

## 二進展開量子化状態フィードバック制御系の ラグランジュ安定性\*

西垣内秀紀<sup>†</sup>・山本 茂<sup>‡</sup>

### Lagrange Stability of Quantized State Feedback Control Systems via Binary-expansion\*

Hideki NISHIGAITO<sup>†</sup> and Shigeru YAMAMOTO<sup>‡</sup>

In this paper, we consider the problem of stabilizing the state feedback control systems that have quantizers in feedback loop. We study “the binary expansion quantization” where by using the finite bits measurement signals are endorded. Since there is no assumption on the infinite fineness of the quantizer, asymptotic stability cannot be ensured. However we derive a sufficient condition, in terms of the matrix norm and the matrix inequality form, on a quantization bit rate and gains for the ultimate boundedness of the state of the closed loop.

#### 1. はじめに

本論文では、離散時間線形時不変システムの状態観測値が量子化され、フィードバックされる閉ループ系の終局有界性について考察する。計算機の使用を前提とした制御では制御対象の状態や出力が連続信号の場合、信号をAD変換し有限ビット数の浮動小数点数として扱う必要がある。計算機内の浮動小数点の仮数部は単精度でも23ビットある(IEEE規格。参考文献[11]参照)のに対し、AD変換器のビット数はレイテンシーを犠牲にする $\Delta$ - $\Sigma$ 変換や低速な二重積分型がかるうじて20ビットを超える程度である。このことからAD変換の有効ビット数がボトルネックになりやすい。したがって本論文では量子化器がセンサ-制御器間にあり、量子化された状態値をフィードバックする制御系を考察する。

AD変換や浮動小数点数への丸めの量子化と制御に関する研究は過去に多い[1,2,4-8,10]。参考文献[5]は、対数量子化器を含む制御系を解析しており、量子化レベルが可

算無限個の場合と可算有限個の場合の両方を考察している。また参考文献[1,4]は量子化器の設計問題を、参考文献[2]は観測値の量子化と制御および量子化誤差補償の同時設計を考えている。参考文献[7]は、AD変換のスケールリングに相当するzooming変数を導入し、zooming変数によって量子化の範囲と量子化誤差が変化する量子化器を考え、システムがISS(Input-to-State Stability)となるようなzooming変数の更新則を導出している。参考文献[6]は量子化器を用いたFBM(FeedBack Modulator)の設計問題を考察している。

本論文では、AD変換の量子化を表すために二進展開した信号を有限ビットだけ取得する「二進展開量子化」を考える。二進展開の形での考察は計算機内部処理に近い形の解析として有意義である。これまでに有限ビット長での量子化を二進展開として扱った研究があるが[8]、量子化信号の仮数部は有限ビットに制約しながらも指数部は無限に小さい値が取れるとしている。これに対し本論文では、量子化信号の指数部に下限を仮定する。そのため漸近安定性を保証することは不可能であるので、ラグランジュ安定性として終局有界性[3]を保証する条件を導出する。終局有界性に関連して、参考文献[10]では量子化状態フィードバック制御系についての不変集合の存在条件が考察されている。

本論文の構成は以下の通りである。2.で制御系の各構成を説明する。3.では量子化器の誤差特性の上界と閉ループ系が終局有界となる十分条件を導出する。最後に4.で数値例を示す。

\* 原稿受付 2008年2月4日

<sup>†</sup> 大阪大学 大学院 基礎工学研究科 Graduate School of Engineering Science, Osaka University; 1-3, Machikaneyama-cho, Toyonaka city, Osaka 560-8531, JAPAN

<sup>‡</sup> 金沢大学 大学院 自然科学研究科 Graduate School of Natural Science & Technology, Kanazawa University; Kakuma-machi, Kanazawa city, Ishikawa 920-1192, JAPAN

**Key Words:** quantized control, binary expansion, state feedback, Lagrange stability.

### 1.1 表記

本論文では  $\mathbf{Z}$  は整数全体の集合,  $\mathbf{Z}_+$  は正の整数全体の集合,  $\mathbf{R}$  は実数全体の集合とし,  $\mathbf{C}$  は複素数全体の集合とする. また, 集合  $X$  の補集合を  $X^c$  と表すことにする.

二進数で表示する場合は数字末尾に  $\mathbf{b}$  を付けて表す (たとえば  $10.1101\mathbf{b}$ ).

