

## 動的状態フィードバックによるブロッキング零点配置\*

滝本 隆<sup>†</sup>・山本 茂<sup>‡</sup>A Blocking Zero Placement Method  
by Dynamic State Feedback\*Takashi TAKIMOTO<sup>†</sup> and Shigeru YAMAMOTO<sup>‡</sup>

In this paper, we consider a blocking zero placement problem for closed-loop systems by state feedback. As a solution to the problem, we derive a dynamic state feedback controller which can be designed by solving a stabilization problem by constant state feedback. Moreover, we apply the proposed blocking zero placement method to a periodic disturbance rejection problem. Since a transfer function with blocking zeros can eliminate input signals corresponding to these blocking zeros, the periodic disturbance can be rejected if closed-loop systems have corresponding blocking zeros with the period on the imaginary axis.

## 1. はじめに

本論文では、動的状態フィードバックコントローラを用いて、閉ループ系のブロッキング零点を任意に配置する問題を考える。伝達関数行列  $G(s)$  のブロッキング零点は、 $G(z)=0$  をみたく  $z \in \mathbb{C}$  である。伝達関数  $G(s)$  のブロッキング零点  $z$  は、 $G(s)$  の入力  $u(t)$  に  $e^{zt}$  がどのような形で加わっても、それが出力に出ないようにブロックするという入力阻止作用を有する [1]。閉ループ系のブロッキング零点を適切に配置することができれば、ブロッキング零点の入力阻止作用によって、観測出力に含まれる外乱の除去が可能となる。

これまででは、原点や虚軸上にブロッキング零点を配置する問題が扱われてきた [2–10]。参考文献 [2–7] は、原点のブロッキング零点による定常値外乱排除問題を扱っている。一方、参考文献 [8–10] は、むだ時間を用いて虚軸上にブロッキング零点を配置することによって周期入力の排除を行っている。ところが、この方法はむだ時間を用いるため制御パラメータの設計は容易ではない (詳

細は、[9,10] を参照)。

本論文では、参考文献 [6,7] の結果を拡張し、ブロッキング零点を任意に配置する動的状態フィードバックコントローラを提案する。参考文献 [6,7] と同様に、動的状態フィードバックコントローラによる安定化問題が定数状態フィードバックによる安定化問題に帰着できる点が特徴である (参考文献 [11] で一部発表)。また、離散時間系で知られている安定化コントローラの自由パラメータを利用してブロッキング零点を配置する手法 [12,13] とは異なり、提案手法は、コントローラの状態空間実現を直接与える形となっている。

以下では、 $\lambda(A)$  は行列  $A$  の固有値を、 $I_m$  はサイズが  $m$  の単位行列を、 $\otimes$  はクロネッカ積を表すものとする。

## 2. ブロッキング零点の配置問題

伝達関数行列  $G(s)$  のブロッキング零点とは、 $G(z)=0$  をみたく  $z \in \mathbb{C}$  である。もし  $G(s)$  ( $p \times q$  行列) が安定でかつブロッキング零点  $z$  をもつならば、 $G(s)$  に入力  $\eta e^{zt}$  ( $\forall \eta \in \mathbb{R}^q$ ) を加えても、 $G(s)$  の出力が定常状態で 0 となる [1]。

## 2.1 外乱除去問題：動機

ブロッキング零点配置を動機付ける外乱除去問題を考える。Fig. 1 に示す制御対象  $P(s)$  とコントローラ  $K(s)$  からなる単一フィードバック系を考える。制御目的は、観測出力に外乱  $d(t)$  が含まれるとき、外乱  $d(t)$  が制御対象の入力  $u(t)$  と出力  $y(t)$  に与える影響を排除するこ

\* 原稿受付 2007年10月5日

† 大阪大学 大学院基礎工学研究科 Graduate School of Engineering Science, Osaka University; Machikaneyama, Toyonaka, Osaka 560-8531, JAPAN

‡ 金沢大学 大学院自然科学研究科 Graduate School of Natural Science and Technology, Kanazawa University; Kakuma, Kanazawa, Ishikawa 920-1192, JAPAN

Key Words: blocking zeros, zero placement, dynamic state feedback.

