応用力学論文集 Vol. 4, pp.345-356 (2001年8月) 土木学会

陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた微小変形土/水連成有限要素法解析

Finite element method analysis of soil/water coupling problems using implicit elasto - plastic calculation algorithm

矢富盟祥*, 鱸　洋一**
Chikayoshi Yatomi, Yoichi Suzuki

*正会員 Ph. D. 金沢大学教授, 工学部土木建設工学科（〒920-8667 石川県金沢市小立野2−40−20）
**正会員 博士（工学）五大開発株式会社 応用工学研究所（〒921-8051 石川県金沢市黒田1−31）

In this paper, we examine a new method of implicit finite element analysis of soil / water coupling problems. It consists of two main schemes: One scheme is an implicit return mapping scheme and another is a scheme which employs the consistent tangential modulus. The implicit return mapping scheme is based on the notion of the elastic–plastic operator split that consists of the elastic predictor and the plastic corrector. A tangential modulus consisting with the integration algorithm is developed for a well-known Cam-clay model for soils. Some examples of the implicit method show the high accuracy and much reducing the total CPU time.

Key Words: soil/water coupling problem, Cam-clay, return mapping, implicit method, consistent tangential modulus

1. はじめに

近年の目覚しい計算機の小型化, 高速化に伴い, 近い将来, 地盤工学の分野においても現場レベルの設計に対して有限要素法などの数値解析を導入することが可能となり, その必要性・重要性が認識されている. その実用化のためには地盤のモデル化, 数値解析手法の検証, 現地調査からのデータサンプリング技術などの総合的な整備がますます必要不可欠となる. 本論文では軟弱地盤の圧密沈下, 盛土施工の土地盤の設計などに有効である土／水連成数値解析の精度の向上, 計算時間の短縮を目的に新たに陰解法弾塑性計算アルゴリズムを組み込んだ土／水連成有限要素解析手法の開発を行った. なお現在著者らの知る限り, 周知の地盤材料モデルである Cam-clay モデルの場合の Consistent 弾塑性構成テンソルを用いた陰解法有限要素法の解析は, Borja ら[1]が修正 Cam-clay モデルを用いたものを報告しているが, それは土骨格の変形のみを考慮したもので, 土と水が連成している場合の陰解法有限要素法解析の報告は無い.

2. 土／水連成解析の定式化

2.1 支配方程式と境界条件

地盤の変形挙動を考える際, 地盤を土粒子からなる骨格（以下, 土骨格と呼ぶ）（固体）と, その中に含まれている間隙水（液体）, 気泡（気体）の混合体として考えるのが一般的かつ合理的な手法であろう[2]. しかし, 本論文の目的は土質力学で通常用いられている有効応力の原理に従う土／水連成数値解析の精度向上と計算時間の短縮にあるので, 間隙は水で完全飽和であり, 有効応力を仮定する2相混合体として取り扱う. また, その間隙水は非圧縮性であると仮定する.

この簡単化された2相混合体に対する準静的な場合の支配方程式は以下の6つの式で表される.

準静的なつりあい式：

$$div\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0}\ , \tag{1}$$

土骨格部分の弾塑性構成式：

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{C}^{ep}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\ , \tag{2}$$

ひずみ変位関係式：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \boldsymbol{u})^S\ , \tag{3}$$

有効応力の原理：

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - p_w \boldsymbol{1}\ , \tag{4}$$

連続式：

$$tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + div(v_w) = 0\ , \tag{5}$$

間隙水の流動則（ダルシー則）：

$$\boldsymbol{v}_w = -\mathbf{K}_\mathbf{p}\, grad(p_w)\,. \tag{6}$$

ここで$\boldsymbol{\sigma}$は全応力テンソル，$\boldsymbol{\sigma}'$は有効応力テンソル，$\mathbf{C}^{ep}$は弾塑性構成テンソル，p_wは間隙水圧，$\mathbf{1}$はクロネッカーのデルタ，$(\mathbf{1})_{ij} = \delta_{ij}$，$\boldsymbol{v}_w$は間隙水の流束ベクトル（土骨格に対する相対速度)，$\mathbf{K}_\mathbf{p}$は透水係数テンソルであり，上付きのsは（ ）内のテンソルの対称部分であることを表している．また土骨格部分（正確には混合体全体の変形に対する境界条件），間隙水圧（全水頭）に対してそれぞれ境界条件が課されており，土骨格に対する境界条件は

$$\text{Neumann 境界：} \dot{\bar{\boldsymbol{t}}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{n} \quad \text{on } S_\sigma, \tag{7}$$

$$\text{Dirichlet 境界：} \bar{\dot{\boldsymbol{u}}} = \dot{\boldsymbol{u}} \quad \text{on } S_u. \tag{8}$$

である．ここで記号の上の－（バー）は既知量であること表しており，S_σは応力速度既知の境界，S_uは変位速度既知の境界であり，土骨格部分に対する全境界をSとすると

$$S \supset S_\sigma,\quad S \supset S_u,\quad \phi = S_\sigma \cap S_u, \tag{9}$$

である．$\boldsymbol{n}$はS上の単位法線ベクトルである．間隙水圧に対する境界条件は

$$\text{Neumann 境界：} \bar{q} = \boldsymbol{v}_w \cdot \boldsymbol{n} \quad \text{on } S_q, \tag{10}$$

$$\text{Dirichlet 境界：} \bar{h} = h \quad \text{on } S_h. \tag{11}$$

である．qは単位時間あたりの流出入量，hは全水頭を表しており，γ_wを間隙水の単位体積重量，zを位置水頭とすると

$$h = \frac{p_w}{\gamma_w} + z \tag{12}$$

である．S_qは流量既知の境界，S_hは水頭既知の境界である．間隙水圧に対する全境界をSとすると

$$S \supset S_q,\quad S \supset S_h,\quad \phi = S_q \cap S_h, \tag{13}$$

である．

2.2 弱形式化と離散化

以下のような試験関数を定義する．

$$\delta\dot{\boldsymbol{u}} := \{\delta\dot{\boldsymbol{u}} \mid \delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\nabla\delta\dot{\boldsymbol{u}})^s,\ \delta\dot{\boldsymbol{u}} = 0 \text{ on } S_u\}, \tag{14}$$

この試験関数をつりあい式（1）の速度型に掛け合わせGaussの発散定理と変形に対する力の境界条件（7），有効応力の原理（4）を用いるとつりあい式の速度型弱形式が得られる．

$$\int_V (\dot{\boldsymbol{\sigma}}' - \dot{p}_w \boldsymbol{1}) \cdot \delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\, dv - \int_{S_\sigma} \dot{\bar{\boldsymbol{t}}} \cdot \delta\dot{\boldsymbol{u}}\, ds = 0\,. \tag{15}$$

次にもう一方の未知量である間隙水圧に関する試験関数を定義する．

$$\delta p_w := \{\delta p_w \mid \delta p_w = 0 \text{ on } S_h\}\,. \tag{16}$$

連続式（5）に掛け合わせGaussの発散定理と流量既知の境界条件(10)を用いることにより，次のような連続式の弱形式が得られる：

$$\int_V \{tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})\,\delta p_w - \boldsymbol{v}_w \cdot \boldsymbol{grad}(\delta p_w)\}\, dv = -\int_{S_q} \bar{q}\,\delta p_w\, ds. \tag{17}$$

この２つの弱形式を有限要素法定式化するため空間的離散化を行う．節点変位を$\boldsymbol{d}$，節点間隙水圧を$\boldsymbol{h}$とすると

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{u}} &= \boldsymbol{N}\dot{\boldsymbol{d}},\\
\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \nabla\boldsymbol{N}\dot{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{d}},\\
\dot{\boldsymbol{\sigma}}' &= \mathbf{C}^{ep}\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{d}},\\
\dot{p}_w &= \boldsymbol{n}_h{}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{h}},\\
tr(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) &= \boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{d}} = \boldsymbol{b}_v{}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{d}},\\
p_w &= \boldsymbol{n}_h{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h},\\
\boldsymbol{grad}(p_w) &= \boldsymbol{B}_h\boldsymbol{h},\\
\boldsymbol{v}_w &= -\mathbf{K}_\mathbf{p}\,\boldsymbol{B}_h\boldsymbol{h}.
\end{aligned} \tag{18}$$

ここで$\boldsymbol{N}$は変位に対する内挿関数であり，$\boldsymbol{n}_h$は間隙水圧に対する内挿関数である．試験関数に対しても同様の離散化が行えると仮定すると

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\boldsymbol{u}} &= \boldsymbol{N}\delta\dot{\boldsymbol{d}},\\
\delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \boldsymbol{B}\delta\dot{\boldsymbol{d}},\\
\delta p_w &= \boldsymbol{n}_h{}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{h},\\
\boldsymbol{grad}(\delta p_w) &= \boldsymbol{B}_h\delta\boldsymbol{h},
\end{aligned} \tag{19}$$

