構造工学論文集 Vol. 61A (2015 年 3 月)　　土木学会

点検結果に基づく劣化予測のための マルコフ遷移確率推定方法に関する一考察

A Consideration on calculation process of Markov transition probability for deterioration prediction based on inspection results

近田康夫 *，鈴木慎也 **，小川福嗣 ***
Yasuo Chikata, Shinya Suzuki and Fukutsugu Ogawa

*工博，金沢大学教授，理工研究域・環境デザイン学系（〒 920-1192 金沢市角間町）
chikata@t.kanazawa-u.ac.jp
**工修，エイト日本技術開発 （株）(〒 164-8601 東京都中野区本町五丁目 33-11)
***金沢大学技術職員，理工研究域（〒 920-1192 金沢市角間町）

Because of various conditional inspection data, some procedures have been reported for calculating the Markov transition probability for deterioration prediction. In this paper, it is tried to verify the property of those calculation procedures based on the given data in simple Markov process. In this paper, 3 proposed procedures are verified. Based on enough amount of data, those 3 procedures give almost equal transition probabilities. But, in the case that the numbers of data of each deterioration level have deviations, those 3 procedures give the transition probabilities which have differences not to be disregarded.

キーワード：Bridge inspection data, Markov transition probability

1. はじめに

今日，高度成長期に大量に蓄積された社会資本の高齢化に伴う維持管理は喫緊な問題として認識され，これに対する様々な取り組みがなされつつある．代表的な社会資本の一つである橋梁の長寿命化策も検討されており，定期的な目視点検結果に基づく劣化予測が行われている．点検は部位毎に，劣化程度に応じた健全度 (劣化度) として，評価が行われ，J 段階の健全度ごとに離散的な 1,2,$\cdots$,J なるカテゴリカル・データが得られる．ところで，現実には，構造物の劣化過程はいまだ確認されたとはいえず，点検データは収集したもののどのように劣化予測を行うかに迷うこととなる．現状では，この点検結果に基づいた，劣化予測には大別して 2 つの方法が採用されている．一つは，劣化過程を 2 次曲線に最小二乗法で回帰近似する方法であり，他方は，劣化が単純マルコフ過程に従うと考えて，遷移確率を推定する方法である．点検結果で得られる健全度は，比例尺度で測られたものではなく，順序尺度によるデータのラベルであり，そのラベル間の差の物理的な意味合いは定性的であるといえる．具体的には，最小二乗法によって劣化曲線を推定する際に，健全度 5 と 4 の差は，4 と 3 の差と等しいとは必ずしも言えない．それでも，時間軸に沿った変化を統計的に推測した結果が，工学的にうなづけるものである場合が多く，また，簡便でもあるので，実際の維持管理計画では多く採用されている．一方，マルコフ遷移確率を用いる方法では，ラベルで示された状態間の遷移確率を求めることから，このような問題はないといえる．いくつかの文献では，それぞれの著者らが入手した点検結果に基づいて遷移確率を推定する方法が紹介されているが，かなり異なる推定手順をとっている．そして，どのような場合にどの推定手法を用いるべきかなどの情報はほとんど与えられていない．

本研究は，維持管理業務の担当者が点検データを収集した後に，劣化予測を行う場合，劣化過程をマルコフ過程とみなして，文献で紹介されているどの方法で遷移確率を推定すべきか，あるいはどの手法を用いても同等の推定結果となるのか，という問いに答える試みである．

具体的には，構造物の劣化が単純マルコフ過程に従う場合に，十分な点検結果が与えられれば，これらのアプローチが同じ結果を与えるのかどうかを確認し，さらに，実際の点検データを想定した特徴を有する仮想点検データに対して，これらの推定手順によって得られる結果に差が生じるのか否かの検証を試みる．なお，各々の推定方法の検証作業はフリーの統計解析環境として急速に普及してきている R[1)2)3)] を利用することにより，特別なプログラムを利用することなく，また，独自のプログラムを作成することなく実施できた．

2. 点検結果に基づく劣化予測

2.1 点検データ

橋梁のアセットマネージメントなどで利用される点検データは，複数の橋梁に対する部位毎の健全度と検査年であり，架設年または直近の補修からの経過年で構成される．同一部位に関して点検が複数回 (異なる年度に) 実施されていれば，部位毎の劣化を経時的に追跡できるが，そのような蓄積は十分とは言えないのが現状である．したがって，類似の環境に置かれた経過年が異なる類似形式橋梁のデータをまとめて処理して劣化の予測に利用することになる．

遷移確率を推定する場合には，部位毎の健全度が，少なくとも点検間隔年を隔てて 2 回行われていて，各健全度レベルで健全度が遷移した例が含まれている必要があるが，劣化のモデル化により，複数の橋梁に対する 1 回の点検結果に基づいて推定する方法が提案されている．少なくとも，竣工時のすべての橋梁が健全な状態と，点検時に健全度の異なる橋梁が混在することで，遷移確率の推定が可能になるということである．

2.2 劣化曲線

健全度 (y) を縦軸に，架設からあるいは，前回の補修時からの経過年 (x) を横軸にとり，時間 0 で最大健全度 (一般的には 5) をとる放物線近似を行う．すなわち，劣化が,

$$y = 5 - ax^2 \tag{1}$$

で表現できるものと考えて，最小二乗法により回帰曲線を求める方法である．実際には，補修履歴の整備がなく，何十年も経過したのに健全度が 5 であるデータが多い場合などに，特異なデータを除外するなどの処理が必要となる場合が少なくない．今回の検証では対象外.

2.3 マルコフ連鎖モデル

マルコフ連鎖モデルとは，橋梁部材の劣化過程をマルコフ性 [8)] を持った離散時間 (本研究では年) の確率過程とみなした健全度分布の予測である．健全度 i から健全度 j に劣化する確率を遷移確率と呼び，2 度の検査から式 (2) により求められる．このとき，定常な遷移確率は式 (3) を満たす.

$$p_{i,j} = \frac{\text{一度目に } i\text{，二度目に } j \text{ と観測されたデータ数}}{\text{一度目の検査で } i \text{ と観測されたデータ数}} \tag{2}$$

$$p_{i,j} \geq 0 \qquad \sum_j p_{i,j} = 1 \tag{3}$$

遷移確率を要素とした行列 P を遷移確率行列と呼ぶ.本研究では，健全度は健全な状態から 5, 4, 3, 2, 1 で表されるとするため，遷移確率行列は次式となる．

$$P = \begin{pmatrix} p_{5,5} & p_{5,4} & p_{5,3} & p_{5,2} & p_{5,1} \\ 0 & p_{4,4} & p_{4,3} & p_{4,2} & p_{4,1} \\ 0 & 0 & p_{3,3} & p_{3,2} & p_{3,1} \\ 0 & 0 & 0 & p_{2,2} & p_{2,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

遷移確率 $p_{i,j}$ が既知の場合, マルコフ連鎖モデルによる劣化予測は式 (5) により容易にできる．時点 t_k での健全度分布行ベクトル $\boldsymbol{s}_{t_k}$ と遷移確率行列 P との行列積から 1 ステップ後の健全度分布行ベクトル $\boldsymbol{s}_{t_{k+1}}$ を得る．

$$\boldsymbol{s}_{t_{k+1}} = \boldsymbol{s}_{t_k} P \tag{5}$$

遷移確率 $p_{i,j}$ が未知の場合，データからいかにして遷移確率を推定するかが主題となる．実際のデータではそれぞれに点検間隔が異なってるため，また同じであっても一年間隔でないため，一年遷移確率を式 (2) から直接求められず，式 (2) 以外の推定手法が必要となる．

本研究では推定手法の方針として既存の文献から指数ハザードモデル，二乗誤差最小モデル，数え上げモデル 3 つを取り上げる．以下に各方針ごとに推定手法の概略を示す.