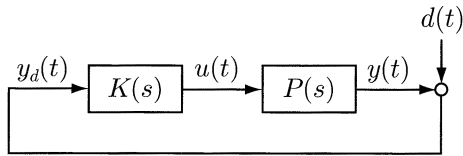


Fig. 1 Closed-loop system of the linear system  $P(s)$  and the feedback controller  $K(s)$

とである。この目的は、 $d$  から  $[u^T \ y^T]^T$  への伝達関数

$$G(s) = \begin{bmatrix} K(s)(I - P(s)K(s))^{-1} \\ P(s)K(s)(I - P(s)K(s))^{-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

を安定化し、かつこのブロッキング零点を外乱  $d(t)$  を阻止するように選ぶことで達成される。例として、

$$d(t) = [d_1(t) \ d_2(t) \ \dots \ d_q(t)]^T \in \mathbb{R}^q \quad (2)$$

が周期外乱である場合を考えよう。外乱の  $i$  番目の要素

$$d_i(t) = \sum_{k=1}^{\ell_i} d_{ik} \sin(\omega_{ik}t + \theta_{ik}) \quad (i=1, \dots, q) \quad (3)$$

は  $\ell_i$  個の正弦波からなり、それらの角周波数  $\omega_{ik}$  のみが既知で、振幅  $d_{ik}$  と位相  $\theta_{ik}$  が未知であるとする。このとき、(1) 式のブロッキング零点を周期外乱に対応する  $\pm j\omega_{ik}$  と一致させることができれば、すなわち

$$G(\pm j\omega_{ik}) = 0 \quad (4)$$

とできれば、制御対象の入出力  $u(t)$ ,  $y(t)$  に対する周期外乱  $d(t)$  の影響を定常的に排除できる。

伝達零点もブロッキング零点と同様の入力阻止作用をもつが、阻止できる入力に制約をもつ [1]。  $G(s)$  の伝達零点が  $z$  ならば、出力を 0 にできるのは、ある特定のベクトル  $\eta \neq 0$  による入力  $\eta e^{zt}$  のみである。この場合、阻止したい信号の情報 (周期外乱の場合、振幅と位相) を知る必要がある。ブロッキング零点を用いた外乱除去では、周期外乱  $d(t)$  の振幅  $d_{ik}$  と位相  $\theta_{ik}$  の情報は必要なく、角周波数  $\omega_{ik}$  のみ知っていればよい。

## 2.2 ブロッキング零点配置問題の定式化

まず、ブロッキング零点の配置問題を定式化する。制御対象が  $m$  入力の  $n$  次元線形システム

$$P(s): \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases} \quad (5)$$

で与えられる場合を考える。本論文では、議論を簡単にするため、制御対象の出力  $y(t)$  は状態であるものとする。ここで、 $x(t) \in \mathbb{R}^n$  は状態、 $u(t) \in \mathbb{R}^m$  は入力であり、 $(A, B)$  は可安定であると仮定する。この制御対象 (5) 式に対して、(1) 式のブロッキング零点を指定するところへ配置する安定化状態フィードバックコントローラを求めるブロッキング零点配置問題を考える。なお、配

置したいブロッキング零点の集合を  $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_r\}$  とし、次を仮定する。

(仮定 1) 集合  $\mathcal{Z}$  の実数でない要素に対して、その複素共役も  $\mathcal{Z}$  の要素となる。また、 $\mathcal{Z}$  は  $\lambda(A) \notin \mathcal{Z}$  をみたす。

仮定 1 の条件  $\lambda(A) \notin \mathcal{Z}$  は、制御対象の極と配置するブロッキング零点との極零相殺を回避するために仮定される。

**【問題 1】** 仮定 1 をみたす制御対象  $P(s)$  と  $\mathcal{Z}$  が与えられたとき、閉ループ系を内部安定化し、すべての  $z_i \in \mathcal{Z}$  に対し、 $G(z_i) = 0$  とする動的状態フィードバックコントローラ  $K(s)$  を求めよ。