となる．なおここで空間的離散化を行った（18）式以降，有限要素定式化の慣例に従い，表記は変えていないが応力，ひずみはベクトル化，構成テンソルはマトリクス化されていることに注意する．したがって，上付きのTは転置行列を意味する．(18)，(19)の関係を(15)，(17)に代入し整理すると

$$\mathbf{K}\dot{\boldsymbol{d}} - \mathbf{K}_v{}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{h}} = \dot{\mathbf{F}}^{ext}, \tag{20}$$

$$\mathbf{K}_v\dot{\boldsymbol{d}} - \mathbf{K}_h\boldsymbol{h} = -\mathbf{Q}, \tag{21}$$

が得られる．ここで

$$\mathbf{K} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{ne} \int_{V_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{ep}\boldsymbol{B}\, dv, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_v{}^{\mathrm{T}} &= \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{ne} \int_{V_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{1}\otimes\boldsymbol{n}_h)\, dv\\
&= \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{ne} \int_{V_e} (\boldsymbol{b}_v\otimes\boldsymbol{n}_h)\, dv
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\mathbf{K}_v = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{ne} \int_{V_e} (\boldsymbol{n}_h\otimes\boldsymbol{b}_v)\, dv, \tag{24}$$

$$\mathbf{K}_h = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{ne} \int_{V_e} \boldsymbol{B}_h{}^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_{\mathrm{p}} \boldsymbol{B}_h \, dv , \tag{25}$$

$$\dot{\mathbf{F}}^{ext} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{ne} \int_{S_{\sigma_e}} \boldsymbol{N}^T \bar{\dot{\boldsymbol{t}}} \, ds , \tag{26}$$

$$\mathbf{Q} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{ne} \int_{S_{q_e}} \bar{q} \boldsymbol{n}_h \, ds , \tag{27}$$

であり，Aはassembly operatorと呼ばれ全要素数neの数だけ重ね合わせる事を意味する．

式(20)，(21)の未知量には速度型の物理量と，現在時の物理量が混在しているので時間に関して離散化を行う．時間間隔$[t_n, t_{n+1}]$において物理量ψが線形に変化するとすれば

$$\psi = (1-\theta)\psi_n + \theta\psi_{n+1} , \tag{28}$$

$$\dot{\psi} = (\psi_{n+1} - \psi_n) / \Delta t , \tag{29}$$

と表せる．ここで，下付き添え字n，$n+1$はそれぞれ時刻t_n，t_{n+1}での物理量であることを表しており，

$$\begin{gathered} \Delta t = t_{n+1} - t_n , \\ \theta = (t - t_n) / \Delta t , \\ t_n < t < t_{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 , \end{gathered} \tag{30}$$

である．よって（20），(21) 式を書き直すと

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K}_v{}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{K}_v & \theta \Delta t \mathbf{K}_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta d \\ \Delta h \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F}^{ext} \\ -\Delta t \mathbf{K}_h \boldsymbol{h}_n - \Delta t [(1-\theta)\mathbf{Q}_n + \theta \mathbf{Q}_{n+1}] \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{31}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{d} &= \boldsymbol{d}_{n+1} - \boldsymbol{d}_n , \\ \Delta \boldsymbol{h} &= \boldsymbol{h}_{n+1} - \boldsymbol{h}_n , \end{aligned} \tag{32}$$

である．

2.3 Newton Raphson 法に整合する土/水連成解析の定式化

前節の土／水連成解析定式化は時間間隔$[t_n, t_{n+1}]$において，土骨格部分の弾塑性計算に関しては式（31）左辺の剛性マトリクス内の応力に既知の応力を用いた陽解法近似，間隙水圧の時間的離散化に関しては陰解法近似（$\theta=1$とした時）をしているものが多い．近年，弾塑性計算アルゴリズムに関してElastic-plastic operator splitの概念に基づくGeneral return mapping algorithmsにより，精度良く降伏曲面上にのる応力を求め，全体の非線形連立方程式をNewton Raphson法に整合するようConsistent接線剛性テンソルを用い，求解の過程において誤差が2次収束することが保証された陰解法弾塑性計算アルゴリズムが提案されている[3]．本報告ではその方法を応用し，陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた土／水連成解析を行い，その解析精度，計算時間の検証を行った．

土骨格部分を弾塑性体とする土／水連成有限要素法定式化は最終的には節点における離散化された変位$\boldsymbol{d}$と間隙水圧$\boldsymbol{h}$を未知とする非線形連立方程式に帰着される．その連立方程式を次式のように表す：

$$\mathbf{F}^{ext} - \mathbf{F}^{\mathrm{int}} = \boldsymbol{0} , \tag{33}$$

$$\mathbf{G}^{ext} - \mathbf{G}^{\mathrm{int}} = \boldsymbol{0} . \tag{34}$$

ここで式（33）は混合体のつりあい式(1)（注：速度型つり合い式ではない）の弱形式の離散化による式であり，式（34）は連続式(5)の離散化による式である．上付きextは外力ベクトルを表し，上付きintは内力ベクトルを表す．具体的にそれらを記すと次式のようになる：

$$\mathbf{F}^{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{ne} \int_{V_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} dv , \tag{35}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{G}^{\mathrm{int}}(tr[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}], \boldsymbol{v}_{w.n+1}) \\ &= \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{ne} \int_{V_e} \left[\boldsymbol{n}_h \{ tr[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}] - tr[\boldsymbol{\varepsilon}_n] \} - \Delta t \boldsymbol{B}_h{}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_{w.n+1} \right] dv , \end{aligned} \tag{36}$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^{ext} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{ne} \int_{S_{\sigma e}} \boldsymbol{N}^T \bar{\boldsymbol{t}}_{n+1} \, ds , \tag{37}$$

$$\mathbf{G}_{n+1}^{ext} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{ne} \int_{S_{q_e}} \Delta t \bar{q}_{n+1} \boldsymbol{n}_h \, ds . \tag{38}$$

次に，離散化された式（33），(34) の変位と間隙水圧の非線形連立方程式にNewton Raphson法を適用するためにTaylor展開を行い，節点変位増分$\Delta \boldsymbol{d}_{n+1} = \boldsymbol{d}_{n+1}^{(k+1)} - \boldsymbol{d}_{n+1}^{(k)}$および節点間隙水圧増分$\Delta \boldsymbol{h}_{n+1} = \boldsymbol{h}_{n+1}^{(k+1)} - \boldsymbol{h}_{n+1}^{(k)}$に関する線形近似化を行う．ここで，各物理量の下付添え字nは荷重ステップ数，上付き添え字(k)は各増分ステップ内のイタレーション回数を表している．式（35）を$\Delta \boldsymbol{d}$と$\Delta \boldsymbol{h}$の一次の項までTaylor展開すると：

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}^{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k+1)}) \\ &= \hat{\mathbf{F}}^{\mathrm{int}}(\boldsymbol{d}_{n+1}^{(k+1)}, \boldsymbol{h}_{n+1}^{(k+1)}), \\ &\approx \mathbf{F}^{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}) + \frac{\partial \mathbf{F}^{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)})}{\partial \boldsymbol{d}_{n+1}^{(k)}} \Delta \boldsymbol{d}_{n+1} - \frac{\partial \mathbf{F}^{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)})}{\partial \boldsymbol{h}_{n+1}^{(k)}} \Delta \boldsymbol{h}_{n+1}, \end{aligned} \tag{39}$$

