

Curve Drawn by Yarn Traveling on a Cylindrical Surface

KINARI Toshiyasu, SHINTAKU Sukenori and SHIMOKAWA Tomotsugu

Faculty of Engineering, Kanazawa University, 2-40-20 Kodatsuno, Kanazawa, Ishikawa, 920-8667 Japan

Received 25 December 2003; accepted for publication 3 March 2005

Abstract

When tension acts on a yarn running on a cylindrical bobbin, the yarn leaves for a new equilibrium position and draws a curve on its surface. In this paper, we assumed that the yarn was free to bend, but did not stretch and that its inertial force was negligible compared to the external forces such as reaction force and friction force. The force balance equations, which determined a yarn path contacting with a curved surface, were developed in vector form on the basis of differential geometry. We derived a set of differential equations describing the space curve drawn by the yarn traveling on the cylindrical surface. Two experiments were compared with the simulations. The measured yarn path and tension for two actual examples turned out that the parabola obtained by our simulation was a fairly good approximation for the yarn path sliding on a cylindrical surface.

Key Words: Yarn path; Cylindrical surface; Vector analysis; Differential geometry

円柱面上を移動する糸が描く曲線

喜成 年泰, 新宅 救徳, 下川 智嗣

1. はじめに

繊維加工の工程において糸が曲面上を移動する現象が多く見られる。パッケージへの糸の巻取り工程においては、最近のワインダではトラバース機構は電動機を用い、その反転等を含む制御をコンピュータで行うようになっているが、巻糸体の耳高現象やあや崩れ現象を解決する明確な理論は得られておらず、メカトロ技術を用いた試行錯誤により、巻糸体形状を保っている。パッケージからの解じょ工程においては、ボビンを離脱してからの糸が描くパルーン曲線に関しては著者らが多く発表してきた[1,2]が、規則正しく巻かれていた糸がボビン上を滑りながら移動していき、ボビンを離脱するまでの経路についてはまだ確実になっていない。

円柱面上を移動するときに描く曲線については簡単そうに見えるが、報告は昭和28年に中島の報告[3,4]が見られるのみで少なく、それも煩雑である。そこで本研究ではベクトル解析[5,6]を用いて糸経路を考察[8,9]し、実際の工程で見られる曲線に応用した結果を報告する。

2. 曲線の解析

本報告では円柱面の上を滑りながら移動する糸の形状

を考える。このため、糸は完全にたわむことができ、伸び縮みしない、糸の運動速度は慣性力が張力や摩擦力に比べて無視できるくらい小さいと仮定する。円柱の半径を r とし、円柱表面上の点 P の座標 $P(x, y, z)$ を図1に示すように r, u, v を用いてあらわすと次式を得る。

$$P(x, y, z) = (r \cos u, r \sin u, rv) \quad (1)$$

本報告では r 一定の円柱面を考えているので、ベクトル P は2変数関数 $P(u, v)$ としてもあらわせる。曲面の単位法線ベクトルを e, v を定数として u を変化させてできる点 P の軌跡（以後 u 曲線）の単位接線ベクトルを e_u 、同様

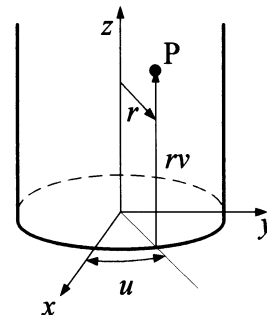


Fig.1 Geometry of a cylindrical surface

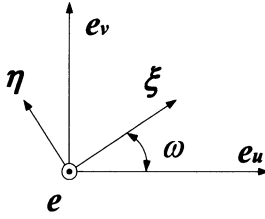


Fig.2 Vectors of the yarn put on cylindrical surface

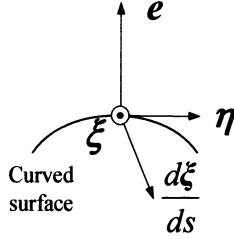


Fig.3 Vectors on the curved surface

に v 曲線の単位接線ベクトルを e_v とすると、それぞれの単位ベクトルは以下のように表される。

$$\begin{aligned} e &= (\cos u, \sin u, 0) \\ e_u &= (-\sin u, \cos u, 0) \\ e_v &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、添字 u と v はそれぞれによる偏微分を表し、 P_u 、 P_v は以下の通りである。

$$\begin{aligned} P_u \cdot P_u &= r^2 \\ P_v \cdot P_v &= r^2 \end{aligned} \quad (3)$$