行列  $X = \{x_{ij}\} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  に対し 1 ノルム, 2 ノルム,  $\infty$  ノルムをそれぞれ次のように定義して用いる.

$$\|X\|_1 \triangleq \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |x_{ij}| \quad (1)$$

$$\|X\|_2 \triangleq \sqrt{\lambda_{\max}(X^T X)} \quad (2)$$

$$\|X\|_\infty \triangleq \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |x_{ij}| \quad (3)$$

ただし  $\lambda_{\max}$  は対称行列の最大固有値を表す.

さらに,  $\eta \in \mathbf{R}$  に対し  $\lceil \eta \rceil \triangleq \min\{\xi \in \mathbf{Z} : \xi \geq \eta\}$ ,  $\lfloor \eta \rfloor \triangleq \max\{\xi \in \mathbf{Z} : \xi \leq \eta\}$  と定義する.

本論文では,  $\log$  と表記した場合はすべて底が 2 の対数を示すものとする.

行列  $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$  が正定対称行列 (準正定対称行列) であることを  $X > 0$  ( $\geq 0$ ) によって表記する. なお, ベクトル  $x \in \mathbf{R}^n$  に対して  $x > 0$  と表記するときは, すべての要素  $x_i$  が  $x_i > 0$  を満たすものとする.

## 2. 量子化状態フィードバック制御系

### 2.1 制御対象と制御器

制御対象は状態  $x \in \mathbf{R}^n$  が観測できる線形時不変な離散時間系で,  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$  によって,

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4)$$

と記述できるものとする. また  $(A, B)$  は可安定で

$$A_F \triangleq A + BF \quad (5)$$

を安定とするゲイン  $F \in \mathbf{R}^{m \times n}$  が存在すると仮定する. 制御入力  $u \in \mathbf{R}^m$  は, 次の 2.2 で与えられる量子化器  $Q$  によって量子化された状態のフィードバック

$$u(k) = FQ(x(k)) \quad (6)$$

で生成されるとする. これにより閉ループ系は

$$x(k+1) = Ax(k) + BFQ(x(k)) \quad (7)$$

となる (Fig. 1).

### 2.2 量子化器

本論文では量子化器は理想的な AD 変換器を想定した, 各チャンネルが独立の  $n$  チャンネルの量子化器

$$Q(x) = [q_1(x_1) \cdots q_n(x_n)]^T \quad (8)$$

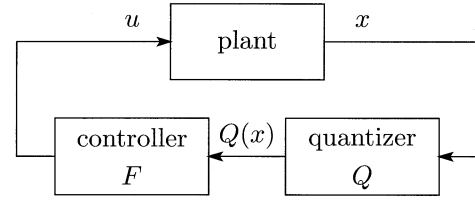


Fig. 1 The quantized feedback system

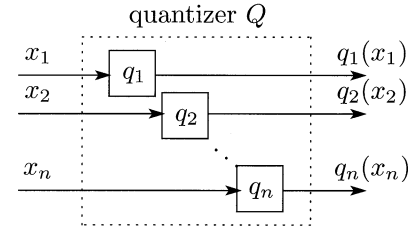


Fig. 2 The quantizer considered in 2.2

を考える (Fig. 2). 各チャンネルは次のような実数値から離散値 (浮動小数点表現) への写像とする.

$$q: \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{Q} = \mathcal{S} \times \mathcal{M} \times \mathcal{E} \quad (9)$$

ただし  $\mathcal{S} \triangleq \{+1, -1\}$  は符号部集合,

$$\mathcal{M} \triangleq \{ \underbrace{0.0 \cdots 00\mathbf{b}}_{M \text{ ビット}}, \underbrace{1.0 \cdots 00\mathbf{b}}_{M \text{ ビット}}, \underbrace{1.0 \cdots 01\mathbf{b}}_{M \text{ ビット}}, \dots, \underbrace{1.1 \cdots 11\mathbf{b}}_{M \text{ ビット}} \} \quad (10)$$

は要素数  $2^M + 1$  ( $M \in \mathbf{Z}_+$ ) の仮数部集合,

$$\mathcal{E} \triangleq \{e \in \mathbf{Z} \mid e \geq \underline{e}\} \quad (11)$$

は指数部の下限を  $\underline{e}$  とする指数部集合である. 入力  $x_i \in \mathbf{R}$  に対する出力  $q_i(x_i)$  の浮動小数点表現は

$$q_i(x_i) = s_i(x_i) m_i(x_i) \times 2^{e_i(x_i)} \quad (12)$$

である. 符号部  $s_i(x_i) \in \mathcal{S}$  は次のように  $x_i$  の符号を表す.