動的フィードバックコントローラ  $K(s)$  がすべての  $z_i \in \mathcal{Z}$  をブロッキング零点としてもつならば、仮定 1 より  $z_i$  に関する  $P(s)$  と  $K(s)$  の極零相殺が生じないので、(1) 式は  $G(z_i) = 0$  となる。

## 2.3 ブロッキング零点配置問題の解

ここでは、ブロッキング零点配置問題 (問題 1) の解が動的状態フィードバックコントローラ

$$K(s): \begin{cases} \dot{\xi}(t) = (V + WK_2)\xi(t) + WK_1x(t) \\ u(t) = (U + K_2)\xi(t) + K_1x(t) \end{cases} \quad (6)$$

によって与えられることを示す。ただし、 $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times rm}$  は設計パラメータであり、行列  $U, V, W$  は、

$$U = I_m \otimes \alpha \in \mathbb{R}^{m \times rm} \quad (7)$$

$$V = I_m \otimes [0 \ e_1 \ \dots \ e_{r-1}] \in \mathbb{R}^{rm \times rm} \quad (8)$$

$$W = I_m \otimes e_r \in \mathbb{R}^{rm \times m} \quad (9)$$

とする。また、ベクトル  $\alpha = [a_r \ \dots \ a_1]$  の要素  $a_i$  は、 $\mathcal{Z}$  のすべての要素を根とする実係数の多項式

$$\phi(s) := \prod_{i=1}^r (s - z_i) = s^r + a_1 s^{r-1} + \dots + a_{r-1} s + a_r \quad (10)$$

の係数である。さらに、ベクトル  $e_i \in \mathbb{R}^r$  は  $I_r$  の第  $i$  列とする。このとき、次の補題を得る (証明は付録 2.)。

**【補題 1】** コントローラ (6) 式の伝達関数は

$$K(s) = \phi(s)X(sI - V - WK_2)^{-1}WK_1 \quad (11)$$

である。ただし、

$$X = I_m \otimes e_1^T \in \mathbb{R}^{m \times rm} \quad (12)$$

である。さらに、 $\lambda(V + WK_2) \notin \mathcal{Z}$  ならば、すべての  $z_i \in \mathcal{Z}$  に対し  $K(z_i) = 0$  となる。

(注意 1) 参考文献 [6,7] では、ブロッキング零点を原点に配置するコントローラとして設計パラメータ  $\hat{A}, \hat{B}$  を用いたコントローラ

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \hat{A}\xi(t) + \hat{B}x(t) \\ u(t) = \hat{A}\xi(t) + \hat{B}x(t) \end{cases}, \quad \det \hat{A} \neq 0$$

が扱われている．これは提案手法で  $\mathcal{Z} = \{0\}$  とした場合と一致する．実際 (6) 式において  $V=0, W=I, U=0$  となり,  $K_2$  と  $K_1$  がそれぞれ  $\hat{A}$  と  $\hat{B}$  に対応する．

つぎに, コントローラ (6) 式を用いて制御対象 (5) 式の安定化問題を考える．(5) 式と (6) 式の閉ループ系は,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK_1 & B(U+K_2) \\ WK_1 & V+WK_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

となる．さらに, (13) 式は,

$$\dot{\bar{x}}(t) = (\bar{A} + \bar{B}\bar{K})\bar{x}(t) \quad (14)$$

と変形できる．ただし,  $\bar{x}(t) = [x(t)^T \ \xi(t)^T]^T$ ,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & BU \\ 0 & V \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ W \end{bmatrix}, \quad \bar{K} = [K_1 \ K_2]$$

である．(14) 式は, 定数ゲイン  $\bar{K}$  を用いた状態フィードバック  $\bar{u}(t) = \bar{K}\bar{x}(t)$  と  $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}\bar{u}(t)$  との閉ループ系そのものである．よって, コントローラ (6) 式のパラメータ  $K_1, K_2$  は, 定数状態フィードバックゲイン  $\bar{K}$  による安定化問題を解くことで求めることができる．