(1) 指数ハザードモデル

指数ハザードモデルとは寿命関数を用いて遷移確率を推定する手法である．ここでは指数ハザードモデルによる遷移確率推定手法として，津田ら [4)] が開発した指数劣化ハザードモデルを用いる．津田らは健全度 i ごとに指数分布の寿命関数 $f_i(\mathrm{t})$ を仮定し，点検間隔間に健全度 i から j へ劣化するという同時確率から遷移確率 $p_{i,j}$ の推定を定式化した．指数劣化ハザードモデルの概略を以下にまとめる．

健全度 1 が最も健全性が低い状態を表すときの指数劣化ハザードモデルによる遷移確率は次式で表される．

$$p_{i,j} = \sum_{k=j}^{i} \prod_{m=k+1}^{i} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} \prod_{m=j+1}^{k} \frac{\theta_m}{\theta_{m-1} - \theta_k} e^{-\theta_k Z} \tag{6}$$

$$p_{i,1} = 1 - \sum_{j=2}^{i} p_{ij} \tag{7}$$

このとき，Z : 点検間隔，θ_i : 健全度 i のハザード率とする．また表記上の規則として (8) 式が成り立つことに注意する.

$$\begin{aligned} \prod_{m=k+1}^{i} \frac{\theta_m}{\theta_m - \theta_k} &= 1 \qquad (k = i \text{ の時}) \\ \prod_{m=j+1}^{k} \frac{\theta_m}{\theta_{m-1} - \theta_k} &= 1 \qquad (k = j \text{ の時}) \end{aligned} \tag{8}$$

データ d の健全度 i におけるハザード θ_i^d のモデル化は，$\boldsymbol{x}^d$ をデータ d の共変量ベクトル，$\boldsymbol{\beta}_i$ をそのパラメータベクトルとして式 (9) で行なう．パラメータ $\boldsymbol{\beta}_i$ の推定は最尤法でおこなう．ただし式 (9) は貝戸ら [5] を参考にした．

$$\theta_i^d = \exp(\boldsymbol{\beta}_i^t \boldsymbol{x}^d) \tag{9}$$

本来は健全度ごとにハザード率の平均化操作が必要だが (津田らは θ_i^d を積分して θ_i を求めている)，ここでは式 (9) において，データ特性を表す変量 x として定数項のみを考えているため平均化操作は必要ない ($\theta_i^d = \theta_i$ となる)．指数モデルではハザード率の逆数が各健全度の平均劣化期間となる．

指数劣化ハザードモデルはそのベイズモデル [5] が開発されており，ハザードモデルそのものも指数劣化ハザードモデルから拡張され施設間の異質性を考慮した混合ハザードモデル [6] と，その階層ベイズモデル [7] が開発されている．本来，これらの手法を用いるべきであるが各手法は計算量が多いため，また，本研究では十分に単純なデータを用いるため，最も簡便な指数ハザードモデルである指数劣化ハザードモデルを今回は採用した．

(2)　二乗誤差最小化

二乗誤差最小化は，遷移確率を変数とした推定値と観測値の残差平方和を目的関数として設定し，最小化する手法である．ここでは，武山ら [9] が開発した手法を用いる．武山らは式 (10) に示す目的関数 J を最小にするアルゴリズムを構築し，異なる点検間隔からデータの平均的な遷移確率を推定した．アルゴリズムでは，初期遷移確率行列から遷移確率を微小変化させることで，逐次的に式 (10) を最小にする遷移確率行列を求めている．なお，ここでは遷移確率を微小変化させた際に遷移確率行列が式 (3) を満たすために，変化量の符号を変えたものを同じ行へ均等に割り振っている．例えば，$p_{3,3}$ を 0.01 増加させた場合，$p_{3,2}$, $p_{3,1}$ をそれぞれ 0.005 減少させる．

$$J = \sum_Z \sum_i \sum_j \left(M_{i,j}^Z - M_{i,j}^{Z\,\prime} \right)^2 \tag{10}$$

このとき，$M_{i,j}^Z$ は点検間隔 Z において健全度 i から j へ遷移した実データの観測度数である．$M_{i,j}^{Z\,\prime}$ は遷移確率行列 P に従って点検間隔 Z において健全度 i から j へ遷移したと推定される遷移度数である．

他に，二乗誤差最小化による推定方法を開発事例として内山ら [10]，佐藤ら [11] のものがある．内山らは実データの健全度分布とマルコフ連鎖モデルによる健全度分布の差の二乗和を目的関数としている．佐藤らは経過年における，補修対象となるまで観測したデータの平均健全度とマルコフ連鎖モデルによる平均健全度との差の二乗和を目的関数としている．

(3)　数え上げ・平均化操作

数え上げ・平均化操作は，同一点検間隔ごとの遷移確率を式 (2) で推定した後に，点検間隔に対して平均化操作することで単位検査結果年の遷移確率を推定する手法である．ここでは数え上げ・平均化操作による遷移確率推定手法として，竹田ら [12] が開発した手法を用いる．竹田らは点検間隔 Z のもとでの健全度 i の一年状態維持確率 $p_{i,i}^{1/Z}$ が 0.5 になる期間 $N_{i,Z}$ に変換した上で点検間隔で平均化することにより，異なる点検間隔データの平均的な遷移確率を推定した．期間 $N_{i,Z}$ は式 (11) から得られる．

$$N_{i,Z} = Z \log_{10}(0.5) / \log_{10}(p_{i,i}) \tag{11}$$

$N_{i,Z}$ を点検間隔ごとの健全度 i のデータ数で加重平均したものを $\overline{N}_i$ とすると，全データの状態維持確率 $\overline{p}_{i,i}$ は式 (12) から得られる．竹田らは遷移は隣接した健全度間しか発生しないと仮定したため，式 (13) から遷移確率 $\overline{p}_{i,i-1}$ を得る．

$$\overline{p}_{i,i} = 0.5^{1/\overline{N}_i} \tag{12}$$

$$\overline{p}_{i,i-1} = 1 - \overline{p}_{i,i} \tag{13}$$

他に，数え上げ方法による推定手法の開発例では丹後ら [13] のものがある．丹後らは，点検間隔の平均化については言及していないものの，数え上げをディリクレ多項分布モデルに拡張することで個体差の有無の検定を可能にした．さらに個体差がある場合の推定量として経験ベイズ推定量が妥当であることを示した．