$P(u, v)$ の接平面上に各単位ベクトルを示すと図 2 のとおりである。 $\xi (=dP/ds)$ (s は糸の長さ、以後 P') は曲線 P の接線方向単位ベクトル、 η は $\eta = e \times \xi$ である。 $d\xi/ds (=P'')$ は曲線 P の曲率ベクトルであり、法曲率ベクトル k_n および測地的曲率ベクトル k_g は各々以下のように定義される。

$$\begin{aligned} k_n &= (P'' \cdot e) \cdot e \\ k_g &= (P'' \cdot \eta) \cdot \eta \end{aligned} \quad (4)$$

e と η を含む面で接平面を切って ξ の先端からみた各ベクトルの関係を図 3 に示す。 e_s は接平面上を糸の上の着目点 P が移動する方向 (以下、糸の移動方向) と反対方向の単位ベクトルである。糸は曲面上にあるので次式で表せる。

$$\xi = \frac{dP}{ds} = \frac{\partial P}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial P}{\partial v} \frac{dv}{ds} = P_u \frac{du}{ds} + P_v \frac{dv}{ds} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= P_u \cdot P_u (du)^2 + 2P_u \cdot P_v du dv + P_v \cdot P_v (dv)^2 \\ &= r^2 \{(du)^2 + (dv)^2\} \end{aligned} \quad (6)$$

糸の接線が u 曲線に対し ω 傾いているとすると、 u 曲線と v 曲線は直交しているの以下のようにおける、

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{\cos \omega}{r} \\ \frac{dv}{ds} &= \frac{\sin \omega}{r} \end{aligned} \quad (7)$$

また $e_u \cdot \xi = \cos \omega$ 、および $e_v \cdot \xi = \sin \omega$ とおける。以上より ξ と η は次式で表され、

$$\begin{aligned} \xi &= e_u \cos \omega + e_v \sin \omega \\ \eta &= e \times \xi = -e_u \sin \omega + e_v \cos \omega \end{aligned} \quad (8)$$

法曲率 k_n および測地的曲率 k_g は以下のように表される。

$$\begin{aligned} k_n &= e \cdot \frac{d\xi}{ds} = -\frac{\cos^2 \omega}{r} \\ k_g &= \eta \cdot \frac{d\xi}{ds} = \frac{d\omega}{ds} \end{aligned} \quad (9)$$

一方、糸に関する力のつり合い式は以下ようになる。

$$\frac{dT}{ds} \xi + T \frac{d\xi}{ds} + F = 0 \quad (10)$$

ただし、 T は糸の接線方向に沿った張力の大きさ、 F は糸の単位長さあたりに作用する外力ベクトルで、本研究で想定される外力としては曲面からの抗力 $R e$ とそれともなう摩擦力 $\mu R e_s$ (μ は糸と曲面の間の摩擦係数) が挙げられる。なお、厳密には糸の長さ方向の滑り抵抗と垂直方向の滑り抵抗は異なると考えられるが、本報では簡単のため、方向依存性を無視する。式(10)の第 1 項は接線方向で張力の増加分、第 2 項の $d\xi/ds$ は曲面の法線方向と接平面方向に分かれる。これらのことから式(10)は次式となる。

$$\frac{dT}{ds} \xi + T(k_n e + k_g \eta) + R e + \mu R e_s = 0 \quad (11)$$

F を実例にあわせて定めれば糸が描く曲線が求められるので、以下に具体例を示す。

2.1 糸が円柱上を軸方向に移動する場合

糸が円柱上を軸方向に移動する場合、図 1 の z 軸方向と糸の運動方向が一致するので、

$$e_s = e_v \quad (12)$$

e 方向の力の釣合いは $T k_n + R = 0$ より次式となる。

$$R = T \frac{\cos^2 \omega}{r} \quad (13)$$

式(11)における e_s を ξ 方向と η 方向に分けると

$$e_s = \xi \sin \omega + \eta \cos \omega \tag{14}$$

と表され、おのおのの方向の釣合いより

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} &= \mu T \frac{\cos^2 \omega \sin \omega}{r} \\ \frac{d\omega}{ds} &= \frac{\mu \cos^3 \omega}{r} \end{aligned} \tag{15}$$