**【定理 1】** 仮定 1 をみたす制御対象  $P(s)$  と  $\mathcal{Z}$  が与えられるものとする．このとき, 以下が成り立つ．

- (i) 閉ループ系 (14) 式を漸近安定化するフィードバックゲイン  $\bar{K}$  が存在する．
- (ii) 安定化ゲイン  $\bar{K} = [K_1 \ K_2]$  が  $\lambda(V+WK_2) \notin \mathcal{Z}$  をみたすならば, (6) 式のコントローラ  $K(s)$  は問題 1 の一つの解である．

(証明) まず, (i) を示す． $(\bar{A}, \bar{B})$  が可安定であれば閉ループ系 (14) 式を漸近安定化するフィードバックゲイン  $\bar{K}$  が存在するので,  $(\bar{A}, \bar{B})$  の可安定性を調べる． $(A, B)$  の可安定性の仮定から,  $\forall s \in \bar{\mathbb{C}}^+ := \{s \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(s) \geq 0\}$  に対して  $\text{rank}[A - sI_n \ B] = n$  が成り立つ．ここで,

$$\begin{aligned} & \text{rank}[\bar{A} - sI_{n+mr} \ \bar{B}] \\ &= \text{rank}[A - sI_n \ \phi(s)B] + rm \end{aligned} \quad (15)$$

の関係をを用いると (詳細は付録 3. に示す),  $\forall s \in \bar{\mathbb{C}}^+ \setminus \mathcal{Z}$  に対して

$$\begin{aligned} & \text{rank}[\bar{A} - sI_{n+mr} \ \bar{B}] \\ &= \text{rank}[A - sI_n \ \phi(s)B] + rm \\ &= \text{rank}[A - sI_n \ B] + rm \\ &= n + rm \end{aligned}$$

となり,  $s \in \mathcal{Z}$  のとき,

$$\begin{aligned} & \text{rank}[\bar{A} - sI_{n+mr} \ \bar{B}] \\ &= \text{rank}[A - sI_n \ \phi(s)B] + rm \\ &= \text{rank}[A - sI_n] + rm \end{aligned}$$

となる．よって, 仮定 1 より  $s \in \mathcal{Z}$  に対し  $sI - A$  が正

則なので,  $(\bar{A}, \bar{B})$  は可安定である．つぎに, (ii) を示す．補題 1 より, コントローラ (6) 式が  $\lambda(V+WK_2) \notin \mathcal{Z}$  ならば, 仮定 1 のもとですべての  $z_i \in \mathcal{Z}$  に対し  $G(z_i) = 0$  をみたす．よって, 安定化ゲイン  $\bar{K}$  が  $\lambda(V+WK_2) \notin \mathcal{Z}$  をみたすならば, (6) 式のコントローラ  $K(s)$  は問題 1 の一つの解となる．□

## 2.4 離散時間システム

離散時間系におけるブロッキング配置問題とその解についても, 連続時間系の場合と同様に示すことができる．離散時間動的状態フィードバックコントローラを

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= (V+WK_2)\xi(k) + WK_1x(k) \\ u(k) &= (U+K_2)\xi(k) + K_1x(k) \end{aligned} \quad (16)$$

とすると, 定理 1 と同様,  $\bar{A} + \bar{B}\bar{K}$  を漸近安定化する  $\bar{K} = [K_1 \ K_2]$  を求め,  $\lambda(V+WK_2) \notin \mathcal{Z}$  をみたすならば, コントローラ (16) 式はブロッキング零点配置問題の一つの解となる．(2.2, 2.3 節と同じ手順で示すことができるため, 詳細は割愛する.)