となる．

上式，右辺第2項および第3項は有効応力の原理(4)と，assembly operator Aが線形であることに注意すれば式（35）に微分のchain ruleを用いて以下のようになる：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{F}^{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)})}{\partial \boldsymbol{d}_{n+1}^{(k)}} \Delta \boldsymbol{d}_{n+1} \\ &= \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{ne} \int_{V_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'^{(k)}_{n+1}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'^{(k)}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{d}_{n+1}^{(k)}} dv \, \Delta \boldsymbol{d}_{n+1} , \end{aligned}$$

$$= \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{ne}\left[\int_{V_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{C}}^{ep(k)}_{n+1} \boldsymbol{B} dv\right] \Delta \boldsymbol{d}_{n+1} ,$$

$$= \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{ne} \mathbf{K}^{(k)}_{e\,n+1} \, \Delta \boldsymbol{d}_{n+1} ,$$

$$= \mathbf{K}^{(k)}_{n+1} \, \Delta \boldsymbol{d}_{n+1} . \tag{40}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)}_{n+1})}{\partial \boldsymbol{h}^{(k)}_{n+1}} \Delta \boldsymbol{h}_{n+1}$$

$$= \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{ne} \int_{V_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{(k)}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'^{(k)}_{n+1}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'^{(k)}_{n+1}}{\partial p^{(k)}_{w.n+1}} \otimes \frac{\partial p^{(k)}_{w.n+1}}{\partial \boldsymbol{h}^{(k)}_{n+1}} dv \, \Delta \boldsymbol{h}_{n+1} ,$$

$$= \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{ne}\left[\int_{V_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{1} \otimes \boldsymbol{n}_h) dv\right] \Delta \boldsymbol{h}_{n+1} ,$$

$$= \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{ne}\left[\int_{V_e} (\boldsymbol{b}_v \otimes \boldsymbol{n}_h) dv\right] \Delta \boldsymbol{h}_{n+1} ,$$

$$= \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{ne} \mathbf{K}^{\mathrm{T}}_{v.e} \, \Delta \boldsymbol{h}_{n+1} ,$$

$$= \mathbf{K}^{\mathrm{T}}_{v} \, \Delta \boldsymbol{h}_{n+1} . \tag{41}$$

ここで$\overline{\mathbf{C}}^{ep(k)}_{n+1} = \left[\dfrac{\partial \boldsymbol{\sigma}'^{(k)}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}_{n+1}}\right]$は, 式(33)を Newton Raphson 法で解く場合, それに整合した Consistent 弾塑性構成テンソルであり, 一次元の場合を除き, 一般には式(2)内の (Continuum) 弾塑性構成テンソル$\mathbf{C}^{ep}$とは一致しない.

結局, 式(40), (41)を式(39)に代入すると

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}^{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)}_{n+1}) \\ &\approx \mathbf{F}^{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)}_{n+1}) + \mathbf{K}^{(k)}_{n+1} \, \Delta \boldsymbol{d}_{n+1} - \mathbf{K}^{\mathrm{T}}_{v} \, \Delta \boldsymbol{h}_{n+1} \end{aligned} \tag{42}$$

となる.

同様に式 (36) を Taylor 展開し, 微分の chain rule を用いれば, 式(36)は

$$\begin{aligned} &\mathbf{G}^{\mathrm{int}}(tr[\boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}_{n+1}], \boldsymbol{v}^{(k+1)}_{w.n+1}) \\ &= \hat{\mathbf{G}}^{\mathrm{int}}(\boldsymbol{d}^{(k+1)}_{n+1}, \boldsymbol{h}^{(k+1)}_{n+1}) \\ &\approx \mathbf{G}^{\mathrm{int}}(tr[\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}_{n+1}], \boldsymbol{v}^{(k)}_{w.n+1}) + \mathbf{K}_{v} \, \Delta \boldsymbol{d}_{n+1} + \Delta t \mathbf{K}_{h} \, \Delta \boldsymbol{h}_{n+1} \end{aligned} \tag{43}$$

となる. 第(k)イタレーション終了段階において式(33), (34)に残差力が生じ, 第$(k+1)$イタレーションで残差がゼロとなるように考えると,

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}^{ext} - \{\mathbf{F}^{\mathrm{int}}(\boldsymbol{\sigma}^{(k)}_{n+1}) \\ &\quad + \frac{\partial \mathbf{F}^{\mathrm{int}(k)}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{d}^{(k)}_{n+1}} \Delta \boldsymbol{d}_{n+1} - \frac{\partial \mathbf{F}^{\mathrm{int}(k)}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{h}^{(k)}_{n+1}} \Delta \boldsymbol{h}_{n+1}\} = \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{G}^{ext} - \{\mathbf{G}^{\mathrm{int}(k)}_{n+1} \\ &\quad + \frac{\partial \mathbf{G}^{\mathrm{int}(k)}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{d}^{(k)}_{n+1}} \Delta \boldsymbol{d}_{n+1} + \frac{\partial \mathbf{G}^{\mathrm{int}(k)}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{h}^{(k)}_{n+1}} \Delta \boldsymbol{h}_{n+1}\} = \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{45}$$

となり, 既知な量と未知な量を分離し, マトリクス表示すると

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{F}^{\mathrm{int}(k)}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{d}^{(k)}_{n+1}} & -\dfrac{\partial \mathbf{F}^{\mathrm{int}(k)}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{h}^{(k)}_{n+1}} \\ \dfrac{\partial \mathbf{G}^{\mathrm{int}(k)}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{d}^{(k)}_{n+1}} & \dfrac{\partial \mathbf{G}^{\mathrm{int}(k)}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{h}^{(k)}_{n+1}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \boldsymbol{d}_{n+1} \\ \Delta \boldsymbol{h}_{n+1} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{\mathrm{int}(k)}_{n+1} - \mathbf{F}^{ext}_{n+1} \\ \mathbf{G}^{\mathrm{int}(k)}_{n+1} - \mathbf{G}^{ext}_{n+1} \end{Bmatrix} \tag{46}$$

となる. 以上から上式(46)は離散化された$\boldsymbol{d}$と$\boldsymbol{h}$の非線形連立方程式, 式 (33) と式 (34) を解く Newton Raphson 法に整合していることが分かる.

3. 陰解法弾塑性計算アルゴリズム

3.1 Cam - clay モデル

Cam－clay の降伏関数は以下のように与えられる.

$$f(p, q, p_c) = q + \mathrm{M}\, p \ln\left(\frac{p}{p_c}\right) = 0 \tag{47}$$

ここで平均応力$p = -\frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}')$であり, 一般化偏差応力$q = \sqrt{\frac{3}{2}} \| S \|$, 偏差応力$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma}' - \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}')\boldsymbol{1}$である. 応力の右上のダッシュは有効応力であることを表している. 応力, ひずみ等は引張り正であり, 平均応力, 体積ひずみ等は土質力学の慣例に従い圧縮を正としている. M は限界応力比, p_cは先行圧密応力である. 降伏関数fのp, q, p_cでの微分を求めると:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p} &= \mathrm{M}[1 + \ln(\tfrac{p}{p_c})], \\ \frac{\partial f}{\partial q} &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial p_c} &= -\mathrm{M}\frac{p}{p_c}, \end{aligned} \tag{48}$$

である.

関連流れ則を仮定すると塑性ひずみ速度テンソルは次式で与えられ:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \dot{\phi} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}, \tag{49}$$

ここで$\dot{\phi}$はコンシステンシーパラメータである.

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = -\frac{1}{3}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)\boldsymbol{1} + \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\hat{\boldsymbol{n}}, \tag{50}$$

であり, ここで$\hat{\boldsymbol{n}} = S/\| S \|$である.

また硬化則は

$$\dot{p}_c = \frac{p_c}{\mathrm{M}D} \dot{\varepsilon}^{p}_{v} , \tag{51}$$

で与えられ, Dはダイレイタンシー係数であり, λを圧

縮指数，κ を膨潤指数，e を間隙比とすると

$$D = \frac{\lambda - \kappa}{\mathrm{M}(1+e)}, \tag{52}$$

で与えられる．

応力速度が弾性構成テンソルと弾性ひずみ速度で表せること，流れ則（49），硬化則（51），$\dot{\phi} > 0$ の際の consistency 条件：

$$\dot{f}(\boldsymbol{\sigma}', p_c) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \frac{\partial f}{\partial p_c} \dot{p}_c = 0, \tag{53}$$

を用いることにより

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \left[\mathbf{C} - \frac{\mathbf{C}\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \otimes \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}\mathbf{C}}{\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \cdot \mathbf{C} \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} - \dfrac{p_c}{MD}\dfrac{\partial f}{\partial p_c}\dfrac{\partial f}{\partial p}} \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tag{54}$$

が得られる．ここで $\mathbf{C}$ は弾性構成テンソルであり，Cam-clay モデルの場合

$$\mathbf{C} = \tilde{\mathrm{K}}\boldsymbol{1}\otimes\boldsymbol{1} + 2\tilde{\mathrm{G}}(\boldsymbol{I} - \tfrac{1}{3}\boldsymbol{1}\otimes\boldsymbol{1}), \tag{55}$$

と表される．ここで $\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$ と $\mathbf{I}$ はそれぞれ４階の恒等テンソルであり，$(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$，$(\mathbf{I})_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ である．また係数 $\tilde{\mathrm{K}} = (1+e)p/\kappa$，$\tilde{\mathrm{G}} = 3\tilde{\mathrm{K}}(1-2\nu)/2(1+\nu)$ であり，ν はポアソン比である．

式(48)の関係を代入し，整理することにより（Continuum）弾塑性構成テンソル $\mathbf{C}^{ep}$ を得ることができる：

$$\mathbf{C}^{ep} = 2\tilde{\mathrm{G}}\boldsymbol{I} + c_1(\boldsymbol{1}\otimes\boldsymbol{1}) + c_2(\hat{\boldsymbol{n}}\otimes\boldsymbol{1} + \boldsymbol{1}\otimes\hat{\boldsymbol{n}}) + c_3(\hat{\boldsymbol{n}}\otimes\hat{\boldsymbol{n}}). \tag{56}$$