となる。曲線 P の u 曲線への射影長を x , v 曲線への射影長を y とすると以下の微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} dx &= \frac{rdu}{d\omega} \cdot d\omega = \frac{rd\omega}{\mu \cos^2 \omega} \\ dy &= \frac{r \sin \omega d\omega}{\mu \cos^3 \omega} \end{aligned} \tag{16}$$

x, y 方向を r で除して無次元化した長さを X, Y とすると、

$$X = \frac{x}{r}, \quad Y = \frac{y}{r} \tag{17}$$

$$X = \frac{1}{\mu} \tan \omega + C_1, \quad Y = \frac{1}{2\mu} \tan^2 \omega + C_2 \tag{18}$$

を得るので、

$$Y = \frac{\mu}{2} X^2 + bX + c \tag{19}$$

となる。ここで、 C_1, C_2, b, c は積分定数で、式(19)は円柱の半径方向からみた軸方向の糸経路が、2次の項の係数が摩擦係数の 1/2 となる放物線を描くことを示している。

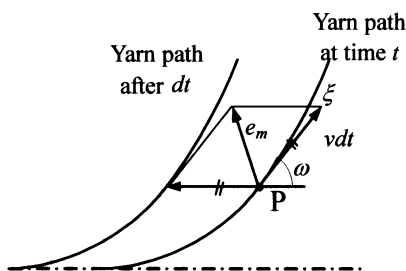


Fig.4 Yarn travel direction

2. 2 軸に直角に巻かれた糸が移動する場合

巻糸体を回転させずに、巻かれている糸を巻糸体の軸方向に解じよしていくと、糸は糸層の表面を滑りながら移動した後糸層を離脱する。糸の解じよ速度が大きい場合には糸層離脱後の糸は遠心力と空気抗力の影響により、バルーンと呼ばれる独特の経路を描く [1, 2]。糸がボビン上を移動するときの曲線は Padfield[7]によって解析され

ているが、ここでは式(11)の応用例として解析を進める。円柱の軸に対して直角方向に巻かれている糸が軸方向に引っ張られたとき、糸が移動する方向 e_m (式(11)の e_s とは向きが反対) を求める。図 4 に示すように糸の長さが保存されつつ、着目点 P が時間 dt 間に接線 (ξ) 方向に $ds (=vdt)$ 移動すると同時に e_u 方向に ds 移動する。このとき、

$$\xi - e_u = (\cos \omega - 1)e_u + e_v \sin \omega \tag{20}$$

となるから e_m は次式となる。

$$e_m = -e_s = \frac{(\cos \omega - 1)e_u + e_v \sin \omega}{2 \sin(\omega/2)} \tag{21}$$

式(17)と同様に無次元化をすると、曲線の微分形は次式となる。

$$\begin{aligned} \mu dX &= \frac{\cos \omega}{\cos^2 \omega \cos \frac{\omega - \alpha}{2}} d\omega \\ \mu dY &= \frac{\sin \omega}{\cos^2 \omega \cos \frac{\omega - \alpha}{2}} d\omega \end{aligned} \tag{22}$$

ここで、 α は ω の初期値 (糸が運動を始める以前の糸の接線と u 曲線のなす角) であり、巻糸体ではあや角と呼ばれる。この関係の 2 次微分を調べると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{dX^2} &= \mu \frac{d(\tan \omega)}{dX} \\ &= \mu \frac{\cos^2 \omega \cos \frac{\omega - \alpha}{2}}{\cos \omega} \cdot \frac{d(\tan \omega)}{d\omega} = \mu \frac{\cos \frac{\omega - \alpha}{2}}{\cos \omega} \end{aligned} \tag{23}$$

