRT_s}}{\omega_b l (af_a p_0 + f_s)} \phi(p_2) \sin \omega_b t_a \\ & + \frac{f_a c_2 \sqrt{2gRT_s}}{af_a p_0 + f_s} \phi(p_2) t_a + \frac{X_c(f_s - f_a)}{\chi(af_a p_0 + f_s)} \end{aligned} \quad (20)$$

で表され、スティック時間 t_b は

$$t_b = \frac{\{\alpha p_0 + f_s / f_a - p_{20}\} X_c l}{\chi c_2 \sqrt{2gRT_s} \phi(p_2)} \quad (21)$$

となる。ここで

$$p_{20} = \left(\alpha p_0 + \frac{f_s}{f_a} \right) \exp \left\{ \frac{\chi c_2 \sqrt{2gRT_s}}{l X_c} \phi(p_2) \cdot t_1 - \frac{\chi X_s}{X_c} \right\}$$

前と同様にして、これらの式に諸条件を代入することにより、スティックスリップ運動に及ぼす各種パラメータの影響を知ることができる。MO 回路では周期、ステップ量ともに X_c の増加とともにほぼ直線的に減少する傾向を示したが、MI 回路では X_c の増加とともに系の等価的なばね定数は小さくなるため全く逆の挙動を示す。すなわち、図 3 においてあたかも X_c 座標の 0 と 1.0 とを置き換えたかのような特性が得られる。絞りの有効断面積、供給圧、負荷などの影響に関しては MO 回路の場合と類似の傾向を示す。

6. 実験

前節までの理論結果を実証するために、ローラガイドを用いた負荷用テーブルを空気圧シリンダにより駆動させる装置を作製した。摩擦力は両シリンダ室の圧力およびピストンの加速度から演算回路を用いて電氣的に算出した。実験に用いた空気圧シリンダの概略は、ピストンのストローク $l=15 \text{ cm}$ 、ピストンの受圧面積 $A_2=19.6 \text{ cm}^2$ 、 $A_1/A_2=0.87$ であり、ルブリケータを用いてタービン油で潤滑した。

図 5 はスティック時間に対する静摩擦力の時間依存特性を求めた結果の例である。静摩擦力はスティック時間の増加とともに指数関数的に増加し、また供給圧の増加とともに増加する傾向をとることがわかる。

図 6 はピストンとシリンダ間の相対摩擦速度に対する動摩擦特性を求めたものの例である。摩擦速度が約

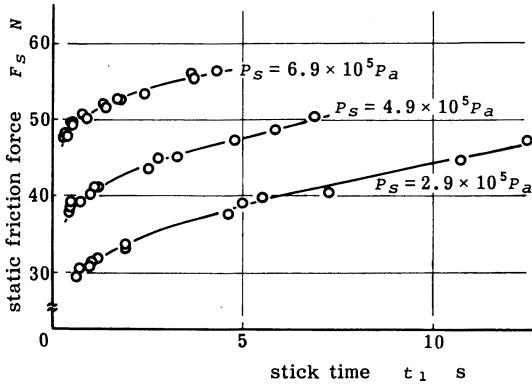


Fig. 5 Characteristics of friction force - Time effect on static friction force -

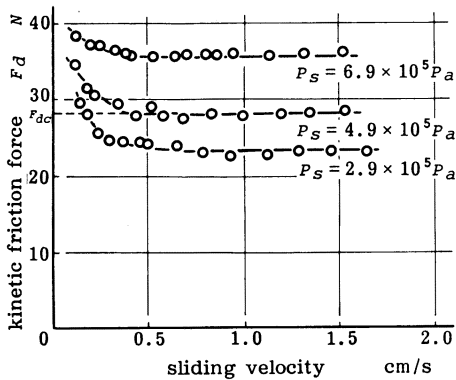


Fig. 6 Characteristics of friction force - Velocity effect on kinetic friction force -

0.5 cm/s 以上では動摩擦力はほぼ一定値 (F_{dc} とおく) をとるが, 0.5 cm/s 以下になると摩擦速度の減少とともに増大の傾向をとる. また, 静摩擦力と同様に供給圧の増加とともに動摩擦力も増加する⁵⁾.

実験に際し, スティックスリップ発生時のピストンの変位, 速度, 加速度および両シリンダ室の圧力変化の様子を測定 (測定結果はページ数の都合上割愛) したが, 図2に示した理論結果とはほとんどよく一致した波形が得られている. このような運動波形からピストン位置 X_c に対するスティックスリップ周期 t_s およびステップ量 X_s を読み取った結果を図3中に示す.

これらの図から, 実験結果は近似計算の結果にほぼ一致した傾向をとることがわかる.

MI 回路についても同様の実験を行い, ほとんど理論結果と一致した傾向を得ている.

7. 結 論

いくつかの仮定のもとに, 空気圧シリンダの運動の実用的な近似式を導き, 各種パラメータがスティック

スリップ運動に及ぼす影響を明らかにした. 主な結果は次のとおりである.

- (1) スティックスリップ発生時における運動の周期および1周期間のピストンの変位量を求める近似式を導いた. これらの式から, 各種の駆動条件が運動に及ぼす影響を容易に評価することが可能となった.
- (2) スティックスリップ運動の周期はピストンの位置によって大きく変化する. MO 回路では流入側シリンダの体積が増加するとともに系の等価的なばね定数が大きくなるため周期は小さくなる. また MI 回路では逆に流入側シリンダの体積増加とともに等価的なばね定数は小さくなり周期は大きくなる.
- (3) スティックスリップ運動における1周期間の変位量 (ステップ量) はピストンの位置によって大きく変化する. MO 回路では流入側シリンダの体積が増加するとともに小さくなり, MI 回路では逆に流入側シリンダの体積増加とともに大きくなる傾向をとる.
- (4) MO, MI 回路いずれの場合も, 絞りの有効断面積が大きくなると周期, ステップ量ともに小さくなる傾向をとる.
- (5) MO, MI 回路いずれの場合も, 供給圧が高くなると周期, ステップ量ともに小さくなる.
- (6) MO, MI 回路いずれの場合も, 負荷の大きさはスティックスリップ運動にほとんど影響しない.
- (7) これらの解析結果は実験結果によって確かめられている.

謝 辞

実験にあたり, 種々協力された金沢大学・野村久直氏, 当時の金沢大学学生・寺田弘司氏に深く感謝の意を表する.

参 考 文 献

- 1) 竹中利夫, 浦田暎三, 滝沢正隆: 空気圧シリンダの動特性, 日本機械学会論文集, **35**, 279 (1969) 2287.
- 2) K. Yamafuji & T. Iwagaya: Speed and Position Control of a Pneumatic Cylinder Using a Cam and Air Sensors, Proc. 5th World Congr. Theory of Machines and Mechanisms, (1979) 1275.
- 3) 花房秀郎, 則次俊郎: 空気圧シリンダの高精度位置決めのための圧力制御方式, 日本機械学会論文集, **47**, 415 (1981) 328.
- 4) 亘理 厚, 杉本隆尚: 摩擦による振動, 日本機械学会論文集, **29**, 200 (1963) 769.
- 5) 荒木獻次, 柵橋綱男, 大野賢一: 空気圧シリンダの摩擦測定, 春季油空圧講演会講演論文集 (1979) 59.