

A Leaky RLS Algorithm on the Order of N^2 for Time-Varying Signal Processings

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-10-03 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/2297/44819

研究速報

時変信号処理のための $O(N^2)$ の leaky RLS アルゴリズム堀田 英輔^{†a)} (正員)A Leaky RLS Algorithm on the Order of N^2 for Time-Varying Signal ProcessingsEisuke H●RITA^{†a)}, Member[†] 金沢大学理工研究域, 金沢市

College of Science and Engineering, Kanazawa University, Kakuma, Kanazawa-shi, 920-1192 Japan

a) E-mail: horita@sc.kanazawa-u.ac.jp

あらまし 指数重み係数を導入して正則化された線形最小二乗法として, Tikhonov 法と Levenberg-Marquardt 法が知られている. Tikhonov 法の適応的解法は leaky recursive least-squares (LRLS) アルゴリズムであり, 係数ベクトルの更新式にリーク項が存在する. 本論文では, $O(N^2)$ の LRLS アルゴリズムを簡潔に紹介し, シミュレーションにより相関行列が悪条件となる時変信号に対して, LRLS アルゴリズムがリーク項が存在しない他の手法より有効であることを示す.

キーワード 線形最小二乗法, Tikhonov 法, Levenberg-Marquardt 法, RLS アルゴリズム, LRLS アルゴリズム

1. まえがき

指数重み係数 (忘却係数) λ を導入した RLS アルゴリズムは正則化された最小二乗法の正確かつ適応的な解法である [1], [2]. 相関行列への正則化項の追加は最小二乗解に偏りをもたらすが, アルゴリズムはより頑健となる. また, 標準的な RLS アルゴリズムは数値的に不安定であるため [3], 平方根 RLS アルゴリズム [1] が用いられることが多い. しかし, 重み係数 λ は 1 より小さな正数であり, 相関行列の正則化項 $\delta\lambda^k$ (ここで, δ はある正定数である) は繰返し回数 k の増加に伴い 0 となる [2], [4], [5]. このため, 室内音響信号処理 [6] や適応的ビームフォーミングに見られる相関行列が悪条件 [1] となる状況では, より頑健な平方根 RLS アルゴリズムでもその応用は不適切なものとなる [7].

筆者は $\lambda \neq 1$ の場合でも正則化項が全ての k で一定である LRLS アルゴリズムを提案した [4], [5]. 相関行列に正則化項を追加した RLS アルゴリズムについては文献 [6] に詳しく述べられている. そこでは, 指数重み係数を導入した Tikhonov [8] の正則化された最

小二乗法による RLS アルゴリズムと, 指数重み係数を導入した Levenberg [9]-Marquardt [10] による正則化された最小二乗法による RLS アルゴリズムが比較され述べられている. 前者は筆者が提案した LRLS アルゴリズムとして紹介されており, 後者はその導出に近似が用いられているため, 係数ベクトルの更新式に LRLS アルゴリズムに存在するリーク項 (その定義は 2. で行う) が存在しない点が異なる.

文献 [5] では, 相関行列の固有値と固有ベクトルを $O(N^2)$ で更新し, 係数ベクトルの更新を $O(N^2)$ で実現する LRLS アルゴリズムが紹介されている. しかしながら, 文献 [5] で述べられている手法 [11] では, 固有値と固有ベクトルの更新に並列処理の導入は可能であるが, 固有ベクトルの更新には fast mul tipol e 法 [2] が導入されている. 文献 [12] の手法は標準的な RLS アルゴリズムに比してかなり複雑であるため, 文献 [5] における $O(N^2)$ の LRLS アルゴリズムは実際の信号処理で用いられる N の値では $O(N^3)$ の LRLS アルゴリズムより演算時間が減少しないことが多い [7]. 一方, 文献 [13] では, 文献 [14] の手法を応用することで時変の対角行列を加えた相関行列の更新式により $O(N)$ で実現される高速 RLS アルゴリズムが提案されているが, 係数ベクトルの更新式にリーク項は存在しない. 文献 [14] の方法は文献 [6] でも導入されているため, LRLS アルゴリズムへの文献 [14] の手法の適用法も明らかである.