を得る。糸が軸方向に直角に巻かれている場合は $\alpha = 0^\circ$ なので、この場合に $[\cos\{(\omega - \alpha)/2\} / \cos \omega]$ の値を評価する。 $\omega = 0^\circ$ のとき 1.000, $\omega = 10^\circ$ のとき 1.012, $\omega = 20^\circ$ のとき 1.048, $\omega = 25^\circ$ のとき 1.077, $\omega = 30^\circ$ のとき 1.115, $\omega = 40^\circ$ のとき 1.227, ... を得るので、 ω が比較的小さい場合には

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = \mu \tag{24}$$

と近似できる。すなわち式(19)と同様、

$$Y = \frac{\mu}{2} X^2 + bX + c \tag{25}$$

となり、 ω が比較的小さい場合には、糸が描く曲線を放物線で近似可能であることが示された。

3. 実験

3.1 糸が円柱軸方向に移動する場合

糸の運動方向がほとんど v 方向である運動の例として、

図5に示すように、直径100mm、高さ280mmのアルミ製円柱をインストロンタイプの万能試験機の下降クロスヘッドに取り付け、200mm/minで上昇または下降させた。

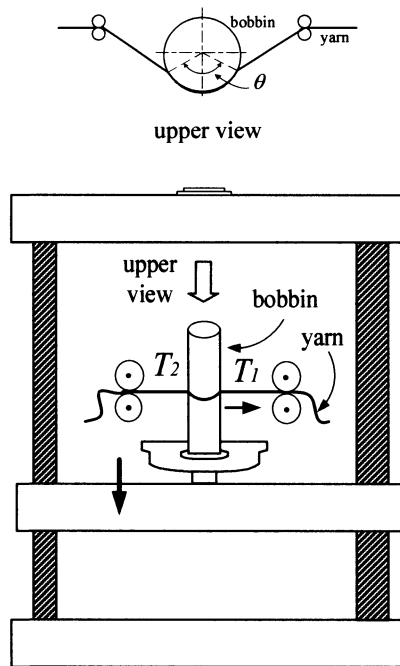


Fig.5 Experimental apparatus

糸は別枠にガイドと共に設置し、アルミ円柱表面に u 方向に 2.5rad 程度接触させながら 10mm/min 以下の低速で巻取った。糸はポリエステルフィラメント糸 16.7tex (150 D) / 48 F である。糸の撚り方向の影響を見るため 1900T/m の S 撚りおよび Z 撚りの撚糸も用いた。糸の位置を正面から写真撮影し、同時に座標線を入れた紙を円柱に貼り付け撮影する。同条件で何度も実験を行い、その中で平均的なものと見られる曲線を選んだ結果の一例を図6に示す。

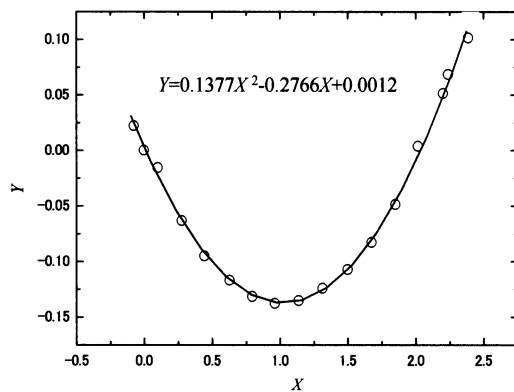


Fig.6 Yarn path on bobbin moving downwards perpendicular to yarn feeding direction

撮影画像から読みとった糸の位置を○でプロットし、その測定点を2次式で近似して

$$Y = aX^2 + bX + c \tag{26}$$

を得た。これを見ると実験値は放物線でよく近似できており、理論式(式(19))どおり放物線で表してもよいことが分かる。撚りや円筒の移動方向の条件を変えた場合の結果を表1に示した。表1においてクロスヘッド下降のとき測定したものは2次項の係数の符号は正、上昇のときは負で表わされる。 a をみると、撚り方向と円柱の移動方向の差は顕著に現れていない。式(19)、(26)によれば、アルミ製円柱と糸との摩擦係数 μ と a の間には $a = (1/2)\mu$ の関係がある。

Table 1 Coefficient of each term in eq.(26)

Yarn	Cylinder	a	b	c
without twist	Down	0.154	-0.321	-3.32×10^{-3}
	Up	-0.146	0.333	2.14×10^{-3}
S-twist	Down	0.138	-0.277	1.16×10^{-3}
	Up	-0.144	0.333	2.16×10^{-3}
Z-twist	Down	0.142	-0.295	1.38×10^{-3}
	Up	-0.115	0.276	1.49×10^{-3}

