

# き裂先端付近に介在物あるいは空隙がある場合の E積分によるエネルギー解放率の解析

ENERGY RELEASE RATE ANALYSIS BY THE E-INTEGRAL FOR A CRACK  
INTERACTING WITH AN INCLUSION OR A VOID

橋本堅一\*・矢富盟祥\*\*・石田 啓\*\*\*

Ken-ichi HASHIMOTO, Chikayoshi YATOMI and Hajime ISHIDA

\*正会員 徳山工業高等専門学校校助教授 土木建築工学科 (〒745 徳山市久米高城3538)

\*\*正会員 Ph.D. 金沢大学助教授 工学部土木建設工学科 (〒920 金沢市小立野二丁目40-20)

\*\*\*正会員 工博 金沢大学教授 工学部土木建設工学科 (〒920 金沢市小立野二丁目40-20)

We investigate the energy release rate of a crack interacting with an inclusion or a void using the finite element method. The energy release rate is calculated by using the E-integral, which is path independent even for a crack interacting with inclusions or voids. We examine the energy release rates for several different positions of an inclusion or a void and also for different Young's modulus of the inclusion.

**Key Words :** E-integral, energy release rate, inclusion, void, crack kinking

## 1. はじめに

土木構造物の耐久性に関与するひび割れ状態、岩石やコンクリートなどの岩質材料内の破壊き裂の進展状況、さらには近年注目を集めている複合材料内のき裂の進展特性は、複雑なジグザグ性を有し、材料特性をはじめとした多くの因子がき裂の進展に影響を及ぼす。例えば、鉄筋コンクリートであればコンクリート中の骨材、鉄筋、コンクリート打設時に生じた空隙、骨材とコンクリートの界面などが破壊き裂の発生、進展に関わってくる。また岩石の中で頻繁に研究対象となる花崗岩では弾性係数などの材料特性の大きな違いをもつ石英や長石などのそれぞれの鉱物粒子の他、潜在き裂、鉱物粒子間の界面がき裂の進展に大きな影響を及ぼす<sup>1)2)</sup>。これらの挙動を微視的な立場から議論することは重要で、空隙の干渉に限っても、き裂近傍に存在するその位置によってき裂進展を助長するような干渉をしたり、逆にき裂の進展を妨げるような効果を与えることもある。この空隙の干渉は、破壊の制御にも応用されている。

複合材料におけるき裂と介在物との干渉に関しては、多くの解析結果が報告されている<sup>3)~5)</sup>。これは比較的新しい材料である複合材料においては破壊靱性を評価することが非常に重要となり、破壊靱性はき裂周りの介在物によって大きく変化するためである。介在物についても、その弾性係数の大小、寸法、形状、位置によって空隙と同様、き裂の進展を助長することもあるし、妨げることもある。

き裂の不安定進展開始と進展方向に関する破壊条件を扱うパラメータは、代表的なものとして応力拡大係

数とエネルギー解放率が挙げられる。これまでのき裂と介在物の干渉に関する報告の多くは Muskhelishvili の方法<sup>6)</sup>を用い、応力拡大係数を求めて検討しているものが多い。この方法によれば、信頼性のある値は得られるが、対象となるモデルが比較的単純な場合に限られてくる。一方、有限要素法などの数値解析を用いて直接応力拡大係数を求めようとする場合、き裂先端近傍のいくつかの点(物体点)の変位、あるいは応力を求めて、き裂先端に外挿する変位法や応力法が用いられる。しかし、き裂先端付近に介在物あるいは空隙を有すると、ベースとなる材料(複合材料においてはマトリックス相と呼ばれるが、本研究では以後ベース材と呼ぶ。)との間に応力の不連続性を生じ、それらを避けた位置での外挿操作が必要になるうえ、き裂と介在物あるいは空隙の干渉によっても誤差が大きくなるので解析が困難になる。したがって、き裂先端付近の応力場を用いないような方法、パラメータを選択することが望ましい。

エネルギー解放率はき裂先端の応力場を用いなくても解析できるため、このような問題には有利である。有限要素法を用いてのエネルギー解放率の解析はJ積分法<sup>7)8)</sup>、全エネルギー法<sup>9)10)</sup>、仮想き裂進展法<sup>11)~13)</sup>などが挙げられる。このうちJ積分法と仮想き裂進展法は原則的にき裂が直進する場合のエネルギー解放率を求める方法である。これに対して、全エネルギー法はき裂折れ曲がり瞬間時におけるエネルギー解放率の解析が可能であるので、き裂の進展した後の状態を考慮して、最大エネルギー解放率破壊条件により、き裂の折れ曲がり方向の考察が可能である。

破壊の進行方向を議論するとき、き裂進展前の混合

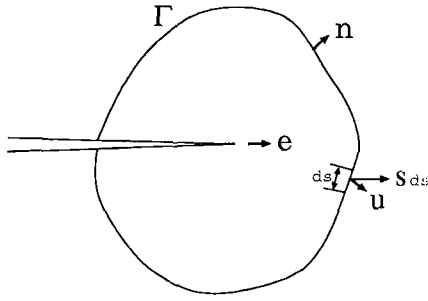


Fig.1 Integral path surrounding a crack tip.