$$s_i(x_i) = \begin{cases} +1 & (x_i \geq 0) \\ -1 & (x_i < 0) \end{cases} \quad (13)$$

非零の  $x_i$  に対する仮数部  $m_i(x_i) \in \mathcal{M}$  は  $|x_i|\mathbf{b}$  の上位ビットから  $M+1$  ビット分までの二進数とする. ただし最上位ビット (MSB) を 1 に固定するため, 有効ビット数は  $M$  である. このことから指数部  $e_i(x_i) \in \mathcal{E}$  は,  $x_i$  と量子化器の性能限界を表す  $\underline{e}$  によって

$$e_i(x_i) \triangleq \max\{\lfloor \log|x_i| \rfloor, \underline{e}\} \quad (14)$$

に従って決定される. これは  $|x_i|$  の大きさに応じて変化する AD 変換のスケーリングに対応する. 指数部のスケーリングに基づいて,  $q_i(x_i)$  が表現できる最小の非零の絶対値は  $1.0 \cdots 0\mathbf{b} \times 2^{\underline{e}}$  である.  $x_i$  が零の場合は,  $q_i(0) = +1 \times 0.0 \cdots 0\mathbf{b} \times 2^{\underline{e}}$  とする.

以下では(12)式の代わりに、二進展開を用いて解析する。二進展開で

$$x_i = s_i \sum_{j=-\infty}^{e_i} \alpha_{ij} 2^j \quad (\alpha_{ij} \in \{0,1\}, \alpha_{i,e_i} = 1) \quad (15)$$

と表されるとき、(12)式は

$$q_i(x_i) = \begin{cases} s_i \sum_{j=\max\{e_i(x_i)-M, \underline{e}\}}^{e_i} \alpha_{ij} 2^j & (e_i(x_i) \geq \underline{e}) \\ 0 & (e_i(x_i) < \underline{e}) \end{cases} \quad (16)$$

と表現できる。以下では次のベクトルを定義し用いる。

$$e(x) \triangleq [e_1(x_1) \cdots e_n(x_n)]^T \quad (17)$$

$$e_{\max}(x) \triangleq \max_i e_i(x_i) \quad (18)$$

Fig. 3 に  $\underline{e} = -1, M = 1$  の場合の  $Q(x), e(x)$  を示す。

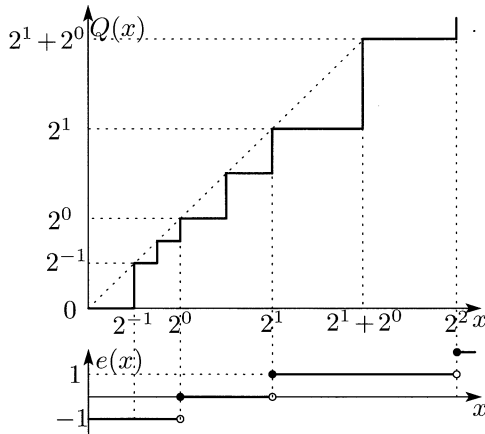


Fig. 3 The quantized signal  $Q(x)$  and the exponent  $e(x)$  when  $\underline{e} = -1, M = 1$

### 3. 終局有界性のための十分条件

終局有界性 [3] を次のように定義する<sup>1</sup>。

**【定義 1】** システム (7) 式は次の条件を満たすとき、 $\mathcal{X}$  内で終局有界であるという。ある有界閉集合  $\mathcal{X}$  が存在して任意の初期状態  $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^n$  に対し、

$$\exists T(x_0) > 0 \quad \text{s.t.} \quad x(k) \in \mathcal{X} \quad \forall k \geq T(x_0) \quad (19)$$

である。

ここではノルムにより表される終局有界条件との行列不等式により表される終局有界条件の 2 通りの安定条件を導出する。本節では  $(k)$  を基本的に省略し、 $x(k)$  と  $x(k+1)$  を単にそれぞれ  $x$  と  $x_+$  と表記する。

#### 3.1 ノルムによる終局有界条件

量子化誤差を

$$\epsilon(x) \triangleq x - Q(x) \quad (20)$$

<sup>1</sup>このような有界性はある種の安定性にとらえることができ、ラグランジュ安定性とよばれている。

と定義すると閉ループ系 (7) 式は

$$x(k+1) = A_F Q(x) + A \epsilon(k) \quad (21)$$

となる。(21)式に対し

$$\|x_+\|_\infty \leq \|A_F\|_\infty \|Q(x)\|_\infty + \|A\|_\infty \|\epsilon(x)\|_\infty \quad (22)$$