3.　推定の比較

遷移確率行列が既知の仮想健全度データを用いて，異なる方針による遷移確率推定手法である，津田らの手法 [4]（以下，指数ハザードモデル），武山らの手法 [9]（以下，二乗誤差最小モデル），竹田らの手法 [12]（以下，数え上げモデル）を比較した． 3.1 節では仮想データの作成方法を示す．以下，3.2 節では量的に十分にデータ数がある場合に各手法は仮想データが従う真の遷移確率行列を再現できるかを検証する．3.3 節では量的に十分にデータ数が与えられない場合の推定について検証する．3.4 節では量的に十分でなく，また，健全度間でデータ数が異なる場合の推定について検証する．さらに，3.5 節では，劣化過程が複数の遷移確率行列で構成される場合について検証する．

3.1　検証用仮想データの作成

遷移確率推定に際し，個々のデータが所有しなければならない情報は一度目の点検における健全度 s_1，二度目の点検における健全度 s_2，点検間隔 z の 3 つである．

それに対し，一度目の点検における健全度 s_1，点検間隔 z は与える．また，データに共通な設定として，劣

化の際に従う真の一年遷移確率行列 P を与える．そして，設定した s_1, z, P を用いて実際に s_1 を遷移させることで，二度目の点検における健全度 s_2 を得る．例えば，$s_1 = 3$, $z = 1$ と設定されたデータは s_2 において健全度 3, 2, 1 のいずれかが観測される．そして，各健全度として観測される確率が P^1 における健全度 3 が従う遷移確率 $p_{3,3}, p_{3,2}, p_{3,1}$ となっている．

R 上での s_2 の取得は base パッケージの関数 sample を用いた．

3.2 十分なデータが与えられた場合

本節では，複数の点検間隔が混在しているが，同一の遷移確率行列に従って遷移したデータが量的に十分に与えられた場合に, 各推定手法はその遷移確率行列を再現するのかを検証する．

まず，検証用データとして点検間隔 5, 6, 7, 8, 9, 10 それぞれにおいて，各健全度にデータ数を 2000 ずつ与えた．与えた s_1, z 毎のデータ数を表–1 に示す．また，データが従う真の遷移確率行列 P として式 (14) を与える．与えた遷移確率行列は遷移しない確率が .90 であり，隣接した健全度へ遷移する確率が .10 である．

$$P = \begin{pmatrix} .90 & .10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .90 & .10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .90 & .10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .90 & .10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

s_2 は 3.1 節で述べた方法で作成する．そして s_1, z, s_2 を仮想健全度データとして，その遷移確率行列を指数ハザードモデル，二乗誤差最小モデル，数え上げモデルの 3 つの推定手法により推定する．推定結果を表–2〜表–4 に示す．

表–2 を見ると概ね妥当な推定結果であるものの式 (14) において 0 となっている要素で，値が出ている要素がいくつかある．しかし，それらの要素の値はどれも.01 以下であるため，指数ハザードモデルは式 (14) を再現できているといえる．

表–3 を見ると概ね妥当な推定結果となっているものの $p_{5,3} < p_{5,2}$ という不自然な結果となっている箇所がある．しかし，$p_{5,3}$ の値は 0 であり，$p_{5,2}$ の値は.0004 という小さい値であることを踏まえれば，二乗誤差最小モデルは式 (14) を再現できているといえる．

表–4 を見ると妥当な推定結果であり，数え上げモデルは式 (14) を再現できているといえる．ただし，数え上げモデルは隣接健全度間にしか遷移しないという仮定があることに留意する必要がある．

さらに，式 (14) では，$p_{5,5} = p_{4,4} = p_{3,3} = p_{2,2} = 0.9$ であるが，これを，各健全度レベルごとに変化させて，$p_{5,5} = 0.5$, $p_{4,4} = 0.6$, $p_{3,3} = 0.7$, $p_{2,2} = 0.8$ として推定を行った場合も，ほぼ同様の結果であった．

表–1 3.2 節における s_1, z 毎のデータ数

	健全度 (s_1)			
点検間隔 (z)	5	4	3	2
5	2000	2000	2000	2000
6	2000	2000	2000	2000
7	2000	2000	2000	2000
8	2000	2000	2000	2000
9	2000	2000	2000	2000
10	2000	2000	2000	2000

表–2 指数ハザードモデルにより推定した遷移確率行列

健全度	5	4	3	2	1
5	.9004	.0946	.0048	.0002	0
4	0	.9028	.0924	.0046	.0002
3	0	0	.9050	.0903	.0047
2	0	0	0	.9046	.0954
1	0	0	0	0	1

表–3 二乗誤差最小モデルにより推定した遷移確率行列

健全度	5	4	3	2	1
5	.8995	.1001	0	.0004	0
4	0	.8987	.1013	0	0
3	0	0	.9004	.0980	.0016
2	0	0	0	.9012	.0988
1	0	0	0	0	1

表–4 数え上げモデルにより推定した遷移確率行列

健全度	5	4	3	2	1
5	.9003	.0997	0	0	0
4	0	.8992	.1008	0	0
3	0	0	.9007	.0993	0
2	0	0	0	.9013	.0987
1	0	0	0	0	1