(注意 2) 参考文献 [13] では, 1 入力多出力の制御対象に限定して, 出力フィードバックによるブロッキング零点配置問題が扱われている．提案手法と比較するために, 状態がすべて観測できるものとして参考文献 [13] のコントローラの次数を求めると, それは制御対象の次数  $n$  と配置する零点の個数  $r$  との和  $n+r$  となる．一方, 提案手法のコントローラの次数は  $r$  である．

## 3. 数値例

2.1 節の外乱除去問題の数値例を示す．制御対象は, 不安定な 2 次の連続時間線形システム

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (17)$$

とし, 周期外乱は

$$d(t) = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5\sin\pi t \\ \sin(\pi t + \pi/2) \end{bmatrix}$$

とする (Fig. 1)．この周期外乱の角周波数  $0, \pi$  が制御器設計に使用できるものとする．以下では,  $\mathcal{Z} = \{0, \pm\pi j\}$  のすべての要素にブロッキング零点を配置する安定化コントローラ (6) 式を求める．

(10) 式は  $\phi(s) = s^3 + \pi^2 s$  であるので  $\alpha = [0 \ \pi^2 \ 0]$  となる． $m=1, r=3$  であるから, (14) 式の  $\bar{A}, \bar{B}$  は

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 & \pi^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる． $\lambda(A) = -0.78, 1.28 \notin \mathcal{Z}$  なので, 定理 1 より  $\bar{A} + \bar{B}\bar{K}$  を漸近安定化する  $\bar{K}$  を求めることができる．

ここでは、評価関数  $\int_0^\infty (\bar{x}^T Q \bar{x} + \bar{u}^T R \bar{u}) dt$  を最小化する最適レギュレータとして安定化ゲイン  $\bar{K}$  を求めた。重みを  $Q = \text{diag}(1, 1, 1000, 1, 1)$ ,  $R = 1$  としたとき、

$$\bar{K} = [-9.61 \quad -12.28 \quad 31.62 \quad -24.35 \quad 3.22] \quad (18)$$

を得た。このとき、

$$V + WK_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 31.62 & -24.35 & 3.22 \end{bmatrix}$$

の固有値は  $1.45, 0.88 \pm 4.58j$  なので、 $\lambda(V + WK_2) \notin \mathcal{Z}$  をみたと。したがって、(18)式の  $\bar{K} = [K_1 \quad K_2]$  の値で定まるコントローラ(6)式は、問題1の一つの解である。

この動的状態フィードバックコントローラ(6)式をシステム(17)式に適用したときの時間応答をFig.2に示す。Fig.2は、制御対象の入出力  $u(t)$ ,  $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]^T$  と観測値  $y_d(t) = x(t) + d(t) = [y_{d1}(t) \quad y_{d2}(t)]^T$  の時間応答である。(破線はそれぞれ  $x_2(t)$ ,  $y_{d2}(t)$  を示す。) Fig.2から、提案手法によって制御対象の入出力  $u(t)$ ,  $x(t)$  は共に0に収束していることがわかる。したがって、ブロッキング零点をもつ動的状態フィードバックコントローラによって、観測外乱  $d(t)$  の影響を排除できていることがわかる。

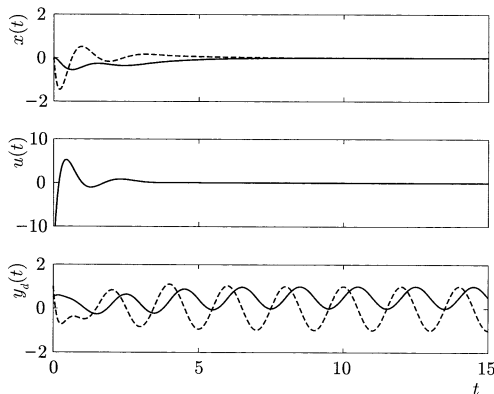


Fig. 2 Time responses for the system (17) with the proposed controller

#### 4. おわりに

本論文では、状態フィードバックによって閉ループ系のブロッキング零点を配置する問題を考え、その解の一つとして、動的状態フィードバックコントローラの構造を与えた。この動的状態フィードバックコントローラ的设计パラメータは、定数状態フィードバックの安定化問題を解くことにより決定できるという特徴をもつ。さらに、ブロッキング零点の配置問題を動機づけた観測出力に含まれる周期外乱の除去問題を例としてとりあげ、数値シミュレーションによって提案手法の有効性を確認した。今後の課題は、出力フィードバック問題への拡張やロバスト制御の適用、安定化手動操作の支援制御への適