が一般に成り立つ。

**【補題 1】** 有効ビット数  $M$  の二進展開量子化器  $Q$  の量子化信号  $Q(x)$  と量子化誤差  $\epsilon(x)$  について、

$$\Sigma \triangleq \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\|_\infty < 2^{\underline{e}+M}\} \quad (23)$$

と定義すると次が成り立つ。

$$x \in \Sigma^c \Rightarrow \begin{cases} \|Q(x)\|_\infty \geq 2^{e_{\max}(x)} \\ \|\epsilon(x)\|_\infty < 2^{e_{\max}(x)-M} \end{cases} \quad (24)$$

$$x \in \Sigma \Rightarrow \begin{cases} \|Q(x)\|_\infty < 2^{\underline{e}+M} \\ \|\epsilon(x)\|_\infty < 2^{\underline{e}} \end{cases} \quad (25)$$

(証明) まず

$$\ell \triangleq \arg \max_i |x_i| \quad (26)$$

とする。すなわち  $\|x\|_\infty = |x_\ell|$ 。すると (14), (18) 式と  $\log(\cdot)$ ,  $[\cdot]$  の単調性より

$$e_\ell(x_\ell) = \lfloor \log |x_\ell| \rfloor = \max_i \lfloor \log |x_i| \rfloor = e_{\max}(x) \quad (27)$$

が成り立つ。

$x \in \Sigma^c$  のとき、(23)式から

$$\|x\|_\infty = |x_\ell| \geq 2^{\underline{e}+M} \quad (28)$$

であり、(14), (28)式と  $M \geq 1$  より

$$e_\ell(x_\ell) = \lfloor \log |x_\ell| \rfloor \geq \underline{e} + M \quad (29)$$

なので、

$$\begin{aligned} \|Q(x)\|_\infty &= \max_i |q_i(x_i)| = \max_i \sum_{j=\max\{e_i(x_i)-M, \underline{e}\}}^{e_i(x_i)} \alpha_{ij} 2^j \\ &= \sum_{\max\{e_\ell(x_\ell)-M, \underline{e}\}}^{e_\ell(x_\ell)} \alpha_{\ell j} 2^j \geq 2^{e_\ell(x_\ell)} = 2^{e_{\max}(x)} \end{aligned} \quad (30)$$

である。また次が成り立つ。

$$\begin{aligned} \|\epsilon(k)\|_\infty &= \max_i |x_i - q_i(x_i)| \\ &= \max_i \left| s_i \sum_{j=-\infty}^{e_i-M-1} \alpha_{ij} 2^j \right| = \max_i \sum_{j=-\infty}^{e_i-M-1} \alpha_{ij} 2^j \\ &\leq \max_i \sum_{j=-\infty}^{e_i-M-1} 2^j = \sum_{j=-\infty}^{e_\ell-M-1} 2^j \\ &< 2^{e_\ell(x_\ell)-M} = 2^{e_{\max}(x)-M} \end{aligned} \quad (31)$$

$x \in \Sigma$  のとき、(23)式より次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\|Q(x)\|_\infty &= \max_i |q_i(x_i)| \leq \max_i |x_i(x_i)| \\ &= \|x\|_\infty < 2^{\underline{e}+M}\end{aligned}\quad (32)$$

また,  $\max_i e_i = \lfloor \log(\max_i |x_i|) \rfloor < \underline{e} + M$  より

$$\begin{aligned}\|\epsilon(x)\|_\infty &= \max_i \left| \sum_{j=-\infty}^{\max\{e_i-M, \underline{e}\}-1} \alpha_{ij} 2^j \right| = \max_i \left| \sum_{j=-\infty}^{\underline{e}-1} \alpha_{ij} 2^j \right| \\ &\leq \sum_{j=-\infty}^{\underline{e}-1} 2^j < 2^{\underline{e}}\end{aligned}\quad (33)$$

が成り立つ。□

**補題 1** に注意すると, 閉ループ系の終局有界性について次の定理が導ける。

**【定理 1】** 有効ビット数  $M$  の二進展開量子化器  $Q$  を有する閉ループ系 (7) 式は,

$$2^{-M} \|A\|_\infty \leq \alpha - \|A_F\|_\infty \quad (34)$$

を満たすスカラ  $\alpha \in [0, 1)$  が存在するとき,

$$\mathcal{X} \triangleq \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|_\infty \leq \alpha 2^{\underline{e}+M}\} \quad (35)$$