しかしながら, 文献 [6] では λ をかなり 1 に近い値に設定して各種の実験を行っている. リーク項は $(1-\lambda)$ に比例するため [4], [5], 文献 [6] でリーク項の影響が示されていないのは自然である. 本論文では, まず, 文献 [14] の手法を採用し, かつ, 推定される係数の精度をほぼ保持したまま $O(N^2)$ で, すなわち, 標準的な RLS アルゴリズムの約 2 倍の演算量で実現される LRLS アルゴリズムを簡潔に紹介する. 次にシミュレーションにおいて, 悪条件の時変係数推定問題をより小さな λ を用いて解くことで各手法を評価し, リーク項の有効性を示す.

2. LRLS アルゴリズム

LRLS アルゴリズムの評価関数を式 (1) で定義する.

$$J(k) = \alpha \|\mathbf{w}(k)\|_2^2 + \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \{d(i) - \mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(i)\}^2 \quad (1)$$

ここで, α はある正定数, 忘却係数 λ は 1 より小さな

正定数であり, $d(i)$ は所望信号である. また, $x(i)$ と $w(k)$ は, フィルタの入力ベクトルと係数ベクトルであり, 各々, 式 (2) と式 (3) で定義される.

$$x^T(i) = [x(i), x(i-1), \dots, x(i-N+1)] \quad (2)$$

$$w^T(k) = [w_0(k), w_1(k), \dots, w_{N-1}(k)] \quad (3)$$

式 (1) より, $O(N^3)$ の LRLS アルゴリズムが下記のように得られる [4], [5].

[$O(N^3)$ の LRLS アルゴリズム]

$k = 0$:

$$\Phi(0) = \alpha I, w(0) = O \quad (4)$$

$k = 1, 2, \dots$:

$$\nu(k) = d(k) - w^T(k-1)x(k) \quad (5)$$

$$\Phi(k) = \lambda\Phi(k-1) + x(k)x^T(k) + \alpha(1-\lambda)I \quad (6)$$

$$w(k) = [I - \alpha(1-\lambda)\Phi^{-1}(k)]w(k-1) + \Phi^{-1}(k)x(k)\nu(k) \quad (7)$$

ここで, 相関行列 $\Phi(k)$ は次式で定義される.

$$\Phi(k) = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} x(i)x^T(i) + \alpha I \quad (8)$$

文献 [4], [5] より, 上記のアルゴリズムの導出には近似が一切用いられていないことは明らかである. 式 (7) の $-\alpha(1-\lambda)\Phi^{-1}(k)$ と $w(k-1)$ との積がリーク項であり [4], [5], $1-\lambda$ に比例するため λ をより小さくすると, この項の影響が大きくなる.

2.1 $O(N^2)$ の LRLS アルゴリズム

本論文でも文献 [14] の方法を導入し, $O(N^2)$ で実行可能な LRLS アルゴリズムを簡潔に記述する. そのため, 式 (6) の更新式のフルランクの正則化項 $\alpha(1-\lambda)I$ は, ランク 1 の行列による加算で式 (9) の 2 行目のように近似できる [14].

$$\Phi(k) \approx \lambda\Phi(k-1) + x(k)x^T(k) + \alpha(1-\lambda)N\xi_{k,N}\xi_{k,N}^T \quad (9)$$

ここで, $\xi_{k,N}$ は $N \times 1$ の単位ベクトルで $((k-1) \bmod N) + 1$ 番目の要素が 1 で他は 0 となつて

いる. 式 (9) を

$$\Phi'(k) = \lambda\Phi(k-1) + \alpha(1-\lambda)N\xi_{k,N}\xi_{k,N}^T \quad (10)$$

$$\Phi(k) = \Phi'(k) + x(k)x^T(k) \quad (11)$$

と記述し直すと, どちらもランク 1 の行列の更新となるため, それぞれに逆行列の補題 [1] を応用することでその更新が $O(N^2)$ で達成される.

$$\beta(k) = (\alpha(1-\lambda)N)^{-1} + \lambda^{-1}\xi_{k,N}^T P(k-1)\xi_{k,N} \quad (12)$$

$$G(k) = \lambda^{-1}P(k-1) - \beta^{-1}(k)\lambda^{-2}P(k-1)\xi_{k,N}\xi_{k,N}^T P(k-1) \quad (13)$$

$$P(k) = G(k) - \frac{G(k)x(k)x^T(k)G(k)}{1 + x^T(k)G(k)x(k)} \quad (14)$$

以上より, $O(N^2)$ の LRLS アルゴリズムを以下のように記述できる.