用などが考えられる。

#### 参考文献

- [1] 須田：制御系における零点 [I]；計測と制御，Vol. 29, No. 2, pp. 157–165 (1990)
- [2] A. S. Bazanella, P. V. Kokotovic and A. S. E. Silva: On the control of dynamic systems with unknown operating point; *International Journal of Control*, Vol. 73, No. 7, pp. 600–605 (2000)
- [3] M. A. Hassouneh, H.-C. Lee and E. H. Abed: Washout filters in feedback control: Benefits, limitations and extensions; *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 3950–3955 (2004)
- [4] T. Takimoto and S. Yamamoto: An active control method for oscillatory motions in human behavior; *Proc. of SICE Annual Conference 2005*, pp. 3195–3198 (2005)
- [5] T. Takimoto, S. Yamamoto and H. Oku: Tuning of washout control for manual operations via closed-loop identification; *Proceedings of the 3rd International Symposium on Systems and Human Science (SSR2006)* (2006)
- [6] T. Takimoto and S. Yamamoto: Reduced-order washout controllers stabilizing uncertain equilibrium points; *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 5390–5393 (2007)
- [7] 滝本, 山本：ウォッシュアウト制御による不確かな平衡点の安定化；計測自動制御学会論文集，Vol. 43, No. 12, pp. 1120–1126 (2007)
- [8] K. Pyragas: Continuous control of chaos by self-controlling feedback; *Physics Letters A*, **170**, pp. 421–428 (1992)
- [9] H. Kokame, K. Hirata, K. Konishi and T. Mori: State difference feedback for stabilizing uncertain steady states of non-linear systems; *International Journal of Control*, Vol. 74, No. 6, pp. 537–546 (2001)
- [10] H. Kokame, K. Hirata, K. Konishi and T. Mori: Difference feedback can stabilize uncertain steady states; *IEEE Transaction on Automatic Control*, Vol. 46, No. 12, pp. 1908–1913 (2001)
- [11] 滝本, 山本：ブロッキング零点を複数もつ動的状態フィードバックコントローラ的设计法；第51回システム制御情報学会研究発表講演会論文集，pp. 399–400 (2007)
- [12] 平田： $H^\infty$  遅延フィードバックコントローラ的设计；第5回計測自動制御学会制御部門大会資料，pp. 359–364 (2005)
- [13] 平田：補間を用いたサンプル値遅延フィードバック制御器の一设计法；システム制御情報学会論文誌，Vol. 20, No. 9, pp. 376–383 (2007)

#### 付 録

##### 付録 1. 準備

付録 2. と付録 3. の証明に必要な(7)~(9), (12)式の行列  $U, V, W, X$  の関係を示す。

【補題 2】 以下の式が成り立つ。

$$W^T[V \ W] = [0 \ I_m] \quad (\text{A1})$$

$$\begin{bmatrix} V \\ X \end{bmatrix} X^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \quad (\text{A2})$$

$$VV^T + WW^T = I_{rm} \quad (\text{A3})$$

$$V^T V + X^T X = I_{rm} \quad (\text{A4})$$

$$(U + sW^T)(I - sV^T)^{-1} X^T = \phi(s)I_m \quad (\text{A5})$$

(証明) (A1) 式は、クロネッカ積の性質： $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$ ,  $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$  を用いると、

$$\begin{aligned} W^T V &= (I_m \otimes e_r)^T (I_m \otimes [0 \ e_1 \ \cdots \ e_{r-1}]) \\ &= I_m \otimes (e_r^T [0 \ e_1 \ \cdots \ e_{r-1}]) = 0 \end{aligned}$$

$$W^T W = (I_m \otimes e_r)^T (I_m \otimes e_r) = I_m \otimes (e_r^T e_r) = I_m$$

から導ける。同様に、(A2) 式は

$$\begin{aligned} V X^T &= (I_m \otimes [0 \ e_1 \ \cdots \ e_{r-1}]) (I_m \otimes e_1^T)^T \\ &= I_m \otimes ([0 \ e_1 \ \cdots \ e_{r-1}] e_1) = 0 \end{aligned}$$

$$X X^T = (I_m \otimes e_1^T) (I_m \otimes e_1^T)^T = I_m \otimes (e_1^T e_1) = I_m$$