内で終局有界である。

(証明) (i)  $x \in \Sigma^c$  のときを考える。(34) 式より

$$\|A\|_\infty 2^{-M+e_{\max}(x)} \leq (\alpha - \|A_F\|_\infty) 2^{e_{\max}(x)} \quad (36)$$

であるから, (24) 式より

$$\begin{aligned}\|A\|_\infty \|\epsilon(x)\|_\infty &< (\alpha - \|A_F\|_\infty) \|Q(x)\|_\infty \\ \Leftrightarrow \|A_F\|_\infty \|Q(x)\|_\infty + \|A\|_\infty \|\epsilon(x)\|_\infty &< \alpha \|Q(x)\|_\infty\end{aligned}$$

が成り立つ。これと (22) 式より  $\|x_+\|_\infty < \alpha \|Q(x)\|_\infty$  が成り立つ。ところが  $\|Q(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$  なので,  $\|x_+\|_\infty < \alpha \|x\|_\infty$  となる。したがって, 初期状態  $x(0) = x_0 \in \Sigma^c$  から始まる状態は

$$T(x_0) \triangleq \lceil \log_\alpha (2^{\underline{e}+M} / \|x_0\|_\infty) \rceil \quad (37)$$

とすると,  $x(T(x_0)) \in \Sigma$  となる。

(ii) つぎに  $x \in \Sigma$  のときは, (22), (25) 式より

$$\begin{aligned}\|x_+\|_\infty &< \|A_F\|_\infty 2^{\underline{e}+M} + \|A\|_\infty 2^{\underline{e}} \\ &= 2^{\underline{e}+M} (\|A_F\|_\infty + \|A\|_\infty 2^{-M})\end{aligned}\quad (38)$$

となり, (34) 式を使うと  $\|x_+\|_\infty < \alpha 2^{\underline{e}+M}$  が成り立つ。すなわち  $x \in \Sigma \Rightarrow x_+ \in \mathcal{X}$  が成り立つ。ここで  $\mathcal{X} \subset \Sigma$  であるから,  $x \in \mathcal{X} \Rightarrow x_+ \in \mathcal{X}$  となる。以上のことから,  $x_0 \in \mathcal{X}$  のときはすべての  $k \geq 1$  で  $x(k) \in \mathcal{X}$  であり,  $x_0 \in \mathcal{X}^c$  のときは, すべての  $k \geq T(x_0) + 1$  で  $x(k) \in \mathcal{X}$  となるので, 閉ループ系 (7) 式は終局有界性となる。□

**定理 1** より, (34) 式を満たす  $\alpha$  が存在するように有効ビット数  $M$  を決めれば, システムが終局有界となることがわかる。さらに  $x \in \Sigma^c$  における  $\|x\|_\infty$  の減少の割合を  $\alpha$  によって決定することができる。

**定理 1** の (34) 式は  $\|A + BF\|_\infty < 1$  を満たす  $F$  の存在を要求する。ところが,  $(A, B)$  が可到達正準形で与えられるときそのような  $F$  は存在しない。つぎに述べる **定理 2** はそのような制御対象であっても適用が可能である。

### 3.2 行列不等式による終局有界条件

まず, 状態  $x$  と量子化誤差  $\epsilon(x)$  の関係を

$$\epsilon(x) = \Delta(x)x \quad (39)$$

と表すと,  $\Delta(x)$  の大きさについて次の補題が成立する。

**【補題 2】** 有効ビット数  $M$  の二進展開量子化器では, (39) 式の  $\Delta$  は

$$\|\Delta(x)\|_p < 2^{-M} \text{ for all } x \in \Sigma^c \quad (40)$$

を満たす。ただし  $p = 1, 2, \infty$  である。

(証明)

$$|x_i - q_i(x_i)| = \sum_{j=-\infty}^{e_i(x_i)-M-1} \alpha_{ij} 2^j < 2^{e_i(x_i)-M} \quad (41)$$

なので,

$$\begin{aligned}\|\epsilon(x)\|_p &< \left\| [2^{e_1(x_1)-M} \dots 2^{e_n(x_n)-M}]^T \right\|_p \\ &= 2^{-M} \left\| [2^{e_1(x_1)} \dots 2^{e_n(x_n)}]^T \right\|_p \leq 2^{-M} \|x\|_p\end{aligned}$$