[$O(N^2)$ の LRLS アルゴリズム]

$k = 0$:

$$P(0) = \alpha^{-1}I, w(0) = O \quad (15)$$

$k = 1, 2, \dots$:

$$\nu(k) = d(k) - w^T(k-1)x(k) \quad (16)$$

$$\beta(k) = (\alpha(1-\lambda)N)^{-1} + \lambda^{-1}\xi_{k,N}^T P(k-1)\xi_{k,N} \quad (17)$$

$$G(k) = \lambda^{-1}P(k-1) - \beta^{-1}(k)\lambda^{-2}P(k-1)\xi_{k,N}\xi_{k,N}^T P(k-1) \quad (18)$$

$$f(k) = \frac{G(k)x(k)}{1 + x^T(k)G(k)x(k)} \quad (19)$$

$$P(k) = G(k) - f(k)x^T(k)G(k) \quad (20)$$

$$w(k) = w(k-1) - \alpha(1-\lambda)P(k)w(k-1) + f(k)\nu(k) \quad (21)$$

ここに、 $P(k) = \Phi^{-1}(k)$ である。

上述のアルゴリズムにおいて、時変の正則化を積極的に導入するためには式 (1) の α を $\alpha(k)$ に変更する方法が考えられる。その場合、上記のアルゴリズムにおいて $\alpha(1-\lambda)$ が $\alpha(k) - \lambda\alpha(k-1)$ に置換される。しかし、本アルゴリズムでは逆行列の補題が用いられており、定理の適用条件により、 $\alpha(k) - \lambda\alpha(k-1) > 0$ を満たす正数 $\alpha(k)$ としなければならないが、その設定法は今後の課題とする。

3. シミュレーション

本論文では、MATLAB を用いて 32 ビット倍精度でシミュレーションを行った。2.1 のアルゴリズムの有効性を検証するため、推定されるべき係数が変動するシステムを考えた。与えた未知システムのインパルス応答は次式である。

$$w_o(k) = w_{o,0} \cos(2\pi Fk + \phi_p) \quad (22)$$

ここで、 $w_{o,0}$ は $\text{fir1}(N-1, 0.5)$ で与えた。また、 ϕ_p は p 番目のインパルス応答に対応する、区間 $[-\pi, \pi)$ に一様分布する乱数とした。

所望信号 $d(k)$ はサンプリング周波数 8 kHz の音声信号 $x(k)$ を時変システム $w_o(k)$ に入力し、その出力に白色雑音を加えたものである。使用した音声信号は NTT アドバンステクノロジー株式会社の音素バランス 1000 文音声データ CD-ROM より、男性音声「一週間ばかり、ニューヨークを取材した」を選んだ。その波形を図 1 に示す。

比較される手法は、標準的な RLS アルゴリズム、2.1 の式 (21) でリーク項を除いた手法 (Levenberg-Marquardt 法)、2. の LRLS アルゴリズム ($O(N^3)$ の Tikhonov 法)、2.1 の提案法 ($O(N^2)$ の Tikhonov 法) である。各手法の評価には以下の式を用いた。システムの出力に加算する白色雑音 $e_i(k)$, $i = 1, 2, \dots, L$ を変えた独立試行を $L = 100$ 回行い、

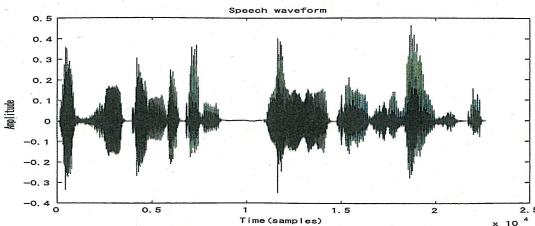


図 1 シミュレーションに用いた音声波形
Fig. 1 Speech waveform used for simulations.

$$\epsilon_i(k) = \frac{\|w^i(k) - w_o(k)\|_2^2}{\|w_o(k)\|_2^2} \quad (23)$$

により、その平均値

$$10 \log_{10} \left(\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \epsilon_i(k) \right) \quad (24)$$