表–5 3.3 節における s_1, z 毎のデータ数

	健全度 (s_1)			
点検間隔 (z)	5	4	3	2
5	N	N	N	N
7	N	N	N	N

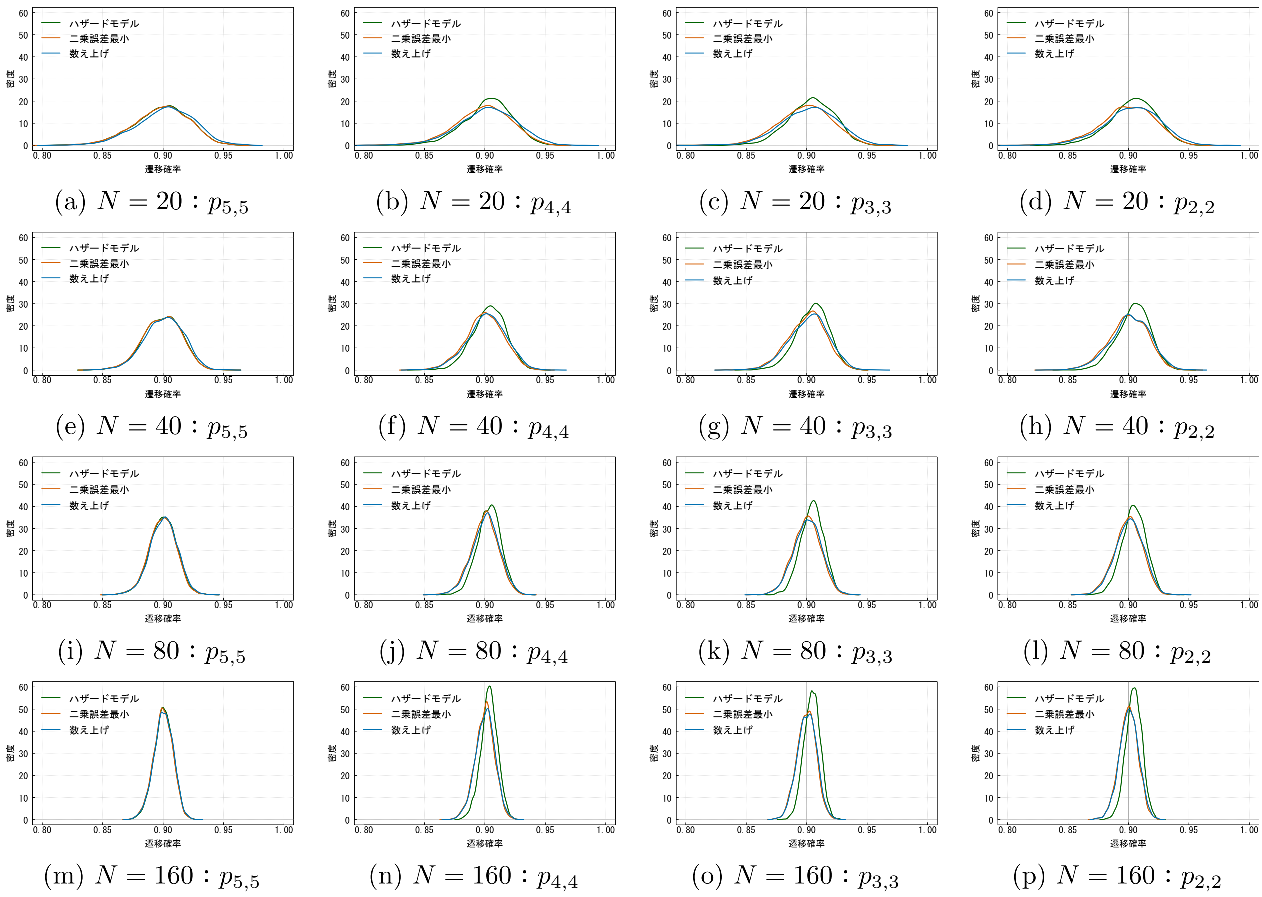
$N = 20, 40, 80, 160$

3.3 十分なデータ数が与えられない場合

3.2 節では量的に十分にデータ数が与えられた場合の推定をおこなった．しかし，現実には十分にデータ数を得られていることは稀である．よって，本節では，より少ないデータ数が与えられた場合の推定について述べる．

表–6 推定された状態維持確率の要約統計量：$N = 20, 40, 80, 160$ とした場合

					パーセンタイル値				
N	要素	推定手法	標準偏差	平均値	0%	5%	50%	95%	100%
20	$p_{5,5}$	ハザードモデル	.0227	.8986	.8124	.8584	.8991	.9316	.9628
		二乗誤差最小	.0229	.8982	.7884	.8572	.8983	.9324	.9629
		数え上げ	.0237	.9020	.8087	.8615	.9043	.9377	.9691
	$p_{4,4}$	ハザードモデル	.0200	.9023	.8155	.8673	.9039	.9324	.9602
		二乗誤差最小	.0231	.8983	.7977	.8578	.8991	.9335	.9587
		数え上げ	.0243	.9019	.7992	.8584	.9043	.9386	.9810
	$p_{3,3}$	ハザードモデル	.0190	.9037	.8017	.8716	.9046	.9323	.9649
		二乗誤差最小	.0225	.8984	.7820	.8603	.8990	.9334	.9700
		数え上げ	.0235	.9021	.7904	.8626	.9043	.9379	.9706
	$p_{2,2}$	ハザードモデル	.0190	.9038	.8292	.8703	.9048	.9330	.9630
		二乗誤差最小	.0225	.8990	.7910	.8575	.8995	.9329	.9627
		数え上げ	.0234	.9026	.7893	.8615	.9043	.9379	.9810
40	$p_{5,5}$	ハザードモデル	.0156	.8995	.8377	.8734	.9004	.9242	.9557
		二乗誤差最小	.0158	.8991	.8383	.8732	.9003	.9238	.9557
		数え上げ	.0160	.9009	.8427	.8744	.9012	.9252	.9557
	$p_{4,4}$	ハザードモデル	.0138	.9035	.8432	.8802	.9041	.9252	.9466
		二乗誤差最小	.0158	.8996	.8378	.8722	.9003	.9246	.9491
		数え上げ	.0162	.9014	.8392	.8740	.9013	.9271	.9588
	$p_{3,3}$	ハザードモデル	.0134	.9047	.8478	.8817	.9055	.9253	.9435
		二乗誤差最小	.0157	.9000	.8326	.8731	.9011	.9247	.9422
		数え上げ	.0162	.9019	.8325	.8744	.9032	.9273	.9601
	$p_{2,2}$	ハザードモデル	.0135	.9043	.8447	.8810	.9051	.9250	.9484
		二乗誤差最小	.0160	.8997	.8312	.8719	.9007	.9241	.9528
		数え上げ	.0163	.9014	.8321	.8740	.9016	.9271	.9557
80	$p_{5,5}$	ハザードモデル	.0111	.8999	.8553	.8817	.9001	.9175	.9402
		二乗誤差最小	.0112	.8995	.8543	.8809	.8997	.9171	.9403
		数え上げ	.0113	.9004	.8558	.8821	.9008	.9184	.9406
	$p_{4,4}$	ハザードモデル	.0098	.9033	.8651	.8869	.9038	.9190	.9363
		二乗誤差最小	.0112	.8996	.8550	.8807	.9002	.9173	.9365
		数え上げ	.0114	.9006	.8551	.8813	.9010	.9184	.9361
	$p_{3,3}$	ハザードモデル	.0095	.9045	.8642	.8886	.9048	.9197	.9380
		二乗誤差最小	.0112	.9000	.8564	.8813	.9003	.9178	.9368
		数え上げ	.0115	.9009	.8551	.8821	.9010	.9194	.9381
	$p_{2,2}$	ハザードモデル	.0097	.9045	.8698	.8881	.9046	.9200	.9409
		二乗誤差最小	.0113	.9000	.8587	.8805	.9003	.9178	.9366
		数え上げ	.0114	.9008	.8590	.8817	.9010	.9193	.9456
160	$p_{5,5}$	ハザードモデル	.0079	.9004	.8714	.8869	.9005	.9129	.9254
		二乗誤差最小	.0080	.8999	.8708	.8862	.9000	.9126	.9259
		数え上げ	.0080	.9004	.8713	.8867	.9007	.9130	.9283
	$p_{4,4}$	ハザードモデル	.0069	.9036	.8789	.8918	.9037	.9148	.9268
		二乗誤差最小	.0080	.8998	.8671	.8864	.9003	.9127	.9262
		数え上げ	.0081	.9003	.8689	.8865	.9008	.9130	.9276
	$p_{3,3}$	ハザードモデル	.0067	.9045	.8795	.8934	.9045	.9150	.9275
		二乗誤差最小	.0078	.8998	.8718	.8864	.9000	.9120	.9254
		数え上げ	.0080	.9002	.8723	.8867	.9004	.9127	.9276
	$p_{2,2}$	ハザードモデル	.0066	.9045	.8800	.8936	.9046	.9151	.9268
		二乗誤差最小	.0078	.9000	.8709	.8869	.9002	.9125	.9233
		数え上げ	.0079	.9004	.8725	.8870	.9007	.9131	.9256