が成り立つ。一方,  $x \in \Sigma^c$  より  $x \neq 0$  であり,  $\|\epsilon(x)\|_p \leq \|\Delta(x)\|_p \|x\|_p$  より

$$\begin{aligned}\|\Delta(x)\|_p &\geq \|\epsilon(x)\|_p / \|x\|_p \\ &> 2^{-M} \|x\|_p / \|x\|_p = 2^{-M}\end{aligned}\quad (42)$$

なので, (40) 式が証明された。□

Fig. 4 はスカラ値  $x \in [-3, 3]$  が  $M = 1, \underline{e} = -1$  で量子化された値  $\tilde{x}$  (階段型の実線), 量子化誤差  $\epsilon$  (ノコギリ型の点線) および  $2^{-M}x$  (鎖線) を表している。  $|x| \geq 2^0 = 1$  においては  $|\epsilon| < 2^{-1}|x|$  が成り立つことがわかる。

(39) 式を用いると, 閉ループ系 (7) 式は次で表せる。

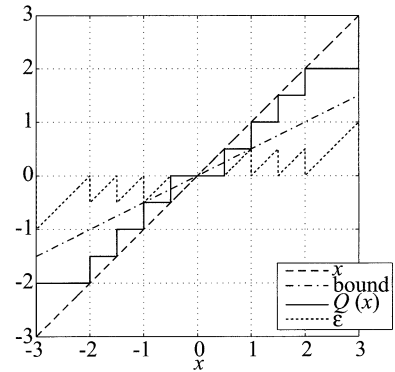


Fig. 4 The signal  $x$  and the quantization error  $\epsilon$  ( $M = 1, \underline{e} = -1$ )

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_F x(k) - BF\Delta(x(k))x(k) \\ &= (A_F - BF\Delta(x(k)))x(k) \end{aligned} \quad (43)$$

**【定理 2】** 有効ビット数  $M$  の二進展開量子化器  $Q$  を有する閉ループ系 (7) 式を考える。もし行列不等式

$$\begin{bmatrix} -\Pi & A_F \Pi & BF & 0 \\ \Pi A_F^T & -(1-\alpha)\Pi & 0 & \Pi \\ F^T B^T & 0 & -2^{2M}I & 0 \\ 0 & \Pi & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (44)$$

を満たす正定対称行列  $\Pi$  とスカラ  $\alpha \in (0,1)$  が存在するならば,  $P \triangleq \Pi^{-1}$  とし,  $V(x) \triangleq x^T P x$  とすると, 次が成り立つ。

(i) 閉ループ系 (7) 式において次式が成り立つ。

$$V(x_+) < (1-\alpha)V(x) \quad \forall x \in \Sigma^c \quad (45)$$

(ii) 閉ループ系 (7) 式は有界集合  $\mathcal{X}$  内で終局有界となる。ただし,

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid x^T P x \leq \bar{V} \right\} \\ \bar{V} &\triangleq \sup_{x \in \Sigma} (Ax + BFQ(x))^T P (Ax + BFQ(x)) \end{aligned} \quad (46)$$

この定理の証明には次の補題 [9] が必要である。

**【補題 3】** 行列  $U, V, Y, \Delta$  について, 以下の二つの条件は等価である。

(i) 任意の  $\|\Delta\|_2 \leq \gamma$  に対し  $Y + U\Delta V + V^T \Delta^T U^T < 0$

(ii)  $\exists \beta (\in \mathbf{R}) > 0$  s.t.  $\gamma^2 U U^T + \beta Y + \beta^2 V^T V < 0$

この補題 3 を用いて, 定理 2 は以下のように証明できる。

(証明) (i) (44) 式を満たす  $\Pi > 0$  と  $\alpha \in (0,1)$  が存在するとき, Schur 補元より次が成り立つ。

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -\Pi & A_F \Pi \\ \Pi A_F^T & -(1-\alpha)\Pi \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} BF & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{-2M}I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^T B^T & 0 \\ 0 & \Pi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\Pi & A_F \Pi \\ \Pi A_F^T & -(1-\alpha)\Pi \end{bmatrix} + 2^{-2M} \begin{bmatrix} -BF \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} -F^T B^T & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \Pi \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (48)$$

補題 3 を用いると, すべての  $\|\Delta(x)\|_2 < 2^{-M}$  に対し

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -\Pi & A_F \Pi \\ \Pi A_F^T & -(1-\alpha)\Pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Pi \end{bmatrix} \Delta^T(x) \\ &\times \begin{bmatrix} -F^T B^T & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -BF \\ 0 \end{bmatrix} \Delta(x) \begin{bmatrix} 0 & \Pi \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (49)$$

