講　　　座

農業気象 (*J. Agr. Met.*) 44 (1): 49–51, 1988

土壌中におけるCO_2拡散問題の別解法

小森友明・関　平和
(金沢大学工学部土木建設工学科)

A Proposal to Solve Diffusion Problem of CO_2 in Soil Analytically

Tomoaki KOMORI and Hirakazu SEKI
(Department of Civil Engineering, Kanazawa University, Kodatsuno, Kanazawa, 920.)

1. はじめに

土壌中のCO_2拡散に関する理論的な取り扱いには，しばしば Van Bavel (1951) の解析解が引用されている (三原，1980)。

Van Bavel が解析解を導いた数学的手順については原報を参照されたいが，この問題は現象的に「分子拡散」の範疇と見做されるので，移動速度論的な概念を適用して問題を解くことも可能である。そこで，移動速度論的な観点から原報にある case 1，case 2 について解析解を求めたので，以下にその手順を述べることとする。

2. 解の導出

Van Bavel は系が流れのない静止系で，拡散が土壌深さ z 方向にのみ起こるとして拡散方程式を次のように与えた。

$$\frac{\partial C_A}{\partial t}=D_A\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2}+\alpha\beta \tag{1}$$

ここで，C_Aは土壌中におけるCO_2濃度(分圧)，t は時間，D_A は有効拡散係数，α は土壌単位体積単位時間当りに発生するCO_2量，β はガス分圧への換算係数である。

Van Bavel は (1) 式において，まず定常状態を仮定し，CO_2発生域とCO_2発生がない領域の2相を含め，$z=0$～$z=H$の全域にわたり，CO_2発生関数であるステップ関数$\alpha(z)$を Fourier 級数で近似し，$z=0$，$z=H$ における境界条件を適用することによって1相問題としての解を導いている。したがって，得られた解析解は一つの式で $z=0$～$z=H$ の間の CO_2濃度を求めることができるが，この問題は特にステップ関数$\alpha(z)$を Fourier 級数で近似しなくとも移動速度論的な観点から，CO_2拡散現象を忠実に数学的に記述することにより容易に解を導くことができる。

(1) 原報 case 1 の別解法

case 1 の問題では，便宜上系は定常状態 $\partial C_A/\partial t=0$ で，土壌表面 $z=0$～$z=L$ では$\alpha=A$ で CO_2が一様発生，それより下層の $z=L$～$z=H$ では $\alpha=0$ で CO_2の発生がないとしている。

ここで，case 1 の題意から CO_2発生領域に注目すると，$z=L$ を界して上下の各層では拡散現象が異なることに気付く (小森，1987)。即ち，$0\leqq z\leqq L$ と $L\leqq z\leqq H$ では一つの拡散方程式で現象を表すことができない。したがって，拡散方程式は二つの層に対して別々に与えられるが，差し当たりCO_2発生域$0\leqq z\leqq L$におけるCO_2濃度をC_{A1}，領域$L\leqq z\leqq H$ における CO_2濃度をC_{A2} とすると，D_A，A，β は一定であるとして各層の拡散方程式は(1)式より次のように与えられる。

$$D_A\frac{d^2 C_{A1}}{dz^2}+A\beta=0 \qquad (0<z<L) \tag{2}$$

$$D_A\frac{d^2 C_{A2}}{dz^2}=0 \qquad (L<z<H) \tag{3}$$

一方，土壌表面$z=0$ ではC_{A1}は C_{A0} で一定であるとすると $z=0$ における境界条件は，

$$C_{A1}=C_{A0} \qquad (z=0) \tag{4}$$

また，二つの層が接する $z=L$ では両層の CO_2 濃度が

昭和62年10月29日　北陸支部大会シンポジウムにて一部発表
昭和62月12月23日　受理

等しく，かつCO_2の移動流束は等しいので（数学的にはC_{A1}とC_{A2}は連続である）

$$C_{A1}=C_{A2} \qquad (z=L) \qquad (5)$$

$$-D_A\frac{dC_{A1}}{dz}=-D_A\frac{dC_{A2}}{dz} \qquad (z=L) \qquad (6)$$

そして，$z=H$ではCO_2の流入出が完全に遮断されているとして次の境界条件が与えられる。

$$\frac{dC_{A2}}{dz}=0 \qquad (z=H) \qquad (7)$$

以上のごとく拡散方程式，境界条件が与えられたので一般解を求めるが，演算に先立って次のような無次元数を導入する。

$$\Phi_1=(C_{A1}-C_{A0})/C_{A0},\quad \Phi_2=(C_{A2}-C_{A0})/C_{A0}$$
$$\xi=z/H,\quad \eta=L/H,\quad \varepsilon=(\beta A/D_A)(H^2/C_{A0}) \qquad (8)$$