モード状態での応力拡大係数により考察されることが多い。そのためモード分離の研究も数多い<sup>8) 13)14)</sup>。しかし、物質が非線形になると、従来の応力拡大係数による議論は困難となり、今のところ、非線形物質でも有力なパラメータの1つとして考えられているのがエネルギー解放率である。

以上のことを考慮し、本研究では全エネルギー法の経路独立積分型への一般化された方法と考えられる  $E$  積分法を有限要素解析<sup>16)17)18)</sup>することにより、超弾性体(ひずみエネルギーをもつ弾性体)内を準静的に進展するき裂と、その先端付近にある介在物あるいは空隙との干渉によるエネルギー解放率の変化を求め、き裂の挙動を考察する。

## 2. エネルギー解放率の数値解析と $E$ 積分

ここでは超弾性体内を準静的に進展するき裂のエネルギー解放率を有限要素法を用いて解析する既存の手法について触れ、それらの長所、短所について説明を加える。そして、最後に  $E$  積分の考え方について簡単に述べ、その解析方法を要約する。なお、議論を簡単にするためすべて平面問題(計算は平面応力解析)として扱う。

### (1) $J$ 積分法

Rice<sup>19)</sup>および Eshelby<sup>20)</sup>らによる経路独立である  $J$  積分は超弾性体においてエネルギー解放率  $G$  を与える。したがって超弾性体で  $J$  積分値を求めればエネルギー解放率を直接求めることができる。 $J$  積分は Fig.1 に示すき裂の一端を囲む経路  $\Gamma$  に対して次式で与えられる。

$$J = \int_{\Gamma} (w e \cdot n - s \cdot \nabla u e) ds \quad (2.1)$$

ここで  $w, s, u$  はそれぞれ、ひずみエネルギー密度、応力ベクトル、変位ベクトルであり、 $e, n$  はそれぞれ、き裂先端の直進する方向の単位ベクトル、 $\Gamma$  上の外向き単位法線ベクトルである。 $J$  積分法はき裂先端周りに積分経路を設定して、式(2.1)を数値積分する方法である。積分経路すなわち数値積分点は有限要素の辺上に

設ける場合が多いが、要素内に設定した Gauss の積分点を選ぶ場合もある。一般的には、き裂先端の応力勾配の大きいところは数値精度を考慮すれば、積分経路としては避けるべきである。この手法はエネルギー解放率を求める数値解析で最も頻繁に使用される方法である。 $J$  積分法の有利な点としては、解析するモデルがき裂進展前のモデルのみでよいことや、積分経路独立性を利用して積分経路を複数個考えることにより解の検証ができることが挙げられる。経路独立性が示されても、それが理論解であるとはいえないが、逆に経路独立性が保たれていなければ、それが失われた部分は誤差を必ず含んでいることになる。したがって適当な閉経路を考えることにより、誤差の発生場所の検証などができる。このことが種々の経路独立積分が多く考案されている理由の一つでもある。しかし  $J$  積分法は、原則的に、き裂が直進して進む(主き裂方向に進む)瞬間時のエネルギー解放率を与える。もし  $J$  積分法でき裂の折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を得ようとするれば、数値誤差の大きい、折れ曲がりき裂先端の周りに積分経路を設けて、折れ曲がりき裂の長さを変えて複数のモデル解析したのち、それらの解を外挿して求める必要があるので、精度のよい解析は困難になる。

一方、 $J$  積分を拡張して、動的な場合、かつ任意物質に対しても経路独立な  $T^*$  積分<sup>21)</sup> や  $\tilde{J}$  積分<sup>22)</sup> が考えられているが、本論文における超弾性体内を準静的に進展する場合は両者とも  $J$  積分と同型になるので、以下の議論は  $J$  積分をもって代表する。