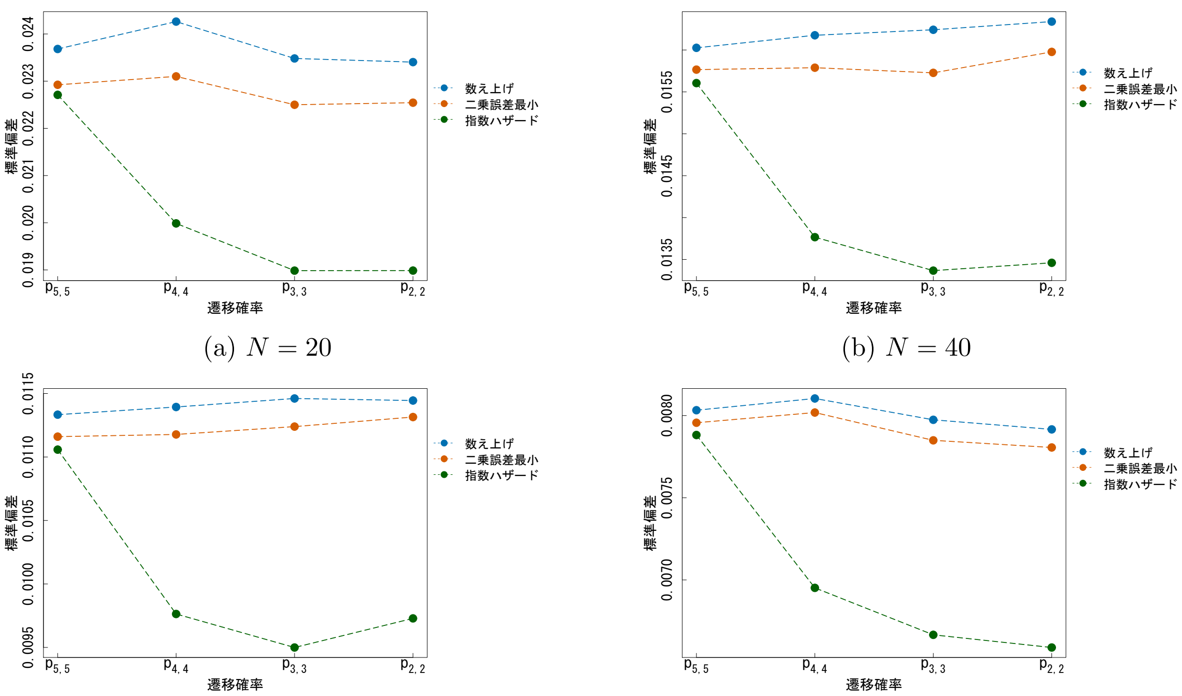
(a) $N=20$: $p_{5,5}$ (b) $N=20$: $p_{4,4}$ (c) $N=20$: $p_{3,3}$ (d) $N=20$: $p_{2,2}$

(e) $N=40$: $p_{5,5}$ (f) $N=40$: $p_{4,4}$ (g) $N=40$: $p_{3,3}$ (h) $N=40$: $p_{2,2}$

(i) $N=80$: $p_{5,5}$ (j) $N=80$: $p_{4,4}$ (k) $N=80$: $p_{3,3}$ (l) $N=80$: $p_{2,2}$

(m) $N=160$: $p_{5,5}$ (n) $N=160$: $p_{4,4}$ (o) $N=160$: $p_{3,3}$ (p) $N=160$: $p_{2,2}$

図–1 推定された状態維持確率の分布：$N=20,40,80,160$ とした場合



(a) $N=20$ (b) $N=40$

(c) $N=80$ (d) $N=160$

図–2 遷移確率ごとの標準偏差の改善

検証用データとして表–5 に示すように点検間隔 5, 7 それぞれにおいて，各健全度に同じデータ数 N を与えた．また，データが従う真の遷移確率行列 P として式 (14) を与える．ここでは，N を 20, 40, 80, 160 の 4 種類

とし，それぞれの N において s_1, z から s_2 を得て遷移確率行列を推定する作業をそれぞれ 3000 回繰り返し，推定値の分布を求めた．結果として得られた状態維持確率 $(p_{i,i})$ の分布を図–1 に示し，その要約統計量を表–6 に示す．図–1 では縦方向に N を，横方向に遷移確率を展開している．

図–1 を見ると $p_{5,5}$ はどのデータ数でも各手法で類似の形状をしてる．表–6 を見ると平均値と標準偏差がほぼ等しくなっていることが確認できる．これは，健全度 5 における状態維持の遷移の解釈が $5 \to 5$ だけであるためだと考える．例えば，$5 \to 3$ という遷移の場合には，二乗誤差最小モデルの場合，健全度 5 のものが健全度 4 を経由せず健全度 3 へ遷移したと解釈する．一方，指数ハザードモデルの場合，$5 \to 4 \to 3$ と健全度 4 を経て健全度 3 へ遷移したと解釈する．各々の手法において，$5 \to 5$ ではそのような遷移の解釈に差はないためほぼ等しい推定値となったと考えられる．

表–6 を見ると各データ数ごとの $p_{4,4} \sim p_{2,2}$ の標準偏差が二乗誤差最小モデルと数え上げモデルでは近い値であるのに対して，指数ハザードモデルではそれらよりも小さい．このことを，図–2 で遷移確率ごとの標準偏差を N 毎に示して視覚化した．この標準偏差の傾向も，上述した遷移の解釈により説明できる．例えば，$p_{4,4}$ の推定に，数え上げモデルを用いた場合 $s_1 = 4$ のデータが影響する．二乗誤差最小モデルも数え上げモデルとほぼ等しい標準偏差であるので $p_{4,4}$ の推定に際し影響するデータは数え上げと同様であると考えられる．それに対して指数ハザードモデルでは $p_{4,4}$ の推定値は健全度 4 のハザード率 θ_4 で決まるが，θ_4 の推定には，$s_1 = 4$ のデータのみに限らず，$i \to j$ の遷移において $i \sim j$ に健全度 4 が含まれているデータが影響を及ぼす．このことは，式 (6) より $p_{i,j}$ は $\theta_i \sim \theta_j$ 全てを用いていることからもわかる．つまり，指数ハザードモデルは他の手法よりデータを有効に使えているため，標準偏差が小さいと考えられる．

二乗誤差最小モデル，数え上げモデルでは遷移確率間で遷移確率の推定精度の改善はみられない．これは度数を用いているためであると考えられる．つまり，劣化 $i \to j$ でなく，事前健全度に遷移確率の精度が依存している．

また，図–1 の $p_{4,4} \sim p_{2,2}$ において，指数ハザードモデルと二乗誤差最小モデルでは真値よりも大きな遷移確率でピークを示していることがみてとれ，指数ハザードモデルでこの傾向が顕著である．表–6 を見ると指数ハザードモデルは平均値，中央値ともに真値よりも.003∼.005 程度大きいことが確認できる．これは，指数ハザードモデルと二乗誤差最小モデルは式 (4) の要素を全てを用いて推定しているためだと考えられる．特に指数ハザードモデルは表–2 より $p_{5,3}$ など隣接健全度よりも下位の要素が算出されるため，状態維持確率が大きく推定される傾向にあるといえる．