ここで

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\tilde{\mathrm{K}}}{\chi}\left\{\frac{p}{D}\mathrm{M}[1+\ln(\tfrac{p}{p_c})] + 3\tilde{\mathrm{G}}\right\} - \frac{2}{3}\tilde{\mathrm{G}}, \\ c_2 &= \frac{\tilde{\mathrm{K}}}{\chi}\sqrt{6}\tilde{\mathrm{G}}\mathrm{M}[1+\ln(\tfrac{p}{p_c})], \\ c_3 &= -\frac{6}{\chi}\tilde{\mathrm{G}}^2, \\ \chi &= \tilde{\mathrm{K}}\mathrm{M}^2[1+\ln(\tfrac{p}{p_c})]^2 \\ &\quad + \frac{p}{D}\mathrm{M}[1+\ln(\tfrac{p}{p_c})] + 3\tilde{\mathrm{G}}, \end{aligned} \tag{57}$$

である．

3.2 Trial elastic state

時間間隔 $[t_n, t_{n+1}]$ の増分弾塑性初期値境界値問題を考え，時刻 t_n の時の $\{\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\sigma}'_n, (p_c)_n\}$ が既知であると仮定する．今，与えられた $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ に対して trial elastic state は次式で与えられる：

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} &:= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n, \\ \boldsymbol{\sigma}'^{trial}_{n+1} &:= \boldsymbol{\sigma}'_n + \mathbf{C}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}, \\ (p_c)^{trial}_{n+1} &:= (p_c)_n. \end{aligned} \tag{58}$$

上式より試行平均応力，試行一般化偏差応力，試行偏差応力は

$$\begin{aligned} p^{trial}_{n+1} &= -\tfrac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma}'^{trial}_{n+1}), \\ q^{trial}_{n+1} &= \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\| \boldsymbol{S}^{trial}_{n+1} \|, \\ \boldsymbol{S}^{trial}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}'^{trial}_{n+1} - \tfrac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma}'^{trial}_{n+1})\boldsymbol{1}, \end{aligned} \tag{59}$$

と表される．

負荷除荷判定は，離散化 Kuhn-Tucker 条件により

$$f^{trial}_{n+1} \begin{cases} \le 0 \;\Rightarrow\; \textit{elastic step} \quad \Delta\phi = 0, \\ > 0 \;\Rightarrow\; \textit{plastic step} \quad \Delta\phi > 0. \end{cases} \tag{60}$$

で行われ，ここで

$$f^{trial}_{n+1} = q^{trial}_{n+1} + \mathrm{M}\,p^{trial}_{n+1}\ln\left(\frac{p^{trial}_{n+1}}{(p_c)_n}\right) = 0, \tag{61}$$

である．

3.3 Return mapping algorithm : closest point projection method

(60)の負荷除荷判定において $[t_n, t_{n+1}]$ の現ステップが塑性ステップであると判断された際，単に陽解法近似を行った計算アルゴリズムで増分解析を行うと，一般に求まった応力等が降伏曲面上にないので降伏曲面上に応力を引き戻す必要がある．これを Return mapping algorithms と呼ぶが，Simo らは Algorithmic tangential moduli を用いた General return mapping algorithm を提案している[4]．地盤材料においての Consistent 弾塑性構成テンソルを用いた陰解法有限要素法の解析は，Borja ら[1] が修正 Cam-clay モデルを用いたものを報告している．しかし，彼らの論文では修正 Cam-clay モデルを用いた，土骨格の変形のみを考慮したものに限定されている．そこで本報告では彼らの方法を応用し，Cam-clay モデルを用いた土と水が連成している場合の陰解法有限要素法を提案する．

流れ則(49)，硬化則(51)の有限時間積分により，次式が得られる：

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\phi\,\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}, \tag{62}$$

$$\Delta\varepsilon_v^p = \Delta\phi \frac{\partial f}{\partial p}, \tag{63}$$

$$(p_c)_{n+1} = (p_c)_n \exp\left(\tfrac{\Delta\varepsilon_v^p}{MD}\right), \tag{64}$$

Return mapping 応力 tensor を次式のように表す：

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(k)}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'^{trial}_{n+1} - \mathbf{C}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p . \tag{65}$$

この $\boldsymbol{\sigma}'^{(k)}_{n+1}$ の平均応力部分を考えると

$$p := p^{(k)}_{n+1} = p^{trial}_{n+1} - \widetilde{\mathrm{K}}\Delta\varepsilon_v^p , \tag{66}$$

偏差部分は

$$q := q^{(k)}_{n+1} = q^{trial}_{n+1} - 3\widetilde{\mathrm{G}}\Delta\gamma^p \quad , \tag{67}$$

となる．ここで $q^{trial}_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, \| \boldsymbol{S}^{trial}_{n+1} \|$， $\Delta\gamma^p = \sqrt{\frac{2}{3}}\, \| \Delta\boldsymbol{\gamma}^p \|$， $\Delta\boldsymbol{\gamma}^p = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p + \frac{1}{3}\Delta\varepsilon_v^p \boldsymbol{1}$ である. (66),(67),(64)に(48),(63)の関係を代入すると：

$$p = p^{trial}_{n+1} - \Delta\phi\widetilde{\mathrm{K}}\mathrm{M}[1 + \ln\left(\tfrac{p}{p_c}\right)], \tag{68}$$

$$q = q^{trial}_{n+1} - 3\widetilde{\mathrm{G}}\Delta\phi , \tag{69}$$

$$p_c := (p_c)_{n+1} = (p_c)_n \left(\tfrac{p}{p_c}\right)^{\frac{\Delta\phi}{D}} \exp\left(\tfrac{\Delta\phi}{D}\right) \tag{70}$$

となり，コンシステンシー条件(47)の $f = 0$ とあわせると p， q， p_c， $\Delta\phi$ に関する非線形連立方程式となっていることが分かる.

3.4 Scalar consistency parameter の決定

式(68)，(69)，(70)内のパラメータ $\Delta\phi$ は consistency 要求(47)を満たすように決定されなければならない．この根 $\Delta\phi$ はスカラー関数 f に Newton Raphson 法を適用することにより求めることができるが，その際の初期値としては $p = p^{trial}_{n+1}$， $q = q^{trial}_{n+1}$， $p_c = (p_c)_n$， $\Delta\phi = 0$ を用いる.

f の $\Delta\phi$ による偏微分 f' は，chain rule を用いると

$$f'(\Delta\phi) = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial(\Delta\phi)} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial(\Delta\phi)} + \frac{\partial f}{\partial p_c}\frac{\partial p_c}{\partial(\Delta\phi)}, \tag{71}$$

となる．ここで $\partial f/\partial p$， $\partial f/\partial q$， $\partial f/\partial p_c$ は式 (48) で与えられている．また式 (68)， (69)， (70) を微分し，陰的に解くことにより

$$\frac{\partial p}{\partial(\Delta\phi)} = -\frac{\widetilde{\mathrm{K}}\mathrm{M}D[1 + \ln(\frac{p}{p_c})]}{D + \widetilde{\mathrm{K}}\mathrm{M}\Delta\phi/p + \Delta\phi}, \tag{72}$$

$$\frac{\partial q}{\partial(\Delta\phi)} = -3\widetilde{\mathrm{G}} , \tag{73}$$

1．初期化 $k = 0$， $\Delta\phi^{(k)} = 0$.

2．$f^{(k)} = f(\Delta\phi^{(k)})$ の計算.

2.1. 初期化 $j = 0$， $p^{(j)} = p^{trial}_{n+1}$.

2.2 $g^{(j)} = g(p^{(j)})$ の計算.

2.3 if $| g^{(j)} | < g_{tol}$, goto 2.6 ; else,

2.4 $p^{(j+1)} = p^{(j)} - \dfrac{g^{(j)}}{g'(p^{(j)})}$.

2.5 $j \leftarrow j+1$， goto 2.2.

2.6 $f^{(k)} = f(\Delta\phi^{(k)}, p^{(k)}, q^{(k)}, p_c^{(k)})$ を計算し，return.

3．if $| f^{(k)} | < f_{tol}$, exit ; else,

4．$\Delta\phi^{(k+1)} = \Delta\phi^{(k)} - \dfrac{f^{(k)}}{f'(\Delta\phi^{(k)})}$.

5．$k \leftarrow k+1$， goto 2.