### (2) 全エネルギー法

Iwin<sup>23)</sup>によればエネルギー解放率はき裂が単位長さ(3次元的には単位面積)だけ増加する際に解放されるポテンシャルエネルギーの変化率  $G$  として定義されている。これは

$$G = - \lim_{\delta \ell \rightarrow 0} \frac{\delta \Pi}{\delta \ell} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \ell} \quad (2.2)$$

で与えられる。ここで  $\Pi$  はポテンシャルエネルギーで  $\ell$  はき裂長さである。線形超弾性体においてはポテンシャルエネルギーの変化  $\delta \Pi$  は変位拘束の場合、

$$\delta \Pi = \delta W. \quad (2.3)$$

また外力一定の場合は

$$\delta \Pi = -\delta W. \quad (2.4)$$

したがって、エネルギー解放率  $G$  は、有限要素解析における1節点分のき裂長さの変化  $\delta \ell$  をもつ2つのモデルに対して次式で差分表示される。

$$\left. \begin{aligned} G &\approx - \frac{W(\ell + \delta \ell) - W(\ell)}{\delta \ell} \text{ (変位一定)} \\ G &\approx \frac{W(\ell + \delta \ell) - W(\ell)}{\delta \ell} \text{ (外力一定)} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

ここで  $W(l + \delta l)$  はエネルギー解放率を求めたいモデルに対して1節点解放して微小節点間隔  $\delta l$  進めたモデルのもつひずみエネルギーで、 $W(l)$  はき裂進展前のモデルのもつひずみエネルギーである。なお式(2.5)は任意の非線形超弾性体についても有効であることは、後で述べる  $E$  積分の定義式(2.9)または式(2.11)により容易に証明できる。

全エネルギー法はモデルを複数個解析する必要があるという不利な点を有すが、比較的粗いメッシュ分割でも高い精度が得られるという利点をもっている<sup>24)</sup>。また任意方向のき裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を解析できる。しかし、境界条件が荷重一定または変位一定の場合に限られるうえに、応力勾配が著しく大きくなるモデルでは無視できない誤差を含むこともある。

### (3) 仮想き裂進展法

仮想き裂進展法は剛性変化法とも呼ばれ、ひずみエネルギーの変化にもとづく方法であるので、全エネルギー法の一つとして分類されることもある。全エネルギー法との大きな違いは、2つのモデルの違いを1節点分のき裂の進展としないで、き裂の先端を微小仮想量移動させる点である。そしてこの操作によって変化する剛性はき裂先端を節点の一部にもつ要素だけであり、剛性の変化率を用いることによりエネルギー解放率が計算できる。その概念をマトリクス的に式で表すと外力一定の場合は

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial l} = -\frac{1}{2} \{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial l} \{u\} \quad (2.6)$$

ここで  $\{u\}$ ,  $[K]$ ,  $\{f\}$  はそれぞれ変位ベクトル、剛性マトリクス、荷重ベクトルである。式中の偏微分を差分型で考えるか、微分型で考えるかで計算時間が大きく変わってくるが、全エネルギー法に比較すれば解析モデルが1つになるので有利である。欠点としては、差分型の場合、結果がき裂の仮想移動量に敏感であるため、どの範囲で有効であるかを常に吟味しなければならないことや、き裂の移動を主き裂と同方向にとらないと前の状態からの新しいき裂面が得られないため、J積分法と同様、厳密にはき裂が直進する場合のエネルギー解放率しか得られない点が挙げられる。Hellen<sup>12)</sup>はき裂先端が含まれる要素内のき裂を仮想剛体回転させることにより、き裂が折れ曲がる場合を考察し、限られたき裂の方向に対しては信頼性のあるエネルギー解放率を与えるとしている。しかし、この方法では、負のエネルギー解放率になるき裂折れ曲がり角があるなど、その適用性には非常な注意を要する。

### (4) E積分法

Fig.2に示すように有限変形する2次元非均質非線形超弾性体B内を準静的に進展するき裂を考える。た

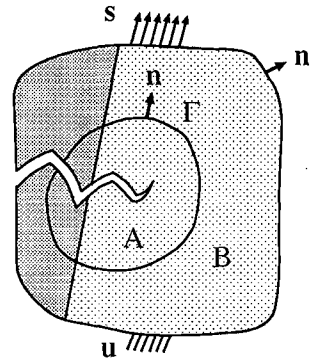


Fig.2 Quasi-statically extending crack.