以上より，このような逆推定においては，指数ハザードモデルでは，式 (14) を点検間隔回乗じたことで生じる見かけ上の隣接健全度以外への跳躍的な健全度遷移を処理しきれない可能性が明らかとなった．しかし，若干のバイアス (ピーク値のずれ) は生じるものの，ばらつきが少なく，安定して遷移確率を推定できると言うこともできる．表–2 と合わせて考えると，バイアス除去のためには特に低健全度のデータ蓄積が多い必要がある．

3.4 健全度レベルごとのデータ数の偏りがある場合

3.2 節，3.3 節では健全度ごとのデータ数は同じであった．しかし，現実には，健全度が低下すれば補修が施されるため，健全度が低いほどデータの蓄積は少なくなると考えられる．よって，本節では，健全度ごとにデータ数の偏りがある場合の推定について検証する．

検証用データとして点検間隔 5, 7 それぞれにおいて，健全度 5 に 160, 健全度 4 に 80，健全度 3 に 40，健全度 2 に 20 のデータ数を与えた．与えた s_1, z 毎のデータ数を表–7 に示す．また，データが従う真の遷移確率行列 P として式 (14) を与える．

検証は，表–7 に示した s_1, z から s_2 を得て遷移確率行列を推定する，という作業を 3000 回繰り返し，推定値の分布を求めた．結果として得られた状態維持維持確率 $(p_{i,i})$ の分布を図–3 に示した．

図–3 を見ると $p_{5,5}$ においては，3.3 節と同様に各手法で顕著な差は見られない．この結果と 3.3 節の $p_{5,5}$ に関する考察を踏まえれば，各手法とも $p_{5,5}$ の推定には $s_1 = 5$ のデータのみが影響することがわかる．

$p_{4,4} \sim p_{2,2}$ においては，指数ハザードモデルでは真値よりも大きな遷移確率でピークを示していることがわかる．このことは，3.3 節における考察と同様の理由であると考える．一方，数え上げモデルと二乗誤差最小モデルに関してはデータ数 N に依然せずに平均値，標準偏差がほぼ等しい値となっていることがわかる．このことは， 3.3 節における二乗誤差最小モデルでは，$p_{i,i}$ の推定には $s_1 = i$ のデータのみが影響するという考察を裏付けていると言える．ただし，データ量が少ないために，図–1 と比較すると，低健全度の状態維持確率のばらつきは大きくなっている．

現実に最もありそうな傾向の健全度毎のデータ量の設定で，すでに指摘した逆推定における指数ハザードモデルの，式 (14) を点検間隔回乗じたことで生じる見かけ上の隣接健全度以外への跳躍的な健全度遷移を処理しきれない可能性がより明らかとなった．また，低健全度の状態維持確率の推定精度も低くなることが確認できた．

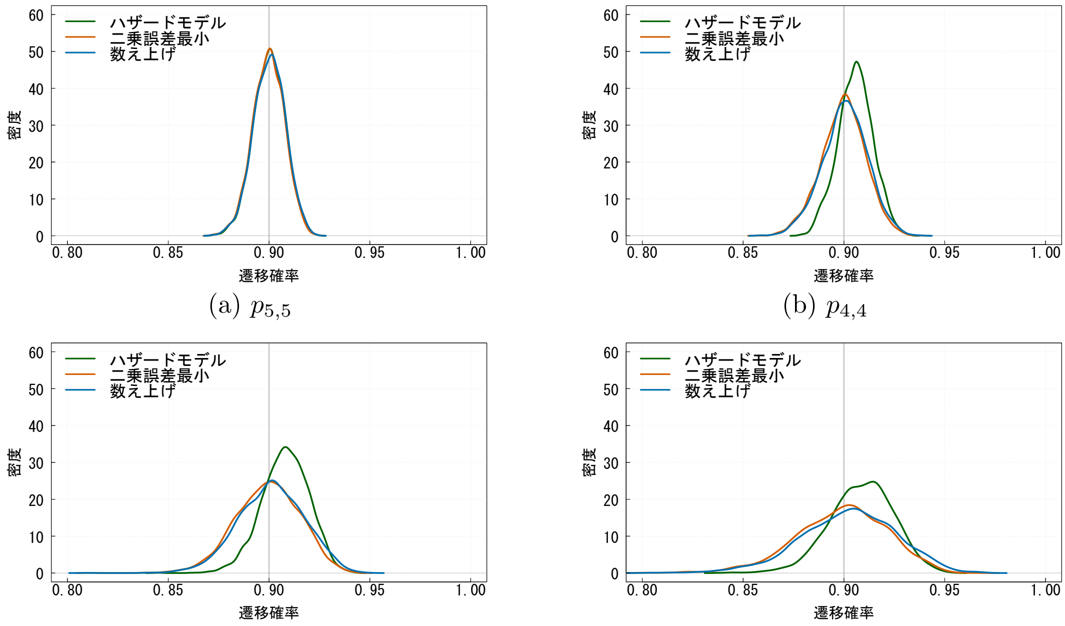
現実的ではないが，逆に，健全性の高いデータが少なく，健全性の低いデータが多く蓄積されている場合を