を求めた。なお、白色雑音 $w_i(k)$ はその SN 比が 30 dB となるように与えた。

$\alpha = 10^{-5}$ とした $N = 64, 32, 8$ の場合と、 $\alpha = 10^{-6}$ とした $N = 8$ の場合について、評価結果を図 2 から図 5 に示す。図 2 から図 5 より、2.1 の手法が 2. の手法の係数推定精度をほぼ維持できていることが分かる。また、 $N = 64, 32$ の場合、LRLS アルゴリズムは他のリーク項が存在しない手法より、音声信号がほぼ無音となる区間で精度良く係数を推定できている。一方、 $N = 8$ の場合は、同じ α の値では音声信号がほぼ無音となる区間で Levenberg-Marquardt

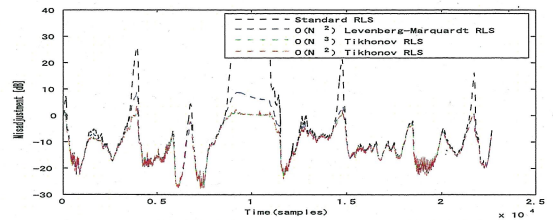


図 2 RLS 法, Levenberg-Marquardt 法, $O(N^3)$ の Tikhonov 法, $O(N^2)$ の Tikhonov 法の時変システムへの追従性の比較: $N = 64, F = 10^{-4}, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-5}$

Fig. 2 The tracking performance of the RLS, the Levenberg-Marquardt, the $O(N^3)$ Tikhonov, and the $O(N^2)$ Tikhonov algorithms: $N = 64, F = 10^{-4}, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-5}$.

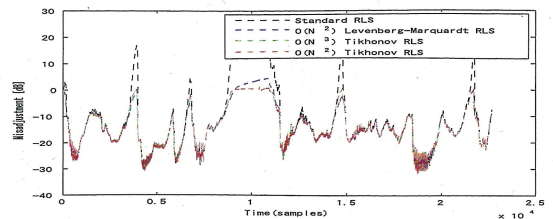


図 3 RLS 法, Levenberg-Marquardt 法, $O(N^3)$ の Tikhonov 法, $O(N^2)$ の Tikhonov 法の時変システムへの追従性の比較: $N = 32, F = 10^{-4}, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-5}$

Fig. 3 The tracking performance of the RLS, the Levenberg-Marquardt, the $O(N^3)$ Tikhonov, and the $O(N^2)$ Tikhonov algorithms: $N = 32, F = 10^{-4}, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-5}$.

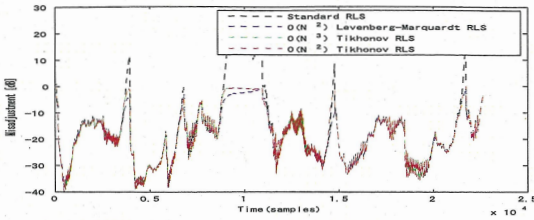


図 4 RLS 法, Levenberg-Marquardt 法, $O(N^3)$ の Tikhonov 法, $O(N^2)$ の Tikhonov 法の時変システムへの追従性の比較: $N = 8, F = 10^{-4}, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-5}$

Fig.4 The tracking performance of the RLS, the Levenberg-Marquardt, the $O(N^3)$ Tikhonov, and the $O(N^2)$ Tikhonov algorithms: $N = 8, F = 10^{-4}, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-5}$.

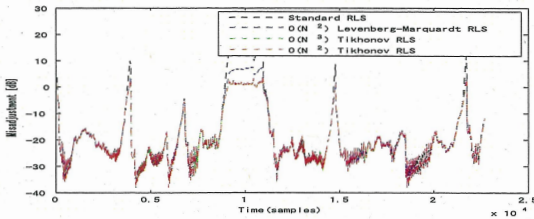


図 5 RLS 法, Levenberg-Marquardt 法, $O(N^3)$ の Tikhonov 法, $O(N^2)$ の Tikhonov 法の時変システムへの追従性の比較: $N = 8, F = 10^{-4}, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-6}$

Fig.5 The tracking performance of the RLS, the Levenberg-Marquardt, the $O(N^3)$ Tikhonov, and the $O(N^2)$ Tikhonov algorithms: $N = 8, F = 10^{-4}, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-6}$.

法の方が Tikhonov 法より良い推定精度を与えているが, $\alpha = 10^{-6}$ と小さくした場合には, Tikhonov 法の方が Levenberg-Marquardt 法より良い結果を与えている. 他の実験からも $N = 8$ のように小さな N ではリーク項の有効性は大きくなかった.