から得られる。さらに、(A3) と (A4) 式は、クロネッカ積の性質： $A \otimes B + A \otimes C = A \otimes (B + C)$  を用いて、

$$\begin{aligned} VV^T + WW^T &= I_m \otimes ([0 \ e_1 \ \cdots \ e_{r-1}] [0 \ e_1 \ \cdots \ e_{r-1}]^T) \\ &\quad + I_m \otimes (e_r e_r^T) \end{aligned}$$

$$= I_m \otimes ([e_1 \ \cdots \ e_{r-1} \ 0] + [0 \ \cdots \ 0 \ e_r])$$

$$= I_m \otimes I_r = I_{rm}$$

$$\begin{aligned} V^T V + X^T X &= I_m \otimes ([0 \ e_1 \ \cdots \ e_{r-1}]^T [0 \ e_1 \ \cdots \ e_{r-1}]) \\ &\quad + I_m \otimes (e_1 e_1^T) \end{aligned}$$

$$= I_m \otimes ([0 \ e_2 \ \cdots \ e_r] + [e_1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T)$$

$$= I_m \otimes I_r = I_{rm}$$

となる。最後に、(A5) 式を導く。行列  $I - sV^T$  は対角成分がすべて 1 の下三角行列であるため正則である。また、 $I - sV^T$  の逆行列は、

$$(I - sV^T)^{-1} = I_m \otimes Y, \quad Y := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ s & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ s^{r-1} & \cdots & s & 1 \end{bmatrix}$$

と得られる。よって、

$$\begin{aligned} &(U + sW^T)(I - sV^T)^{-1} X^T \\ &= (I_m \otimes [a_r \ \cdots \ a_1] + I_m \otimes s e_r^T) (I_m \otimes Y) (I_m \otimes e_1) \\ &= I_m \otimes \left\{ ([a_r \ \cdots \ a_1] + s e_r^T) Y e_1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= I_m \otimes ([a_r \ \cdots \ a_2 \ a_1 + s] [1 \ s \ \cdots \ s^{r-1}]^T) \\ &= (a_r + a_{r-1}s + \cdots + a_1 s^{r-1} + s^r) I_m \\ &= \phi(s) I_m \end{aligned}$$

となるので (A5) 式が成り立つ。□

### 付録 2. 補題 1 の証明

初期値を 0 として (6) 式をラプラス変換すると、

$$s\xi(s) = (V + WK_2)\xi(s) + WK_1 x(s) \quad (\text{A6})$$

$$u(s) = (K_2 + U)\xi(s) + K_1 x(s) \quad (\text{A7})$$

が得られる。ここで、(A6) 式の左から  $V^T$  をかけて、(A1) 式を用いると

$$sV^T \xi(s) = V^T V \xi(s) \quad (\text{A8})$$

が得られる。同様に (A6) 式の左から  $W^T$  をかけて、(A1) 式を用いると

$$sW^T \xi(s) = K_2 \xi(s) + K_1 x(s) \quad (\text{A9})$$

となる。つぎに、(A7) 式は (A9) 式を用いると、

$$u(s) = (U + sW^T)\xi(s)$$

となる。ここで、正則な行列  $I - sV^T$  (対角成分に 1 が並ぶ下三角行列) を用いると、

$$u(s) = (U + sW^T)(I - sV^T)^{-1}(I - sV^T)\xi(s)$$

と変形できる。このとき、(A8) と (A4) 式を用いると、

$$\begin{aligned} u(s) &= (U + sW^T)(I - sV^T)^{-1}(I - V^T V)\xi(s) \\ &= (U + sW^T)(I - sV^T)^{-1} X^T X \xi(s) \end{aligned}$$

を得る。さらに、(A5) 式を用いると、

$$u(s) = \phi(s) X \xi(s) \quad (\text{A10})$$

と変形できる。よって、(A6) と (A10) 式から伝達関数は

$$K(s) = \phi(s) X (sI - V - WK_2)^{-1} WK_1 \quad (\text{A11})$$

となる。ここで、(10) 式より  $\phi(z_i) = 0, \forall z_i \in \mathcal{Z}$  なので、 $\lambda(V + WK_2) \notin \mathcal{Z}$  ならば、すべての  $z_i \in \mathcal{Z}$  に対し  $K(z_i) = 0$  をみたす。