図－1　$f = 0$， $g = 0$ とする根 p， q， p_c， $\Delta\phi$ を求める Newton Raphson algorithm.

$$\frac{\partial p_c}{\partial(\Delta\phi)} = -\frac{p_c[1 + \ln(\frac{p}{p_c})]}{D + \widetilde{\mathrm{K}}\mathrm{M}\Delta\phi/p + \Delta\phi} \quad , \tag{74}$$

となる．ここで，変数 p， p_c は式 (68)， (70) と連成しているため，関数 $f(\Delta\phi^{(k)})$ は陽には求まらない．そこで p と p_c は反復的に解く.

式 (70) を変形し，再表記すると

$$p_c = [(p_c)_n\, p^{\frac{\Delta\phi^{(k)}}{D}} \exp(\tfrac{\Delta\phi^{(k)}}{D})]^{\frac{D}{D+\Delta\phi^{(k)}}} , \tag{75}$$

となり，これを式 (68) に代入することにより次式を得る：

$$g(p) := p^{trial}_{n+1} + \Delta\phi^{(k)}\widetilde{\mathrm{K}}M\tfrac{D}{D+\Delta\phi^{(k)}}\left[\ln(p_c)_n - (1 + \ln p)\right] - p = 0 , \tag{76}$$

この式の根 $p = p^{(k)}_{n+1}$ は，Newton Raphson 法を用いることにより，反復的に求められる．g の p による偏微分 g' は

$$g'(p) = -(1 + \Delta\phi^{(k)}\widetilde{\mathrm{K}}\mathrm{M}\tfrac{D}{D+\Delta\phi^{(k)}}\tfrac{1}{p}) \tag{77}$$

である.

この p, q, p_c, $\Delta\phi$ を求める２重の Newton Raphson 法のアルゴリズムを図－１に示す.

3.5 Consistent 弾塑性構成テンソル

ひずみテンソル増分 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}-\boldsymbol{\varepsilon}_n$ を考慮した増分応答関数は次式のように表される：

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\prime(k)}=\tfrac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\prime(k)})\boldsymbol{1}+\|\,S_{n+1}^{(k)}\,\|\,\hat{\boldsymbol{n}}=-p\,\boldsymbol{1}+\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,q\,\hat{\boldsymbol{n}}\,. \quad (78)$$

Consistent 弾塑性構成テンソルは，式 (78) の直接的な偏微分により次式のように得られる：

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{C}}^{ep}{}_{n+1}^{(k)}&=\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\prime(k)}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}\\&=-\boldsymbol{1}\otimes\frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}+\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,q\frac{\partial\hat{\boldsymbol{n}}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}+\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\hat{\boldsymbol{n}}\otimes\frac{\partial q}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}\,.\end{aligned} \quad (79)$$

ここで $\dfrac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\prime(k)}}{\partial p}=-\boldsymbol{1}$, $\dfrac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\prime(k)}}{\partial\hat{\boldsymbol{n}}}=\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,q\,\boldsymbol{I}$, $\dfrac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\prime(k)}}{\partial q}=\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\hat{\boldsymbol{n}}$ を用いた.

式 (79) 内の各偏微分量は式 (68)，(70) を用いて陰的に得ることができる. p の $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ による微分は：

$$\frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}=a_1\boldsymbol{1}+a_2\frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}\ , \quad (80)$$

となり，ここで

$$\begin{aligned}a_1&=-\widetilde{\mathrm{K}}p(D+\Delta\phi)/a\,,\\a_2&=-\widetilde{\mathrm{K}}\mathrm{M}Dp[1+\ln(\tfrac{p}{p_c})]/a\,,\\a&=Dp+\Delta\phi(p+\widetilde{\mathrm{K}}\mathrm{M}D)\,,\end{aligned} \quad (81)$$

である．また p_c の $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ による微分は：

$$\frac{\partial p_c}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}=a_3\boldsymbol{1}+a_4\frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}\ , \quad (82)$$

となり，ここで

$$\begin{aligned}a_3&=-\widetilde{\mathrm{K}}p_c\Delta\phi/a\,,\\a_4&=p_c p[1+\ln(\tfrac{p}{p_c})]/a\,,\end{aligned} \quad (83)$$

である． q の $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ による微分は：

$$\frac{\partial q}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}=\sqrt{6}\widetilde{\mathrm{G}}\hat{\boldsymbol{n}}-3\widetilde{\mathrm{G}}\frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}\ , \quad (84)$$

となる．次に consistenscy の要求を課すことにより $\partial(\Delta\phi)/\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ を得ることができる．すなわち $f=f(\Delta\phi(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}))$ を $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ で偏微分した結果：

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}=\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}+\frac{\partial f}{\partial p_c}\frac{\partial p_c}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}\equiv 0\,, \quad (85)$$

に式 (80)，(82)，(84) を代入することにより

$$\frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}=b_1\boldsymbol{1}+b_2\hat{\boldsymbol{n}}\ , \quad (86)$$

を得る．ここで

$$\begin{aligned}b_1&=\mathrm{M}\{a_3\tfrac{p}{p_c}-a_1[1+\ln(\tfrac{p}{p_c})]\}/b\ ,\\b_2&=-\sqrt{6}\widetilde{\mathrm{G}}/b\ ,\\b&=-\mathrm{M}\{a_4\tfrac{p}{p_c}-a_2[1+\ln(\tfrac{p}{p_c})]\}-3\widetilde{\mathrm{G}}\ ,\end{aligned} \quad (87)$$

である.

式 (86) を (80)，(82)，(84) に代入することによって次の関係式を得る：

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}&=a_1\boldsymbol{1}+a_2(b_1\boldsymbol{1}+b_2\hat{\boldsymbol{n}})\ ,\\&=(a_1+a_2b_1)\boldsymbol{1}+a_2b_2\hat{\boldsymbol{n}}\ .\\\frac{\partial q}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}&=\sqrt{6}\widetilde{\mathrm{G}}\hat{\boldsymbol{n}}-3\widetilde{\mathrm{G}}(b_1\boldsymbol{1}+b_2\hat{\boldsymbol{n}})\ ,\\&=-3\widetilde{\mathrm{G}}b_1\boldsymbol{1}+\widetilde{\mathrm{G}}(\sqrt{6}-3b_2)\hat{\boldsymbol{n}}\ .\\\frac{\partial p_c}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}&=a_3\boldsymbol{1}+a_4(b_1\boldsymbol{1}+b_2\hat{\boldsymbol{n}})\ ,\\&=(a_3+a_4b_1)\boldsymbol{1}+a_4b_2\hat{\boldsymbol{n}}\ .\end{aligned} \quad (88)$$

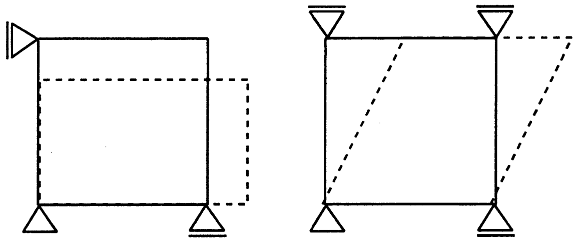
$\hat{\boldsymbol{n}}$ の $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ での偏微分：

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{n}}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}=\frac{2\widetilde{\mathrm{G}}}{\|\,S_{n+1}^{trial}\,\|}(\boldsymbol{I}-\tfrac{1}{3}\boldsymbol{1}\otimes\boldsymbol{1}\ -\hat{\boldsymbol{n}}\otimes\hat{\boldsymbol{n}})\,. \quad (89)$$

と式 (88) の関係を (79) に代入することにより次式の Consistent 弾塑性構成テンソルを得る.

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{C}}^{ep}{}_{n+1}^{(k)}&=2\widetilde{\mathrm{G}}\xi\boldsymbol{I}-(a_1+a_2b_1+\tfrac{2}{3}\widetilde{\mathrm{G}}\xi)(\boldsymbol{1}\otimes\boldsymbol{1})\\&\quad-a_2b_2(\boldsymbol{1}\otimes\hat{\boldsymbol{n}})\\&\quad-\sqrt{6}\widetilde{\mathrm{G}}b_1(\hat{\boldsymbol{n}}\otimes\boldsymbol{1})\\&\quad+\widetilde{\mathrm{G}}(2-\sqrt{6}b_2-2\xi)(\hat{\boldsymbol{n}}\otimes\hat{\boldsymbol{n}})\,,\end{aligned} \quad (90)$$

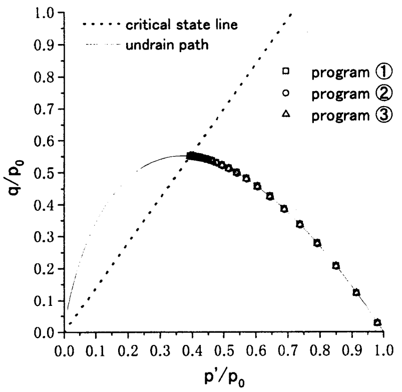
ここで $\xi=\sqrt{\tfrac{2}{3}}q/\|\,S_{n+1}^{trial}\,\|=\|\,S_{n+1}^{(k)}\,\|/\|\,S_{n+1}^{trial}\,\|$ である．式 (90) の Consistent 弾塑性構成テンソルは，式 (33)，(34) を Newton Raphson 法を行って解く場合に整合したものであり，したがって２次収束を保証している．ここで $\Delta\phi\to 0$ とすると $\overline{\mathbf{C}}^{ep}{}_{n+1}^{(k)}$ は式(56)の (Continuum) 弾塑性構成テンソル $\mathbf{C}^{ep}$ に一致する.