これらの無次元数を用いて，(2)～(7)式を書き換えると，

$$\frac{d^2\Phi_1}{d\xi^2}=-\varepsilon \qquad (0<\xi<\eta) \qquad (9)$$

$$\frac{d^2\Phi_2}{d\xi^2}=0 \qquad (\eta<\xi<1) \qquad (10)$$

$$\Phi_1=0 \qquad (\xi=0) \qquad (11)$$

$$\Phi_1=\Phi_2 \qquad (\xi=\eta) \qquad (12)$$

$$\frac{d\Phi_1}{d\xi}=\frac{d\Phi_2}{d\xi} \qquad (\xi=\eta) \qquad (13)$$

$$\frac{d\Phi_2}{d\xi}=0 \qquad (\xi=1) \qquad (14)$$

ここで，C_1，C_2，C_3，C_4を定数として(9)，(10)式をξに関して2回積分するとΦ_1，Φ_2の特解は，

$$\Phi_1=-\frac{1}{2}\varepsilon\xi^2+C_1\xi+C_2 \qquad (15)$$

$$\Phi_2=C_3\xi+C_4 \qquad (16)$$

次に(15)式に(11)式，(16)式に(14)式の関係を適合させると$C_2=0$，$C_3=0$が得られ，さらに(12)，(13)式から，$C_1=\varepsilon\eta$，$C_4=-\varepsilon\eta^2/2$が決定され，これらを，(15)，(16)式に代入して整理すると一般解は，

$$\Phi_1=\varepsilon\left(\eta\xi-\frac{1}{2}\xi^2\right) \qquad (0\leq\xi\leq\eta) \qquad (17)$$

$$\Phi_2=\frac{1}{2}\varepsilon\eta^2=\mathrm{Const.} \qquad (\eta\leq\xi\leq1) \qquad (18)$$

(2) 原報 case 2 の別解法

case 2 の問題では，$z=0$～$z=L$でCO_2の発生がなく，$z=L$～$z=H$ではCO_2が$\alpha=A$で一様発生している。

即ち case 1 の問題と比べるとCO_2の発生域が逆転している。この場合，case 1 の問題と同じような手順で，無次元数を用い拡散方程式，境界条件を表せば以下のようになる。

$$\frac{d^2\Phi_1}{d\xi^2}=0 \qquad (0<\xi<\eta) \qquad (19)$$

$$\frac{d^2\Phi_2}{d\xi^2}=-\varepsilon \qquad (\eta<\xi<1) \qquad (20)$$

$$\Phi_1=0 \qquad (\xi=0) \qquad (21)$$

$$\Phi_1=\Phi_2 \qquad (\xi=\eta) \qquad (22)$$

$$\frac{d\Phi_1}{d\xi}=\frac{d\Phi_2}{d\xi} \qquad (\xi=\eta) \qquad (23)$$

$$\frac{d\Phi_2}{d\xi}=0 \qquad (\xi=1) \qquad (24)$$

この場合もC_1，C_2，C_3，C_4を定数として(19)，(20)

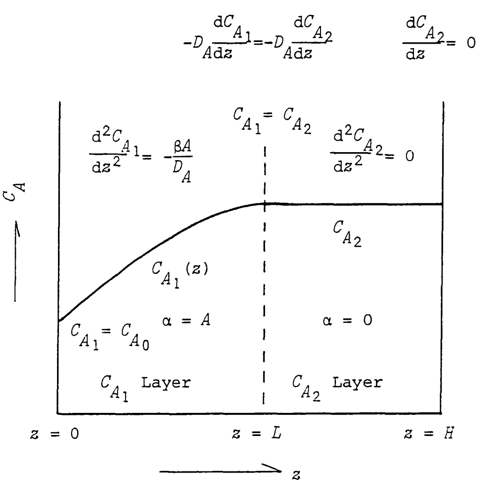

Fig. 1 Schematic Representation for the Analytical Solution of Case 1

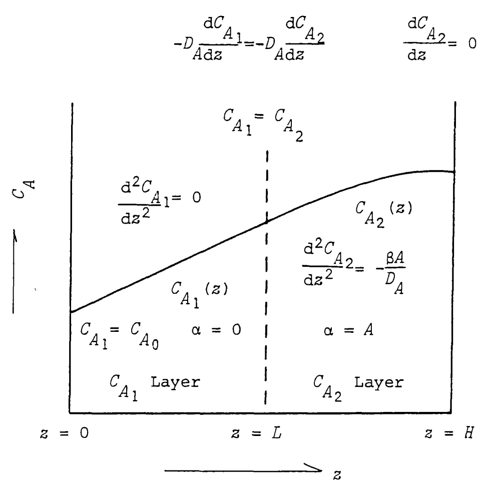

Fig. 2 Schematic Representation for the Analytical Solution of Case 2

式の特解を求めると，

$$\Phi_1 = C_1\xi + C_2 \qquad (25)$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{2}\varepsilon\xi^2 + C_3\xi + C_4 \qquad (26)$$

ここで，(25)式に(21)式そして(26)式に(24)式の条件を適合させると $C_2=0$， $C_3=\varepsilon$，さらに(22)，(23)式の条件より，$C_1=\varepsilon(1-\eta)$，$C_4=-\varepsilon\eta^2/2$ が得られる。以上のように決定した各定数を（25)，(26）式に代入して整理すれば一般解は，

$$\Phi_1 = \varepsilon(1-\eta)\xi \qquad (0\leq\xi\leq\eta) \quad (27)$$

$$\Phi_2 = \varepsilon\left[\xi - \frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)\right] \qquad (\eta\leq\xi\leq1) \quad (28)$$

以上のように，移動速度論的な手法を用いると，ややもすれば煩雑な Fourier 級数の計算を省略することができ，同時に拡散領域 $z=0\sim z=H$ の全域にわたってCO_2濃度を比較的容易に計算することができる。なお，ここで取り扱った case 1，case 2 の現象を数学的にモデル表示すると Fig.1，Fig.2 のようになる。

参考文献

Van Bavel, C. H. M., 1951: A Soil Aeration Theory Based on Diffusion. *Soil Sci.,* **72**, p.33–p.46.

三原義秋編著，1980：「温室設計の基礎と実際」，養賢堂.

小森友明，1987：昭和62年度北陸支部大会シンポジウム「農業気象と作物生育過程への工学モデルの適用」資料及び別添資料.