以上の実験から得られた摩擦係数を一般的な摩擦係数の測定方法で得た結果と比較する。すなわち図5の装置においてアルミ製ボビンを運動させずに糸を水平方向に運動させ、入り口張力 T_2 と出口張力 T_1 および接触角 θ を測定し、摩擦係数 μ を

$$T_1 = T_2 \cdot \exp[\mu \theta] \tag{27}$$

により求めた。その結果、最大0.41、最小0.29で平均0.349を得たので、アルミ円柱と糸の摩擦係数はほぼ0.35と見積もられる。表1のほとんどの a は0.35の1/2よりやや小さな値であるが、アルミボビンの表面状態が不均一なことや糸の抵抗の方向依存性を無視していることを考慮すれば妥当な値と考えられる。ちなみに糸を u 方向のみに運動させる現象では式(10)の左辺最終項が $e_s = -\xi$ となるので、

$$\frac{dT}{ds} - \mu F = 0, \quad \frac{d\omega}{ds} = 0 \tag{28}$$

の関係をj得る。 ω が一定となるので $u=0$ で $s=0$ の境界条件を与えると、 $ru = s \cos \omega$ となるから、

$$T_1 = T_2 \cdot [\exp \mu \cos \omega \cdot u]_0^\theta \tag{29}$$

となる。一般的な摩擦係数の測定方法では $\omega = 0$ なので、式(27)も式(11)の具体的な応用例であることがわかる。

3. 2 系の運動方向に u, v 両成分を含む場合

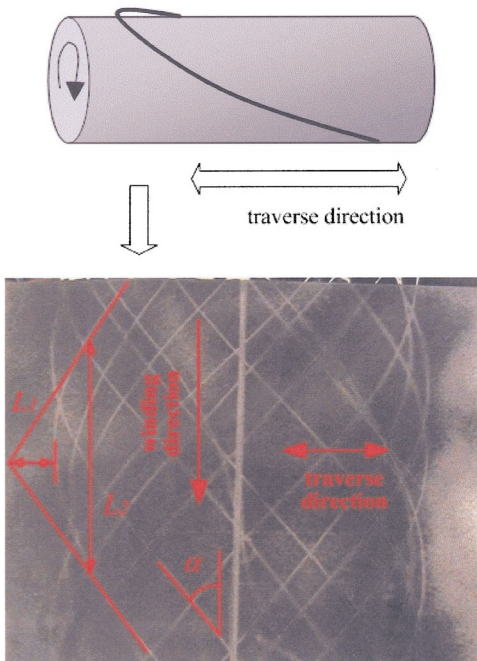


Fig.7 Photograph of yarn path developed on a plane

巻返し工程において、糸ガイドをトラバース運動させ、ポビンに糸を巻き取る場合、ガイドとポビンの間にすき間があるため、ポビン上に巻かれた糸の折返し点は鋭角に折れ曲がった点とはならない。従って実際、巻かれるパッケージの幅はトラバース幅より狭くなると説明されている。しかしペン先でポビン上に線を描くようにきっちり円柱面上に糸を置いたとしても、折返した糸は既に巻かれた糸を引張り、所定位置よりずらしてしまうことは明らかで、すき間と糸の引張りの両方が原因なる。ここでは糸の引張りによる移動現象を説明するために前述の解析を適用する。実験に使用したワインダは中越機械製 MT-SMW 形で、標準ポビンの直径は 75.5mm、長さ 290mm である。糸の巻き取り速度は 300m/min とした。トラバースは電動式で折返し点の停留を極力抑えてある。糸を積層すると他の問題が入り複雑になるので、ポビンに紙を巻き付け、その上に糸を数回だけ巻き、その糸経路を観測した。ワインダによって糸を巻き付けた後、黒色のスプレー式塗料を吹き付け、乾燥後ポビンから紙を取り外して展開し、糸を除去し、紙上の残像を糸の曲線とした。ここで使用した糸はポリエステルマルチフィラメント糸 16.7tex (150D) / 48F で、トラバース速度 200m/min のときの糸経路の一例を図 7 に示す。図からポビン曲面を展開した平面の上で糸が描く経路は放物線と近似できる。ここであや角を α として糸経路を直線とそれに接する放物線と考え、図 8 に示す。図において直線部分から放物線に移る点を考える。