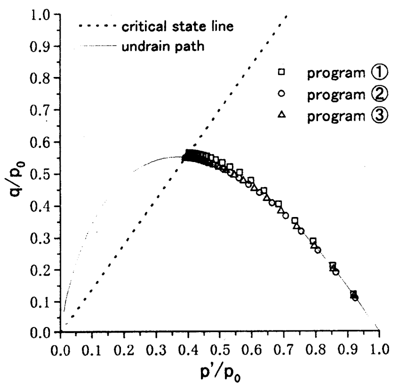
図－２ 等体積圧縮試験と純粋せん断試験.

表－１ 解析に用いた土質定数

圧縮指数 λ	0.15
膨潤指数 κ	0.01
ポアソン比 ν	0.3
間隙比 e_0	0.1
限界応力比 M	1.4
透水係数 k	0.0（非排水）



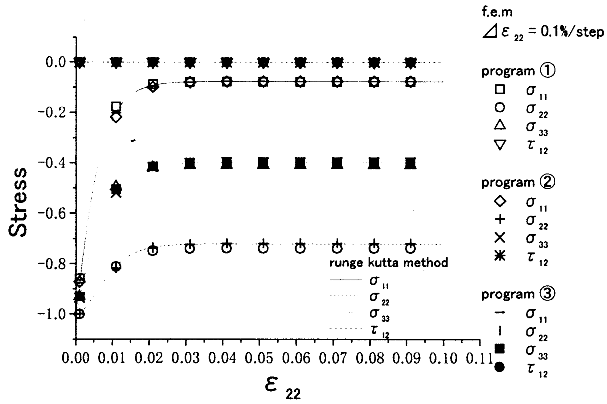
図－３ 等体積圧縮試験における平均応力と一般化せん断応力：軸ひずみ増分 $\Delta\varepsilon_{22}=0.01\%/step$.



図－４ 等体積圧縮試験における平均応力と一般化せん断応力：軸ひずみ増分 $\Delta\varepsilon_{22}=0.1\%/step$.

4. 陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた土／水連成解析の精度検証

本章では提案する陰解法弾塑性計算土／水連成解析の精度および計算時間短縮が可能であることを検証する.



図－５ 等体積圧縮試験における各応力成分：軸ひずみ増分 $\Delta\varepsilon_{22}=0.1\%/step$.

表－２ 軸ひずみ１％時の Runge-Kutta 法に対する差.

軸ひずみ１％	σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}
プログラム①	−10.1%	+0.4%	+1.9%
プログラム②	+9.5%	+1.3%	+3.0%
プログラム③	+1.1%	+0.05%	+0.3%

表－３ 軸ひずみ 10%時の Runge-Kutta 法に対する差.

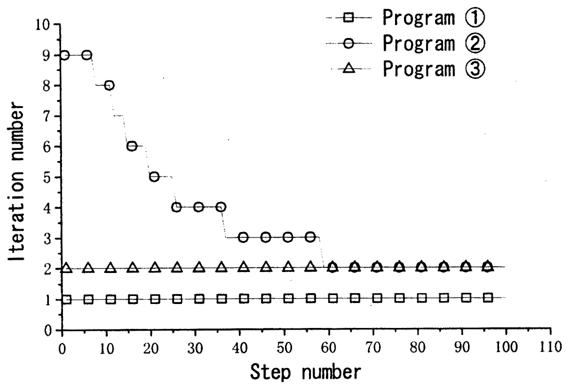
軸ひずみ 10%	σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}
プログラム①	+2.6%	+2.6%	+2.6%
プログラム②	−0.2%	−0.2%	−0.2%
プログラム③	−0.2%	−0.2%	−0.2%

比較に用いたプログラムは３つであり，Program①は式(31)を用いて単に増分近似を行った陽解法プログラムであり，Program②，③は本論文で提案する陰解法プログラムである．ただし Program②は弾塑性構成テンソルに式(56)の Continuum 弾塑性構成テンソルを用いており，Program③は式(90)の Consistent 弾塑性構成テンソルを用いたものである.

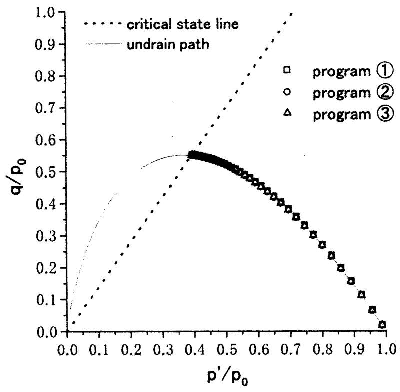
4.1 等体積圧縮試験解析と純粋せん断試験解析（均一変形）

対象とした問題は図－２に示す等体積圧縮試験と純粋せん断試験である．それぞれ軸ひずみ，せん断ひずみが 10%となるまで変位制御で載荷を行った. 用いた要素は８節点四辺形要素で変位は８節点で代表させ，間隙水圧は四辺形の頂点である４節点で代表させており，均一変形であるので１要素で行った．用いた土質定数は表－１に示す．残差は式（46）右辺の残差力ベクトルの２乗ノルムとし，その許容値は 1.0×10^{-20} とした.

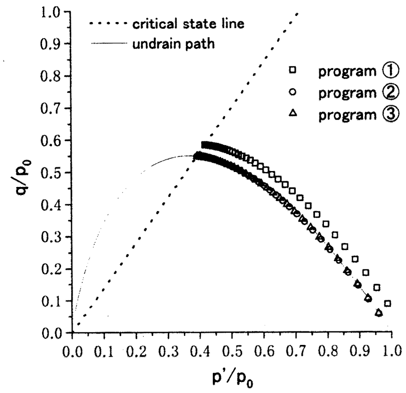
図－３，図－４は等体積圧縮試験における平均応力と一般化偏差ひずみの関係の図である. 図－３は軸ひずみ増分を各ステップにおいて 0.01%とした場合で，図－４は 0.1%とした場合である. 図中の曲線は非排水パスである. 図－３のように各ステップにおける軸ひずみを 0.01%と比較的細かくした場合は，プログラム①～③のどの手法においても非排水パスと一致しており，平均応力と一般化



図－6　等体積圧縮試験における各ステップの繰り返し数：軸ひずみ増分 $\Delta\varepsilon_{22} = 0.1\% / step$.



図－7　純粋せん断試験における平均応力と一般化せん断応力：せん断ひずみ増分 $\Delta\gamma_{12} = 0.01\% / step$.

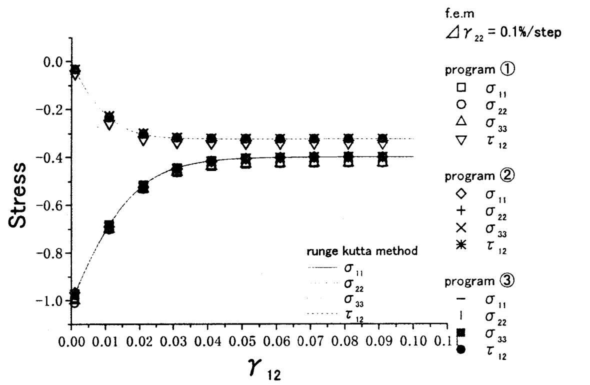


図－8　純粋せん断試験における平均応力と一般化せん断応力：せん断ひずみ増分 $\Delta\gamma_{12} = 0.1\% / step$.