が成り立つ。上式の両側から行列  $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Pi^{-1} \end{bmatrix}$  をかけると

$$\begin{bmatrix} -\Pi & A_F - BF\Delta(x) \\ (A_F - BF\Delta(x))^T & -(1-\alpha)\Pi^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

for all  $\|\Delta(x)\|_2 < 2^{-M}$

となり, Schur 補元を用いて  $P \triangleq \Pi^{-1}$  とすると

$$(A_F - BF\Delta(x))^T P (A_F - BF\Delta(x)) - P < -\alpha P$$

for all  $\|\Delta(x)\|_2 < 2^{-M}$  (50)

を得る。つぎに  $x \notin \Sigma$  のとき, (40) 式より  $\|\Delta(x)\|_2 < 2^{-M}$  なので (50) 式を用いると

$$\begin{aligned} V(x_+) - V(x) &= x_+^T P x_+ - x^T P x \\ &= x^T \{ (A_F - BF\Delta(x))^T P (A_F - BF\Delta(x)) - P \} x \\ &< -\alpha x^T P x = -\alpha V(x) \end{aligned}$$

となる。よって,  $V(x_+) < (1-\alpha)V(x)$  である。

(ii-a)  $\mathcal{X}$  が不変集合 ( $x \in \mathcal{X} \Rightarrow x_+ \in \mathcal{X}$ ) であることを示す。

(a-1)  $x \in \mathcal{X} \cap \Sigma^c$  の場合:  $x \in \Sigma^c$  であるから, (45) 式より  $V(x_+) < (1-\alpha)V(x)$  で,  $x \in \mathcal{X}$  であるから (46) 式より  $V(x) = x^T P x \leq \bar{V}$  である。したがって  $V(x_+) \leq \bar{V}$  であるから  $x_+ \in \mathcal{X}$  となる。

(a-2)  $x \in \mathcal{X} \cap \Sigma$  の場合:  $x \in \Sigma$  であるから

$$\begin{aligned} x_+^T P x_+ &= (Ax + BFQ(x))^T P (Ax + BFQ(x)) \\ &\leq \sup_{x \in \Sigma} (Ax + BFQ(x))^T P (Ax + BFQ(x)) = \bar{V} \end{aligned} \quad (51)$$

となるので  $x_+ \in \mathcal{X}$  である。以上 (a-1) と (a-2) より,  $x \in \mathcal{X} \Rightarrow x_+ \in \mathcal{X}$  である。

(ii-b)  $x_0 \in \mathcal{X}^c$  から始まる解が有限の時間で  $\mathcal{X}$  に到達することを示す。時刻 0 から  $T-1$  まで  $x(k) \in \mathcal{X}^c \cap \Sigma^c$ ,  $x(T) \in \mathcal{X}$  であったとする。(45), (46) 式より

$$V(x(T)) < (1-\alpha)^T V(x_0) = (1-\alpha)^T x_0^T P x_0 \leq \bar{V}$$

である。この不等式を満たす最小の整数は必ず存在し,

$$T(x_0) = \lceil \log_{1-\alpha} (\bar{V}/x_0^T P x_0) \rceil \quad (52)$$

となるので,  $x(T(x_0)) \in \mathcal{X}$  である。 $T-1$  以前のある時刻  $k$  で  $x(k) \in \mathcal{X}^c \cap \Sigma$  となる場合は, (a-2) と同様の議論により  $x(k+1) \in \mathcal{X}$  となる。

以上より, (46) 式で定義される  $\mathcal{X}$  に対し  $x(k) \in \mathcal{X} \quad \forall k \geq T(x_0) \quad \forall x_0$  が成り立ち, システムは終局有界性である。

□

定理 2 より, (44) 式を満たす  $\Pi, \alpha$  が存在するならばシステムは終局有界であり, さらに  $x \in \Sigma^c$  のときは Lyapunov 関数  $x^T \Pi^{-1} x$  が各時刻ごとに  $(1-\alpha)$  の割合で減少することが保証できる。パラメータ  $\alpha$  の選び方によって状態の収束の速さを決定することができ, また (44) 式の解が存在するように有効ビット数  $M$  を決定することにより閉ループ系の終局有界性が保証できる。

## 4. 数値例

制御対象

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 30 & 20 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(k)$$