### 付録 3. (15) 式の証明

次の補題 3 を用いると、

$$\text{rank}[\bar{A} - sI_{n+mr} \ \bar{B}] = \text{rank}Z(s)$$

となり、さらに

$$\begin{aligned} \text{rank}Z(s) &= \text{rank}[A - sI_n \ \phi(s)B] + \text{rank}(I_{rm}) \\ &= \text{rank}[A - sI_n \ \phi(s)B] + rm \end{aligned}$$

となり、(15) 式が示された。

【補題 3】 以下の式が成り立つ.

$$[\bar{A} - sI_{n+mr} \quad \bar{B}] = Z_1 Z_2(s) Z(s) Z_3 Z_4(s) \quad (\text{A12})$$

ただし,

$$Z(s) = \begin{bmatrix} A - sI_n & 0 & \phi(s)B \\ 0 & I_{rm} & 0 \end{bmatrix}, \quad Z_1 = \begin{bmatrix} I & BX \\ 0 & V + WX \end{bmatrix}$$

$$Z_2(s) = \begin{bmatrix} I & B(U + sW^T)(I - sV^T)^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$Z_3 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & X^T \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}, \quad Z_4(s) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I - sV^T & 0 \\ 0 & -(X + sW^T) & I \end{bmatrix}$$

であり,  $Z_1$  と  $Z_4(s)$  は任意の  $s$  に対し正則行列である.  
(証明) (A12) 式の右辺を計算する. まず,  $Z(s)$  の左から  $Z_2(s)$  をかけると,

$$Z_2(s)Z(s) = \begin{bmatrix} A - sI_n & B(U + sW^T)(I - sV^T)^{-1} & \phi(s)B \\ 0 & I_{rm} & 0 \end{bmatrix}$$

となる. 上式の右から  $Z_3$  をかけ, (A5) 式を用いると,

$$Z_2(s)Z(s)Z_3 = \begin{bmatrix} A - sI_n & B(U + sW^T)(I - sV^T)^{-1} & 0 \\ 0 & I_{rm} & X^T \end{bmatrix}$$

となる. さらに, 上式の右から  $Z_4(s)$  をかけ, (A4) 式を用いると,

$$Z_2(s)Z(s)Z_3Z_4(s) = \begin{bmatrix} A - sI_n & B(U + sW^T) & 0 \\ 0 & I - sV^T - X^T(sW^T + X) & X^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A - sI_n & B(U + sW^T) & 0 \\ 0 & V^T V - sV^T - sX^T W^T & X^T \end{bmatrix}$$

が得られる. ここで, 上式の左から  $Z_1$  をかけ, (A2), (A3) 式を用いると,

$$Z_1 Z_2(s) Z(s) Z_3 Z_4(s) = \begin{bmatrix} A - sI_n & B(U + sW^T) - sB W^T & B \\ 0 & V V^T V - sV V^T - sW W^T & W \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A - sI_n & BU & B \\ 0 & V(I - X^T X) - s(V V^T + W W^T) & W \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A - sI_n & BU & B \\ 0 & V - sI_{rm} & W \end{bmatrix}$$

$$= [\bar{A} - sI_{n+mr} \quad \bar{B}]$$

となり, (A12) 式が導ける.  $V + WX$  の正則性は,

$$V + WX = (I_m \otimes [0 \ e_1 \ \cdots \ e_{r-1}]) + (I_m \otimes e_r)(I_m \otimes e_1^T)$$

$$= I_m \otimes ([e_r \ e_1 \ \cdots \ e_{r-1}])$$

であることから,  $[e_r \ e_1 \ \cdots \ e_{r-1}]$  の正則性と等価である. また,  $Z_4(s)$  の正則性は,  $I - sV^T$  が対角成分をすべて 1 とする下三角行列であることから明らか.  $\square$