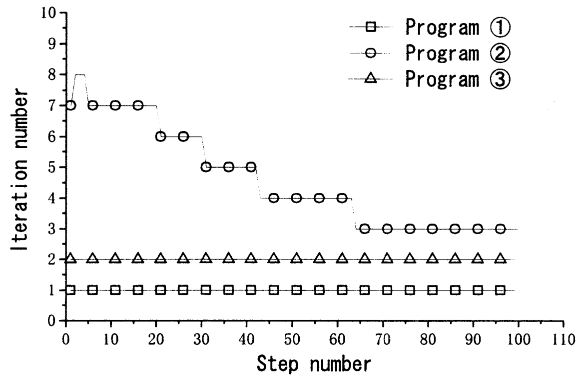
偏差ひずみの関係という意味においては精度よく解析できていることが分かる．図－4は各ステップの軸ひずみ増分量を10倍ほど粗くした場合である．プログラム②と③は軸ひずみ増分量を10倍粗くしても解析結果は非排水パスと良く一致しているが，プログラム①の結果は軸ひずみが増えるにつれて非排水パスの上側に明らかに離れていっていることが分かる．この最終的に必要な境界条件まで何ステップで解析するかは解析者の主観・判断に依存するものであるが，この例ではプログラム①のように単に増分解析を行うよりもプログラム②と③のように本論文で提案するような implicit return mapping を用いる方が精度を落とすことなく比較的粗い増分刻みを選ぶことが可能であることが分かる．図－5は等体積圧縮試験における軸ひずみに対する各応力成分の変化である．横軸は軸ひずみ量であり，縦軸は各応力成分である．図中曲線は Runge-Kutta 法を用いて求めた各応力成分の変化であり，記号は各プログラムにより解析された値である．この Runge-Kutta 法は増分量に対する打ち切り誤差が5次精度であることが保証されている方法であり，均一変形の問題を解く上では非常に精度が良い．図－4のような平均応力と一般化偏差ひずみの関係だけでなく，各応力成分においてもプログラム②と③の方法は精度が良いことが示されている．表－2，表－3にそれぞれのプログラムで求めた各応力成分の Runge-Kutta 法に対する差を示した．表－2は軸ひずみが1%の時であり，表－3は軸ひずみが10%の時である．表－1より分かるようにせん断初期（軸ひずみが1%）においてはプログラム①と②は同程度の差であったが，プログラム③は約10分の1程度の差であった．表－3はある程度応力が一定値に達した軸ひずみが10%の時の差であり，プログラム①では誤差が残っているが，プログラム②では誤差が小さくなり修正されていることが分かる．これは implicit return mapping を行っている効果であると考えられる．注目すべきは implicit return mapping と Consistent 弾塑性構成テンソルを併用したプログラム③では応力の変化が大きいせん断初期においても，限界応力比に近く応力がほぼ一定値に到達したせん断終了時においても非常に精度が高いことが分かる．

図－6は各ステップにおける軸ひずみ増分を 0.1%とした場合の，残差力が許容誤差内に収まるまでの収束にかかる繰り返し回数（イタレーション回数）である．有限要素法の場合，解析途中におけるリメッシュ（最適化などによる再メッシュ）がなければ未知数の数は変化せず，1回のイタレーションにかかる時間はほぼ一定となる．よってこのイタレーション回数が計算時間に結びつくことになる．図中□はプログラム①，○は②，△は③のイタレーション回数である．プログラム①においては残差力を減じる収束計算を行っていないために各ステップにおいてイタレーション回数は1回で済み，最も計算時間は短い．しかし，前述したように精度の面では好ましくないので，その選択には注意が必要である．プログラム②とプログラム③の結果を見てみると，プログラム②においてはせん断初期において9回ほどのイタレーション回数が必要であり，せん断が進むにつれてその回数は減少しており，総じて370回のイタレーション回数となった．プログラム③においてはせん断初期から終了までイタレーション回数は各ステップで2回でよく，総じて200回のイタレーション回数となりプログラム①の約2倍，プログラム②の約半分となった．

図－7，図－8は純粋せん断試験を行った際の平均応力と一般化せん断応力の関係である．図－7はせん断ひずみ



図－9 純粋せん断試験における各応力成分：せん断ひずみ増分 $\Delta\gamma_{12}=0.1\%/step$.



図－10 純粋せん断試験における各ステップの繰り返し数：軸ひずみ増分 $\Delta\gamma_{12}=0.1\%/step$.

表－4 せん断ひずみ１%時のRunge-Kutta 法に対する差.

せん断ひずみ１%	σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}	τ_{12}
プログラム①	+2.4%	+2.6%	+2.5%	+11.0%
プログラム②	+0.9%	+1.2%	+1.0%	−2.0%
プログラム③	−0.2%	+0.02%	−0.1%	+0.1%

表－5 せん断ひずみ10%時のRunge-Kutta 法に対する差.

せん断ひずみ10%	σ_{11}	σ_{22}	σ_{33}	τ_{12}
プログラム①	+6.2%	+6.3%	−5.9%	−5.9%
プログラム②	−0.1%	−0.1%	−0.1%	−0.1%
プログラム③	−0.1%	−0.1%	−0.1%	−0.1%

増分が各ステップにおいて0.01%とした場合であり，図－8は0.1%とした場合である．どちらも最終的なせん断ひずみは10%まで変形させた．図－７のように比較的増分刻みを細かくするとプログラム①，②，③の結果はどれもほぼ一致し，非排水パスとも良く一致している．しかし，図－8のように増分刻みを若干粗くするとプログラム②，③では非排水パスと良く一致しているが，プログラム①ではせん断初期から非排水パスの上側に離れていることが示されている．これよりせん断初期で発生した誤差がそのまま残存し，以降修正されていないことが分かる．プログラム①のようなreturn mappingなどの修正を行わない解析においては，特にひずみに対して応力の変化の大きくなるせん断初期には増分刻みを小さくする注意が必要である．

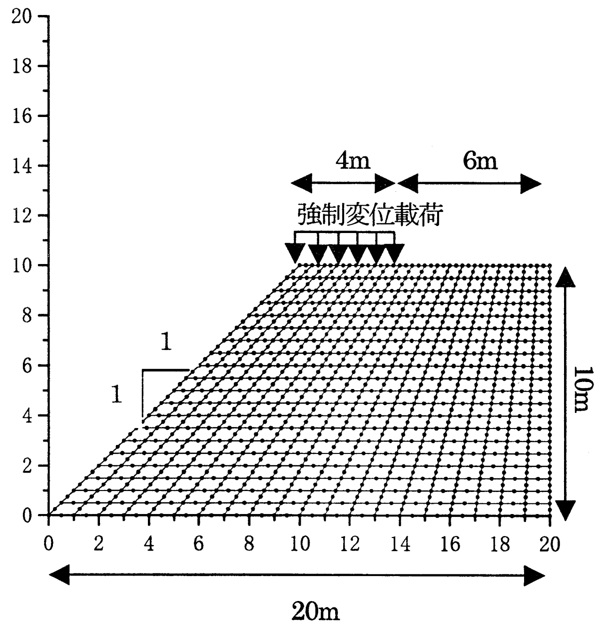
図－9は純粋せん断試験におけるせん断ひずみに対する各応力成分の変化である．図中各曲線がRunge-Kutta法による解であるが，プログラム②，③の各応力成分は良く一致しているが，プログラム①の各応力成分はどの成分もRunge-Kutta 法の解に対して大きな差がある．表－4，表－5にせん断ひずみが1%と10%の時のRunge-Kutta法による解に対する各応力成分の差を示した．表－4よりせん断初期（せん断ひずみが1%）においてはプログラム①では差があり，特にせん断応力に大きな差がある．implicit return mappingを行っているプログラム②では1%～2%の差があり，さらにConsistent 弾塑性構成テンソルを併用しているプログラム③ではその差は0.1%前後と非常に小さいことが分かる．表－5にはせん断終了時（せん断ひずみが10%）のRunge-Kutta 法に対する差が示してあるが，プログラム①では各応力成分において約6%の差であるのに対して，プログラム②と③では0.1%と非常に小さく精度が良いことが分かる．

図－10は各ステップにおけるせん断ひずみ増分を0.1%とした場合の，残差力が許容誤差内に収まるまでの収束にかかる繰り返し回数（イタレーション回数）である．図中□がプログラム①，○が②，△が③のイタレーション回数である．プログラム①は等体積せん断試験解析の時も述べたが，各ステップでイタレーション回数は１回で良く，最も短時間で解析を終了できるが，精度に関しては注意が必要である．プログラム②では全ステップでのイタレーション回数を総計すると458回となり，プログラム③では200回となった．

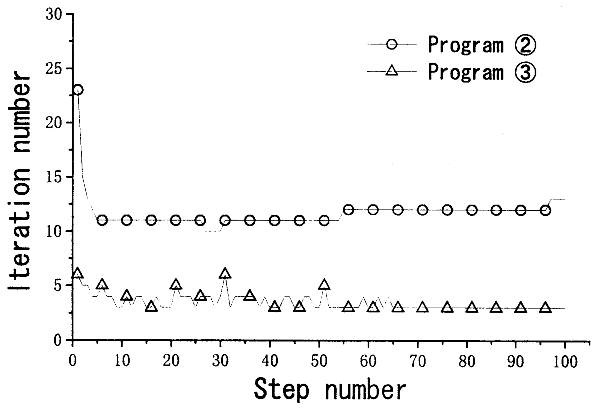
以上より速度型つり合い式と連続式を弱形式化し，離散化する事によって単に陽解法増分解析を行った場合は，解析者の判断に委ねられる増分刻み数の取り方によっては著しく誤差を含むことがあることを例としてあげ，本論文で用いたimplicit return mapping 手法は，増分刻みを比較的粗くしても精度を落とすことがなく，またConsistent弾塑性構成テンソルを併用することにより短時間でより精度良く解析できることが分かった．