表–7　高健全度のデータが多い場合の s_1, z 毎のデータ数

点検間隔 (z)	健全度 (s_1)			
	5	4	3	2
5	160	80	40	20
7	160	80	40	20

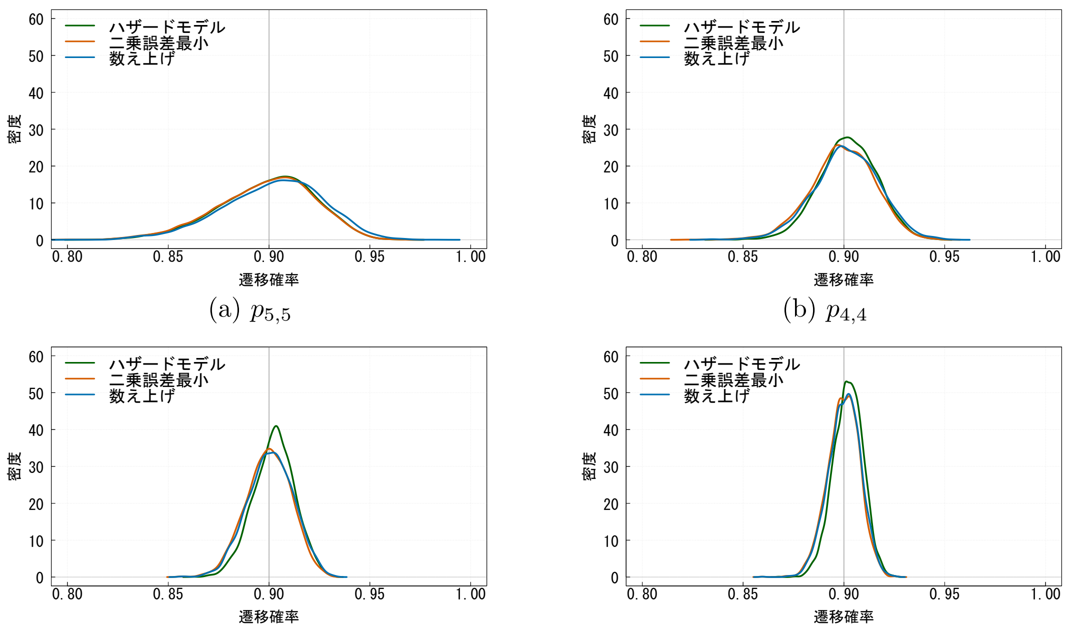
表–8　低健全度のデータが多い場合の s_1, z 毎の度数分布表

点検間隔 (z)	健全度 (s_1)			
	5	4	3	2
5	20	40	80	160
7	20	40	80	160



(a) $p_{5,5}$　(b) $p_{4,4}$　(c) $p_{3,3}$　(d) $p_{2,2}$

図–3　健全度ごとにデータ数が異なる場合に推定された状態維持確率の分布 (表-7 に対応)



(a) $p_{5,5}$　(b) $p_{4,4}$　(c) $p_{3,3}$　(d) $p_{2,2}$

図–4　健全度ごとにデータ数が異なる場合に推定された状態維持確率の分布 (表-8 に対応)

考えてみる．表–8 に示すデータが与えられた場合の遷移確率の推定例を図–4 に示す．低健全度のデータが多い場合は，図–3 において指数ハザード・モデルで $p_{4,4}$，$p_{3,3}$，$p_{2,2}$ に発生していたバイアスはほとんど認められない．また，データ量の増加に伴って，推定値のばらつきも減少していくことが確認できる．

なお，式 (14) では，マルコフ性を満足するように数値を設定したが，それだけは指数ハザードモデルでの想定事象に一致しない．試しに，$p_{i,i}$ のみを与えて，指数ハザードモデルの想定事象に合うように $p_{i,j}\ \ (i \neq j)$ を求めて遷移確率行列を作成して 3.3 節の逆推定を行うと，指数ハザードモデルでもバイアスは発生しない．つまり，実事象が，指数ハザードモデルの想定事象に一致していれば，その観測データによる逆推定は指数ハザードモデルが最も優れていることが確認できている．

3.5 やや複雑な遷移確率行列

前節まで，指数ハザードモデル，二乗誤差最小モデル，数え上げモデルはほぼ同じ遷移確率を推定している．本節では，データが従う遷移確率行列をやや複雑にした場合を検討する．現実には，十分にありそうな設定であると考えられるが，ここで用いている 3 つの推定方法では一つの遷移確率行列として推定することになる．

データが従う遷移確率行列として

$$\Pi^z = \begin{cases} \Pi_A^z & (z \leq 7) \\ \Pi_A^7 \Pi_B^{z-7} & (z > 7) \end{cases} \tag{15}$$

を設定する．ただし，

$$\Pi_A = \begin{pmatrix} 0.98 & 0.02 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.98 & 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$\Pi_B = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0.15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.85 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

である．推定の繰り返し回数 M は 3000 とする．データの度数分布表を表–9 に示す．総データ数 H は 1280 である．

上記の問題設定のもと，指数ハザードモデル，二乗誤差最小モデル，数え上げモデルの 3 つを用いて遷移確率行列を推定した．結果のうち遷移確率行列の対角成分に着目し，図–5 にまとめた．

図–5 を見ると，指数ハザードモデルと二乗誤差最小モデルはほぼ同様の推定をし，数え上げモデルは他のモデルと異なった推定をしていることがわかる．設定した遷移確率行列を踏まえると状態状態確率は .85 ～ .98 の間の値となることが推測されるが，数え上げモデルが推定する最大値を見ると，どの遷移確率の要素においても .98 を超えている．このことから，指数ハザードモデルと二乗誤差最小モデルの方が複雑な劣化現象対応できていると考えられる．

表–9 3.5 節における度数分布表

点検間隔 (ξ)	事前健全度 (ϕ_1) 5	4	3	2
7	160	160	160	160
13	160	160	160	160

指数ハザードモデルの結果にバイアスが少ないのは，式 (16) における対角成分が .98 と大きいため劣化し難く，見かけ上の劣化である $5 \rightarrow 2$ や $5 \rightarrow 1$ のデータの観測が少なかったためだと考える．

4. まとめ

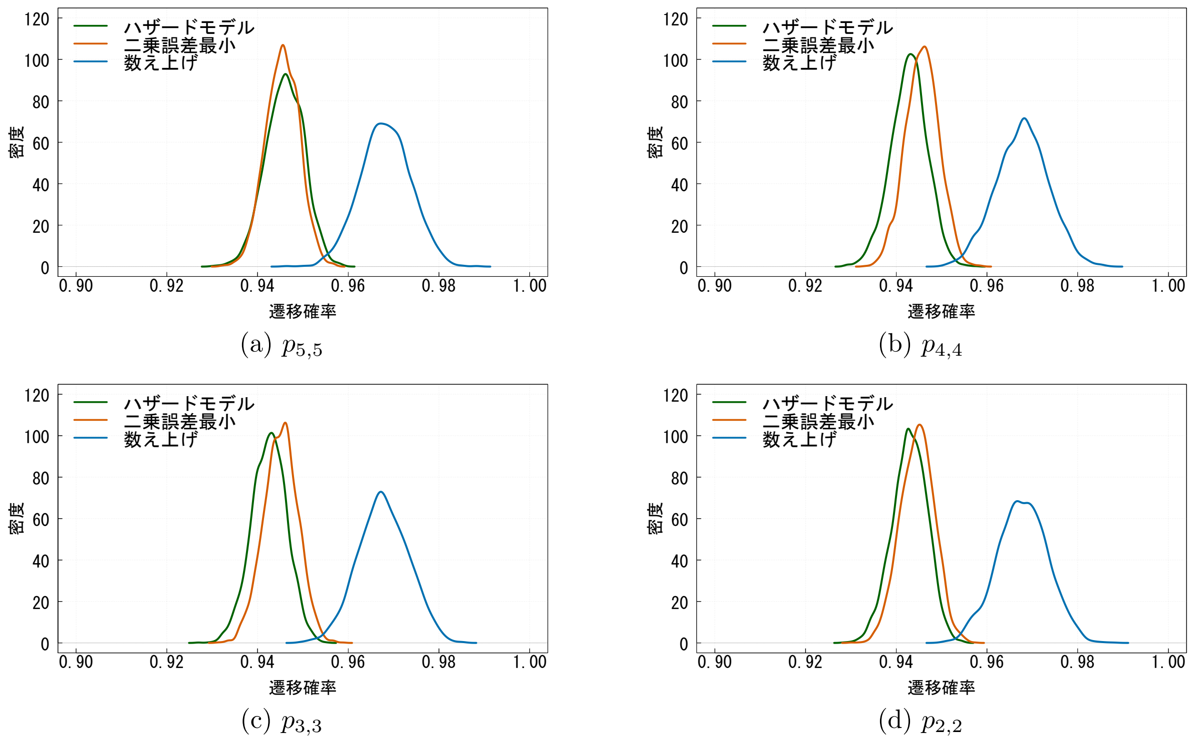
本研究では，文献で紹介されている構造物の劣化予測のためのマルコフ遷移確率の複数の推定手法について，仮想健全度データを用いて，推定結果が異なるのか否かの検証を試みた．