以上の結果を考察するため, まず, 各時刻 k の相関行列の条件数 [1] (= 最大固有値/最小固有値) を求め, その時間変化を図 6 と図 7 に示す. 一般に, 音声信号では破裂音 [15] を含んでいる場合等, 自然な発声ではほぼ無音となる区間が存在する. ほぼ無音となる区間では RLS アルゴリズムの相関行列は時刻 k がある程度大きくなると $0 < \lambda < 1$ であるため, $\Phi_{RLS}(k) \approx \delta \lambda^k I \approx O$ となるが, Levenberg-Marquardt 法と Tikhonov 法では共に $\Phi(k) \approx \alpha I$ となる. また, 相関行列の次数は N であるため, ほぼ無音となる区間では行列 $\sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^T(i)$ は N が大きくなるとその最小固有値がかなり小さな正值となる. 相関行列の最小固有値はリーク項の大きさの尺度であ

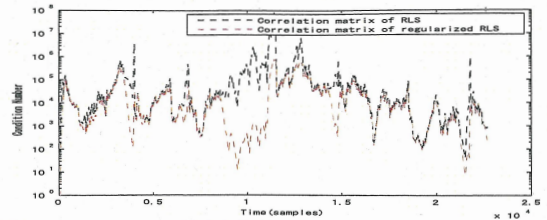


図 6 相関行列の条件数の時間変化: $N = 64, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-5}$

Fig.6 The time-varying condition numbers of the correlation matrices: $N = 64, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-5}$.

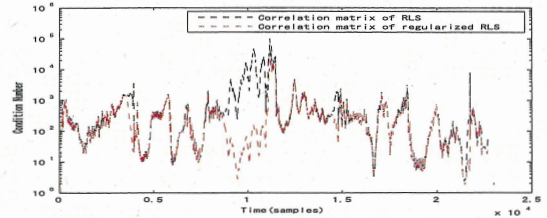


図 7 相関行列の条件数の時間変化: $N = 8, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-5}$

Fig.7 The time-varying condition numbers of the correlation matrices: $N = 8, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-5}$.

る, $\alpha(1-\lambda) \|\Phi^{-1}(k)\|_2 = \alpha(1-\lambda) \rho_{min}^{-1}(k)$, に関係しているため, その値を図 8 から図 10 に示す. ここで, $\rho_{min}(k)$ は相関行列 $\Phi(k)$ の最小固有値であり, 音声信号がほぼ無音となる区間では $\rho_{min}(k) \approx \alpha$ であるため, リーク項の大きさはこの区間で $\alpha(1-\lambda)\alpha^{-1} = (1-\lambda)$ の最大値に近づく.

図 6 と図 7 より, 音声信号がほぼ無音となる区間では RLS アルゴリズムの相関行列の条件数が Levenberg-Marquardt 法や Tikhonov 法の相関行列の条件数より大きな値を示し悪条件となっているため, 正則化項の有効性が理解できる. また, 図 8 から図 10 より, 音声信号のパワーが大きい区間ではリーク項の大きさが減少して手法間の差がほとんどなくなるが, ほぼ無音となる区間ではリーク項が大きくなってその有効性に寄与していることが分かる. そして, N が大きくなると相関行列の最小固有値が小さくなる区間が多くなり, それに伴いリーク項が機能する区間が多くなっている. 図 9 と図 10 より, α を小さくするとリーク項が大きな値をとる区間がより減少するため, 必要以上に大きな α は LRLS アルゴリズムの係数推定値に偏りをもたらすといえる.

なお, λ を 1 に近づけていくとリーク項が 0 に近づ

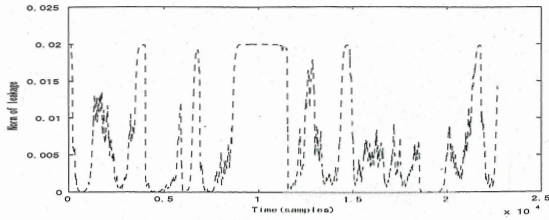


図 8 リーク項のノルムの時間変化: $N = 64, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-5}$
 Fig. 8 The time-varying norm of the leakage matrix: $N = 64, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-5}$.