と状態フィードバックゲイン  $F = [-3 \ -1.999]$  に対し、 $e = -6$  の量子化器を用いて制御することを考える。

定理 1 の条件を満たす解を次の手順で求めた。

(1)  $\alpha = 1$  と固定し、条件 (34) 式を満たすような最小の  $M$  を求める。

(2)  $M$  を固定し、 $\alpha := 2^{-M} \|A\|_\infty + \|A_F\|_\infty$  とする。

また、定理 2 の条件を満たす解は、 $\alpha = 0$  を初期値として、次の手順をより小さな  $M$  が求まらなくなるまで反復して求めた。

(1)  $\alpha$  を固定し、行列不等式 (44) 式の解  $\Pi > 0$  が存在するような最小の  $M$  を求める。

(2)  $M$  を固定し、(44) 式を満たす最大の  $\alpha$  を求める。

結果はいずれも  $M = 6$ 、 $\alpha$  はそれぞれ 0.8812, 0.1640 であった。Fig. 5 に、 $x(0) = [3.12345 \ -2.65432]^T$  のときの応答を示す。上から順に状態  $x$ 、量子化誤差  $\epsilon(x)$ 、Lyapunov 関数の値  $V$  である。状態  $x$  および Lyapunov 関数  $V$  が有界となり、システムが終局有界となっていることが確認できる。

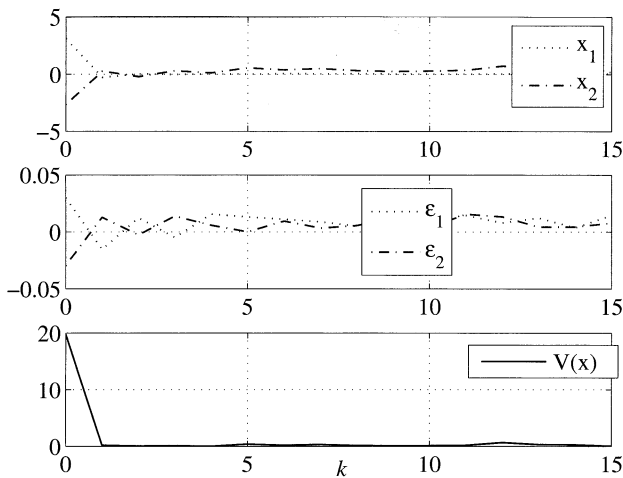


Fig. 5 A numerical example

## 5. おわりに

本論文では二進展開量子化器を帰還路に持つフィードバック制御系の安定性を考察した。状態を観測できる場合について、量子化器の量子化有効ビット数とゲインに関する終局有界性の十分条件を示した。状態を観測できない場合の考察、二進展開量子化と安定性以外の制御性能との関係の解析などが今後の課題としてあげられる。

## 参考文献

- [1] S. Azuma and T. Sugie: An optimal dynamic quantization scheme for control with discrete-valued input; *Proc. of the 2007 American Control Conference*, pp. 3576–3581 (2007)
- [2] L. Bao, M. Skoglund and K. H. Johansson: A scheme for joint quantization, error protection and feedback control over noisy channels; *Proc. of the 2007 American Control Conference*, pp. 4905–4910 (2007)
- [3] F. Blanchini: Ultimate boundedness control for uncertain discrete-time systems via set-induced Lyapunov functions; *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 39, No. 2, pp. 428–433 (1994)
- [4] F. Bullo: Quantized control via locational optimization; *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 51, No. 1, pp. 2–13 (2006)
- [5] N. Elia and S. J. Mitter: Stabilization of linear systems with limited information; *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 46, No. 9, pp. 1384–1400 (2001)
- [6] M. Ishikawa, I. Maruta and T. Sugie: Practical controller design for discrete-valued input systems using feedback modulators; *Proc. of the European Control Conference 2007*, pp. 3269–3275 (2007)
- [7] D. Liberzon and D. Nešić: Input-to-state stabilization of linear systems with quantized state measurements; *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 42, No. 5, pp. 767–781 (2007)
- [8] I. Lopez and C. T. Abdalah: Data rates conditions for network control system stabilization; *Proc. of Mediterranean Conference on Control and Automation* (2007)
- [9] I. R. Petersen and C. V. Hollot: A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems; *Automatica*, Vol. 22, No. 4, pp. 397–411 (1986)
- [10] 新銀, 太田: 量子化したフィードバックによる外乱抑制; 計測自動制御学会論文集, Vol. 43, No. 8, pp. 641–645 (2007)
- [11] 木村, 松永, 小澤, 橋本: 図解コンピュータ概論 [ハードウェア], オーム社 (2000)