4.2 斜面変形解析（不均一変形）

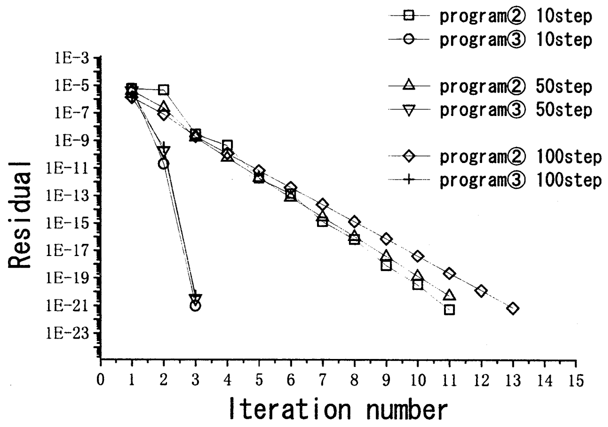
前節においてRunge-Kutta 法を用いて精度良く各応力成分を解析できる均一変形である等体積圧縮試験と純粋せん断試験を対象として取り上げ，本論文で提案する陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた土／水連成解析の有



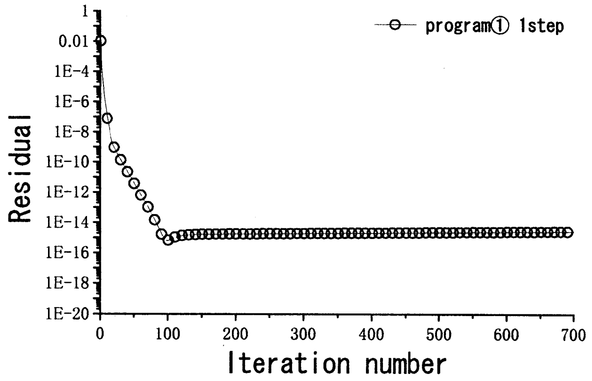
図－11 斜面解析有限要素モデル.



図－12 斜面変形解析における各ステップの繰り返し数.



図－13 斜面変形解析における代表ステップの残差の収束状況.



図－14 program①の 1step 目における残差の収束状況.

用性を述べた．本節においては特に Consistent 弾塑性構成テンソルを用いることの有用性を明らかにするため，不均一変形である斜面変形解析を行う．比較に用いたプログラムは前節で用いた②と③と同様のものであり，両プログラムとも implicit return mapping を用いているが，違いは構成マトリクスにあり，プログラム②では式 (56) で示した Continuum 弾塑性構成テンソルを用いており，プログラム③では式 (90) で示した Consistent 弾塑性構成テンソルを用いていることである．用いた有限要素モデルは図－11 に示したものである．

有限要素は前節と同様の８節点四辺形要素で，変位は８節点，間隙水圧は頂点の４節点で代表させており，全要素数は 400 要素である．強制変位は盛土上面の法肩から 4m までの範囲に，最終的に 0.1m 沈下させるように載荷した．初期先行圧密応力は 3.0 [kPa] とし，初期間隙水圧は静水圧分布とした．解析に用いた土質定数は表－１と同様である．しかし透水係数は$\kappa = 2.22 \times 10^{-6} [m/\min]$とし，物体の境界では非排水であるが，物体の内部では自由に間隙水が移動できるものとした．解析は 0.1m 沈下までを全 100 ステップで行い，したがって各ステップの強制変位増分は 1mm である（$\Delta \bar{u} = 4.8m \times 10^{-4} [m/\min]$）．残差は前節と同様で式 (46) 右辺の残差力ベクトルの２乗ノルムとし，その許容値は1.0×10^{-20} とした．

図－12 は各ステップにおける残差が許容誤差に収まるまでに要する繰り返し回数（イタレーション回数）を表したものであり，横軸がステップ数，縦軸がイタレーション回数である．図中，○がプログラム②，△が③のイタレーション回数である．明らかにプログラム③の方が解析全体を通して少ない回数で収束していることが分かる．プログラム②は解析全体で 1165 回（1 ステップ平均約 12 回）であり，プログラム③では 344 回（1 ステップ平均約 4 回）であった．すなわち Consistent 弾塑性構成テンソルを用いることにより約 1/3 の時間で解析が終了することになる．ちなみに当研究室で DOS/V パソコン（CPU クロック数：1GHz，メモリ：512MB）を用いて数値実験を行ったところ，解析開始から解析終了までプログラム②では約 97 時間，プログラム③では約 29 時間であった．

図－13 は代表的なステップにおける残差の収束状況を

表したものである．図中に代表として示したのは 10, 50, 100 ステップであり，プログラム②ではそれぞれ□，△，◇で示され，プログラム③ではそれぞれ○，▽，＋で示してある．横軸はイタレーション回数，縦軸は残差の対数であるが，どのステップにおいてもプログラム②では直線的に減少するが，プログラム③では上に凸な放物線的に減少している．このことより Consistent 弾塑性構成テンソルは全体の Newton Raphson 法に整合しており，２次収束することが確かめられた．なお，陽解法のプログラム①の場合，繰り返し計算を行ったところ，図－14 のように解析初期の１ステップ目でイタレーション回数が 100 回程度までは，1.0×10^{-16} 程度まで残差は減少を続けているが 1.0×10^{-15} 程度でほぼ横ばいとなった．正確には残差は微量ながら増加しており，以後，解析を続行してみたが残差の許容値1.0×10^{-20} には到達しなかった．このような多要素の問題では，残差の許容値1.0×10^{-20} はかなり厳しい条件であるにも関わらず，陰解法の場合は必ず収束し，陽解法の場合は収束しないことが分かった．数学的には陰解法はアルゴリズム解の無条件安定性が保証されているが，陽解法ではその保証が無いことの例証である[3)]．

5. まとめ

本論文では陰解法弾塑性計算アルゴリズムを取り入れ，離散化された全体の非線形連立剛性方程式を Newton Raphson 法に整合させた土／水連成解析法を開発した．これを従来から用いられている単純な陽解法（但し連続式は陰解法）定式化による解析法と比較すると以下の点が明らかになった．

1．均一変形で精度良く解析できる Runge-Kutta 法と比較することにより，従来の速度型つり合い式と連続式を弱形式化し離散化した陽解法増分解析手法では，解析者の判断による増分刻みの取り方により著しく精度が落ちる．一方，return mapping 手法を用いた本論文で提案した陰解法によると増分刻みを比較的粗くしても精度良く解析できることが分かった．

2．return mapping 手法に併用して Consistent 弾塑性構成テンソルを用いると計算時間の短縮だけでなく，さらに精度が向上することが分かった．

3．本報告の例での不均一変形で多要素解析の場合 Consistent 弾塑性構成テンソルを用いるか否かで３倍ほど計算時間に差ができる事が分かった．具体的には本解析の場合，計算時間の差は当研究室の数値実験では Consistent 弾塑性構成テンソルを用いることにより，約４日が約１日に短縮できた

4．Consistent 弾塑性構成テンソルを用いると全体の Newton Raphson 法に整合しているため，その残差が２次収束することが証明出来る．本数値解析においてもそれが例証できた．

なお，今回は紙面の都合で割愛したが，陽解法の場合にも応力が降伏関数にのるよう種々の return mapping 手法が考えられる．著者らもいくつか試みたが，収束の安定性，収束の早さ，計算時間いずれにおいても本報告で提案した陰解法の方が優れていた．

参考文献

1) R. I. Borja and S. R. Lee : Cam–Clay plasticity, Part I : Implicit integration of elasto–plastic constitutive relations, Compt. Methods Appl. Mech. Engrg. 78(1), pp.49-72, 1990.
2) 土木学会海岸工学委員会研究現況レビュー小委員会：海底地盤の力学挙動，海岸波動，pp.457-459，1994.
3) 例えば J. C. Simo, T.J.R.Hughes : Computational Inelasticity, Springer–Verlag New York,1998.
4) J. C. Simo, J. G. Kennedy and S. Govindjee : Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/ unloading conditions and numerical algorithms, Internat. J. Numer. Methods Engrg 26, pp.2161-2185, 1988.

（2001 年４月 20 日　受付）