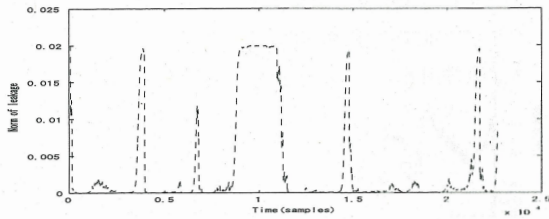


図 9 リーク項のノルムの時間変化: $N = 8, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-5}$
 Fig. 9 The time-varying norm of the leakage matrix: $N = 8, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-5}$.

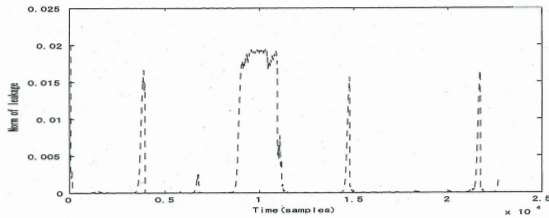


図 10 リーク項のノルムの時間変化: $N = 8, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-6}$
 Fig. 10 The time-varying norm of the leakage matrix: $N = 8, \lambda = 0.98, \alpha = \delta = 10^{-6}$.

いていくため、手法間の差は減少していく。これは文献[6]の結果と矛盾しないことになる。

4. むすび

本論文では、まず、文献[14]の手法を採用することで $O(N^2)$ で実現される LRLS アルゴリズムを簡潔に記述した。次にシミュレーションにより、入力信号の相関行列が悪条件で、かつ、変動する時変システムの同定に λ を小さくした提案法が有効であることを示した。提案法ではリーク項がアルゴリズムの数値的安定性を向上させるが、標準的な RLS アルゴリズムと同様な構造となっている。そのため、更なる安定性の向上のため、提案法の平方根 RLS アルゴリズムに対応するものを検討することが今後の課題である。

謝辞 貴重なコメントを頂きました査読者に深謝致します。

文 献

- [1] S. Haykin, Adaptive Filter Theory, 2nd ed., Prentice Hall, 1991.
- [2] A.H. Sayed and T. Kailath, "A state-space approach to adaptive RLS filtering," IEEE Signal Process. Mag., vol.11, no.3, pp.18-60, July 1994.
- [3] S.H. Ardalan, "Floating-point error analysis of recursive least-squares and least-mean-squares adaptive filters," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-33, no.12, pp.1192-1208, Dec. 1986.
- [4] 堀田英輔, 宮永喜一, "時変信号のための数値的に安定な RLS アルゴリズムの提案," 信学論 (A), vol.J81-A, no.1, pp.33-43, Jan. 1998.
- [5] E. Horita, K. Sumiya, H. Urakami, and S. Mitsuishi, "A leaky RLS algorithm: Its optimality and implementation," IEEE Trans. Signal Process., vol.52, no.10, pp.2924-2932, Oct. 2004.
- [6] T. van Waterschoot, G. Rombouts, and M. Moonen, "Optimally regularized adaptive filtering algorithms for room acoustic signal enhancement," Elsevier Signal Processing, vol.88, pp.594-611, 2008.
- [7] M.C. Tsakiris, C.G. Lopes, and V.H. Nascimento, "An array recursive least-squares algorithm with generic nonfading regularization matrix," IEEE Signal Process. Lett., vol.17, no.12, pp.1001-1004, Dec. 2010.
- [8] A. Tikhonov, and V. Arsenin, Solutions of Ill-Posed Problems, Wiley, New York, 1977.
- [9] K. Levenberg, "A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares," Quart. Appl. Math. 2, pp.164-168, 1944.
- [10] D.W. Marquardt, "An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters," SIAM J. Appl. Math. 11, pp.431-441, 1963.
- [11] M. Gu and S.C. Eisenstat, "A divide-and-conquer algorithm for the symmetric tridiagonal eigenproblem," SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol.16, pp.172-191, Jan. 1995.
- [12] L. Greengard and V. Rokhlin, "A fast algorithm for particle simulations," J. Comput. Phys., vol.73, pp.325-348, 1987.
- [13] S.L. Gay, "Dynamically regularized fast RLS with application to echo cancellation," IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1996, ICASSP-96, vol.2, pp.957-960, 1996.
- [14] L. Ljung and T. Söderström, Theory and Practice of Recursive Identification, MIT Press, Cambridge, MA, 1986.
- [15] L.R. Rabiner and R.W. Schafer (著), 鈴木久喜 (訳), 音声のデジタル信号処理 (上), コロナ社, 1983.

(平成 24 年 6 月 13 日受付, 9 月 24 日再受付)