すなわち，指数ハザードモデル，二乗誤差最小モデル，数え上げモデルの基本的性質を明らかにするために，仮想データを用いた推定シミュレーションを行った．同一の遷移確率行列に従ったデータが，事前健全度ごとに量的に十分蓄積されている場合には，いずれのモデルも正しく遷移確率を推定できることが確認できた．

同一の遷移確率行列に従ったデータが事前健全度ごとに量的に十分蓄積されていない場合には，度数分布表の値を全て同じにした場合の推定シミュレーションから以下のことを示した．

推定値の平均値は二乗誤差最小モデル，数え上げモデルが正しく推定しているが，指数ハザードモデルでは若干のずれ (バイアス) が生じた．これは，指数ハザード関数の同時確率で記述できない遷移確率行列に従って遷移したデータに対して，推定にバイアス (ずれ) が発生したと考えられる．つまり，指数ハザードモデルが連続的劣化のみを想定し導出されており，遷移確率行列を健全度ごとの指数ハザード関数の同時確率で記述しているからであると考えられる．しかし，逆にこのことが，低健全性の遷移推定精度の改善 (分散が減少) につながることも確認できた．

同一の遷移確率行列に従ったデータの度数分布に偏り，つまり事前健全度が高いデータが多く蓄積し事前健全度が低いデータが少ない場合のシミュレーションから，指数ハザードモデルにおいて，事前健全度の高いデータの蓄積は低い健全度の遷移確率推定に影響し，低い健全度の遷移確率にバイアスが生じる可能性を確認できた．また，二乗誤差最小モデル・数え上げモデルはデータの事前健全度ごとの蓄積が推定精度に影響することが確認できた．ただし，この指数ハザードモデルで生じる推定値のバイアスは，劣化事象がマルコ



図–5　3.5 節における状態維持確率の分布

フ性は有していても指数ハザードモデルの想定する事象と異なる場合に生じていることが推測される．

逆に，現実的ではないが，高い健全度のデータ蓄積が少なく，低い健全度のデータ蓄積が多い場合のシミュレーション結果では，指数ハザードモデルでのバイアスの発生はごくわずかであり，低健全度での遷移確率の推定精度も向上した．

やや複雑な遷移確率行列を設定した場合，すなわち，ある程度時間ステップが進行した時点で遷移確率行列が変化する場合，指数ハザードモデルと二乗誤差最小モデルではほぼ同様の推定を行ったが，数え上モデルでは過大な推定をする可能性があることが示せた．

以上の結果と，現状では劣化プロセスが明確ではなく，データの蓄積も十分ではないことを考え合わせると，今回の条件設定の範囲内ではあるが，二乗誤差最小モデルが無難な推定方法と言えよう．指数ハザードモデルではバイアスが生じる可能性を除去できないが，低健全度の遷移確率推定の分散が小さいことから，推定の安定性を重視すれば選択肢となる．数え上げモデルでは複雑な劣化過程には対応できない可能性を除去できない．

最後に，本研究では比較・検討しかなった，ミクロな推定に拡張された指数ハザードモデル [6] や，非定常なマルコフ連鎖モデル [14][15] を含めた検証が必要である．それらの比較・検証から，データの特徴に応じてより簡便な推定方法を選択できる可能性がある．

ただし，現状では，劣化プロセスが明確にはなっていないことから，精緻なモデルの構築と並行して，データの蓄積と劣化プロセス分析の進展が望まれる．今後，例えば 1 つの橋梁やその部位ごとに定期的な点検結果が蓄積されれば個別に劣化予測を行うことが可能であろうが，現状は橋梁長寿命化計画のための一斉点検に続く 2 回目の点検が進行中の管理団体が多く，本研究の成果が役立つ場面があると考える．

参考文献

1) R Core Team：*R A Language and Environment for Statistical*, R Foundation for Statistical Computing, 2013, `http://www.R-project.org/`
2) Joseph Alder：*R in a Nutshell, Second Edition*, O'Reilly Media, 2012
3) 間瀬茂：R プログラミングマニュアル, 数理工学社, 2007
4) 津田尚胤, 貝戸清之, 青木一也, 小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ連鎖確率の推定, 土木学会論文集 No.801/I-73, pp.69-82, 2005.10
5) 貝戸清之, 小林潔司：マルコフ劣化ハザードモデルのベイズ推計, 土木学会論文集 A, Vo.63, No.2, pp.336-355, 2007.6
6) 小濱健吾, 岡田貢一, 貝戸清之, 小林潔司：劣化ハザード率評価とベンチマーキング, 土木学会論文集 A，Vol.64, No.4, pp.857-874, 2008.11
7) 貝戸清之, 小林潔司, 青木一也, 松岡弘大：混合マルコフ劣化ハザードモデルの階層ベイズ推計, 土木学

会論文集 D3, Vol.68, No.4, pp.255-271, 2012
8) Rinaldo B. Schinazi: *Classical and Spatial Stochastic Processes*, Birkhuser Boston, 1999, 今野紀雄他訳：マルコフ連鎖から格子確率モデルへ 現代確率論の基礎と応用, pp.1-105, シュプリンガージャパン, 2001.1
9) 武山泰, 嶋田洋一, 福田正：マルコフ連鎖モデルによるアスファルト舗装の破損評価システム, 土木学会論文集, 第 420 号/V-13, pp.135-141, 1990.8
10) 内山典之, 西山真, 平野廣和, 佐藤尚次：RC 床版の劣化予測を考慮した橋梁維持管理システムの構築, 応用力学論文集, Vol.7, pp.1141-1148, 2004.8
11) 佐藤忠信, 吉田郁政, 増本みどり, 金治英貞：ライフサイクルコスト考慮した道路橋の補強戦略, 土木学会論文集, No.784, VI-66, pp.125-138, 2005
12) 竹田利明, 大島俊之, 佐藤誠, 三上修一： 橋梁点検実測データに基づく橋梁資産劣化予測評価の検討, 構造工学論文集, Vol.51A, pp.1157-1167, 2005.3,
13) 丹後俊郎, 阿部一洋, 狩野紀昭：個人差を導入したマルコフモデル, 応用統計学, Vol.19, No.1, pp.1-18, 1990
14) 藤本由紀夫, 出口章生, 岩田光正：マルコフ連鎖モデルによる劣化型損傷部材の信頼性評価, 日本造船学会論文集, 第 166 号, pp.303-314, 1989.11
15) 青木一也, 山本浩司, 津田尚胤, 小林潔司：多段階ワイブル劣化ハザードモデル, 土木学会論文集, No.798, VI-68, pp.125-136, 2005.9

(2014 年 9 月 24 日 受付)
(2015 年 1 月 23 日 受理)