図 8 において x 軸と y 軸との交点を原点として、図 7 のような経路を展開すると、次式の関係を得る。

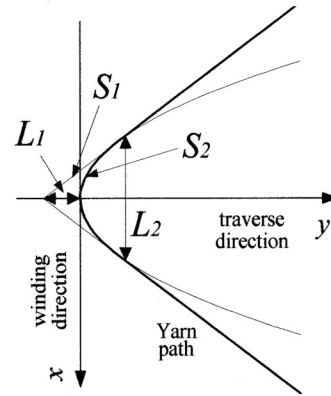


Fig.8 Yarn path on a plane

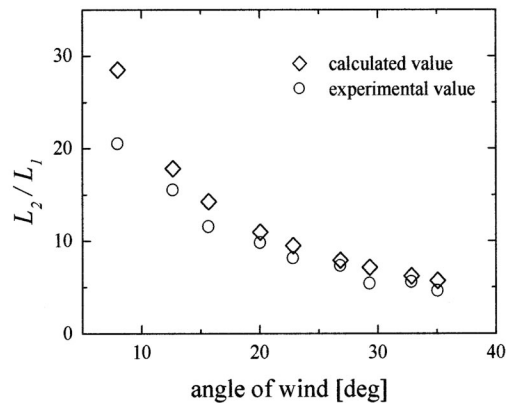


Fig.9 Relation between L_2/L_1 and α

$$dy/dx = \mu x = \tan \alpha \tag{30}$$

直線からはずれた x 方向の長さを L_2 、放物線の頂点から両直線部分を延長して交わる点までの長さを L_1 とすると $L_2/L_1 = 4/\tan \alpha$ となる。トラバース速度を 25m/min ~ 200m/min まで変化させることによって種々の α に対して図 7 のような経路を求め、 L_2/L_1 との関係求めた結果を図 9 に示す。 α の小さい部分で実験値と計算値がややはずれているのは、 L_2 が大きく、直線部分と放物線部分の判別が付きにくいことが原因と考えられる。以上のことからワインダによる糸経路の折返し部分は放物線としてもよいことがわかる。

放物線で近似できることがわかったので、トラバース折返し点で糸が引張られることによってどの程度曲線が短くなるかを求めることができる。すなわち、図 8 において細い直線経路 S_1 を描いた糸が、太い放物線経路 S_2 に移るとすると、幾何学的関係から次式を得る。

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{\tan \alpha}^{\tan \alpha} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dx = 2 \int_0^{\tan \alpha} \sqrt{1 + x^2} dx \\ &= \left[x \sqrt{1 + x^2} + \log \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right) \right]_0^{\tan \alpha} \end{aligned}$$

$$= \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha} + \log \left| \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right| \quad (31)$$

各 α に対する S_2 および S_2/S_1 の計算例を表2に示す。ワインダにおいてトラバース折返し点では糸道が長くなるため張力が高くなる傾向にある。これらの現象も考慮して耳高解消のための検討が必要である。

Table 2 S_2 and S_2/S_1 for several α

α [deg]	5	15	25	35	45
S_2	0.0876	0.2711	0.4827	0.7538	1.1478
S_2/S_1	0.997	0.977	0.938	0.881	0.812

4. まとめ

円柱状の曲面上にある糸に力が作用した場合、糸は新たなつり合い位置まで、ある経路を描きながら移動する。本報告では、ベクトル解析と微分幾何学を用いて糸が移動する経路を解析した。糸の移動する方向をベクトルで表し、つり合い式に代入し、法曲率ベクトルを用いて曲面からの抗力を求めた。抗力によって摩擦力の方向と大きさが決まるので、摩擦力と糸張力の接平面上での法曲率ベクトル方向と測地的曲率ベクトル方向のつり合いより、糸が描く曲線が求められることを示した。このようにして求められる曲線の理論式を2つの実例によって検証した結果、円柱曲面上を移動する糸が描く曲線（糸経路）は放物線であらわすことができることを明らかにした。

Appendix:本解析と Padfield[7]による解析との関係

式(22)より

$$x = \int_{\alpha}^{\omega} \frac{r \cos \omega d\omega}{\mu \cos^2 \omega \cos \frac{\omega - \alpha}{2}} \quad (A1)$$

$$y = \int_{\alpha}^{\omega} \frac{r \sin \omega d\omega}{\mu \cos^2 \omega \cos \frac{\omega - \alpha}{2}}$$

ここで $\alpha = 0$, $p = \sin(\omega/2)$ とすると

$$dx = \frac{d\omega}{\cos \omega \cdot \cos \frac{\omega}{2}} = \frac{2d\omega}{(2 \cos^2 \frac{\omega}{2} - 1) \cos \frac{\omega}{2}} \quad (A2)$$

$$dp = \cos \frac{\omega}{2} \cdot \frac{d\omega}{2} \quad (A3)$$

$$\frac{\mu}{r} \int dx = \int \frac{dp}{\cos \frac{\omega}{2}} = \int \frac{2dp}{(1 - \sqrt{2}p)(1 + \sqrt{2}p)(1 - p^2)}$$

$$= \sqrt{2} \log \frac{\sqrt{2}p+1}{\sqrt{2}p-1} + \log \frac{1-p}{1+p} + C \quad (A4)$$

を得る。Cは積分定数である。同様に式(A1)において $\alpha = 0$, $q = \cos(\omega/2)$ とすると以下ようになる。

$$dy = \frac{\sin \omega \cdot d\omega}{\cos^2 \omega \cdot \cos \frac{\omega}{2}} = \frac{4 \sin \frac{\omega}{2} \cdot \frac{d\omega}{2}}{(2 \cos^2 \frac{\omega}{2} - 1)^2} \quad (A5)$$

$$dq = \sin \frac{\omega}{2} \cdot \frac{d\omega}{2} \quad (A6)$$

$$\frac{\mu}{r} \int dy = \int \frac{4dq}{(2q^2 - 1)^2}$$

$$= \int \frac{dq}{(\sqrt{2}q-1)^2} - \int \frac{dq}{\sqrt{2}q-1} + \int \frac{dq}{(\sqrt{2}q+1)^2} + \int \frac{dq}{\sqrt{2}q+1}$$

$$= \frac{2q}{2q^2-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2}q+1}{\sqrt{2}q-1} + C \quad (A7)$$

式(17)とは別の方法で、

$$X_M = \frac{\mu x}{r}, \quad Y_M = \frac{\mu y}{r} \quad (A8)$$

によって無次元化すると、式(A4), (A7)より

$$X_M - X_0 = \sqrt{2} \log \frac{\sqrt{2}p+1}{|\sqrt{2}p-1|} + \log \frac{1-p}{1+p} \quad (A9)$$

$$Y_M - Y_0 = \frac{2q}{2q^2-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2}q+1}{\sqrt{2}q-1} \quad (A10)$$

を得る。式(A10)は Padfield [7]が $\alpha = 0$ のとき、糸パッケージからの解じの軌跡として求めたものと同一である。

References

- [1] Shintaku, S., Yamamoto, T., Kinari, T.; Sen-i gakkaiishi, **44**, 511(1988)
- [2] Shintaku, S., Kinari, T., Hatta, K.; J. Text. Mach. Soc. Japan, **48**, T145(1995)
- [3] Nakajima, K., Matsuoka, K., Inoue, S.; J. Text. Mach. Soc. Japan, **6**, 794(1953)
- [4] Nakajima, K., Matsuoka, K., Inoue, S.; J. Text. Mach. Soc. Japan, **7**, 48(1954)
- [5] Ohtsuki, T.; "Differential geometry", p.63, Asakura-shoten (1961)
- [6] Terada, F., Sakata, H., Saitoh, H.; "Vector analysis", p.46, Saiensu-sha(1980)
- [7] Padfield; J. Text. Inst, **54** T71-77(1954)
- [8] Shintaku, S., Endo, T., Kinari, T., Tamamura, R.; J. Text. Mach. Soc. Japan, **52**, T217(1999)
- [9] Endo, T., Shintaku, S., Kinari, T.; Text. Res. J., **73**, 139 (2003)