だし、Fig.2のように、非均質性が界面を成す場合は、その基準系での界面は時間的に移動しないとする<sup>15)</sup>。いま、き裂の一先端を含む基準系に固定された正則な閉領域をA、その境界を $\Gamma$ とする。B内のき裂長さを $l$ とし、き裂は $\beta(0 \leq \beta \leq \alpha)$ をパラメータとした物体Bの境界上で与えられた表面応力ベクトル $s$ 、あるいは変位ベクトル $u$ により進展しているとする。たとえば、単軸集中荷重 $P$ が荷重制御で単調増加するように与えられた場合、 $\beta = P$ とおける。

そのとき物体内では、第1種のPiola-Kirchhoff応力 $S$  ( $s = S n$ ;  $n$ は単位法線ベクトル)、変位 $u$ 、変位勾配 $H = \nabla u$ 、ひずみエネルギー密度 $w$ などの場の量 $\varphi(X, l, \beta)$ がき裂を除いた基準系での位置 $X$ で各 $l, \alpha$ に対して定義される。物体が非均質な超弾性体とすると

$$S = \frac{\partial w(H, X)}{\partial H} \quad (2.7)$$

である。物体力のない準静的な場合を考えると、平衡式

$$\text{Div } S = 0 \quad (2.8)$$

がき裂を除いた箇所でも成立している。

ここでは、エネルギー解放率を、き裂進展中におけるき裂の一先端を囲む基準系に固定された正則な閉領域A内のエネルギー変化率の不釣り合い量:

$$E(l, \alpha) = \int_{\Gamma} s \cdot \frac{\partial u}{\partial l} ds - \frac{\partial}{\partial l} \int_A w da \quad (2.9)$$

として定義する<sup>25)</sup>。ここでき裂が折れ曲がる瞬間時のエネルギー解放率の場合は、 $l$ による偏微分は、右微分係数で定義される。

$E$ の値は領域Aがき裂先端を含む限りその形、大きさによらないことは明かである。

式(2.9)を直接数値積分で評価すると、き裂先端周辺領域の $w$ に関する面積分を必要とするため、精度や計算時間の点でも、また扱い易さの点でも不利である。したがってこの式を経路積分に変形することを考える。式(2.9)を経路積分に変形するとき、発散定理がうまく

使えるような  $(l, \beta)$  空間での積分でひずみエネルギー密度  $w$  を定義する必要がある。すなわち

$$w(l, \alpha) = \int_0^\alpha S(l, \beta) \cdot \frac{\partial H(l, \beta)}{\partial \beta} d\beta \quad (2.10)$$

とすればよいことがわかる。ここで記号が複雑になるのをさけるため  $\varphi(X, l, \beta)$  を単に  $\varphi(l, \beta)$  と記した。そのとき平衡式 (2.8) および発散定理を使えば

$$\int_A w da = \int_A \int_0^\alpha S \cdot \frac{\partial H}{\partial \beta} d\beta da = \int_\Gamma \int_0^\alpha s \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} d\beta ds$$

が成立し、これを式 (2.9) に代入すると

$$E(l, \alpha) = \int_\Gamma \int_0^\alpha \left( \frac{\partial s}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial u}{\partial l} - \frac{\partial s}{\partial l} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) d\beta ds \quad (2.11)$$

が得られる。上式が非均質非線形物質にも適用可能な、経路独立なエネルギー解放率を求める積分公式で  $E$  積分と言われる。  $E$  積分は周知の  $J$  積分とは異なり、Fig.2 の  $\Gamma$  のように積分経路にき裂面を含まない場合でも、非均質物質中を進展するき裂、また疲労き裂等にしばしばみられる非直線的なき裂に対しても経路独立であることは式 (2.9) の定義自体が領域  $A$  によらないこと、また式 (2.11) を導く際、き裂の直線性は仮定していないことから明らかである。さらに、 $J$  積分では、前述したように、原理的には主き裂と同方向にき裂が進展した瞬間時の場合のエネルギー解放率しか求まらないが、 $E$  積分では、任意の方向に進展した瞬間時の場合でも経路独立な積分により求めることができる。したがってそのような、き裂折れ曲がり瞬間時における、数値解析において、最も誤差が大きくなる特異点近傍から離れて積分すればよく、数値解析上有利である。

$E$  積分法とは式 (2.11) を  $J$  積分と同じように経路積分する方法である。式 (2.11) で積分経路を物体境界にとり外力一定境界、または変位一定境界の場合は前に述べた全エネルギー法と等価である。したがって  $E$  積分法は種々の複雑な境界上で外力と変位が独立でないような (一般的な) 境界条件の場合における経路独立積分の形に一般化したものであるといえる。以上のことにより  $E$  積分は複数のモデルを解析するという不利な点を有すが、経路独立積分であるため前述した意味での解の検証が可能で、複雑な形状、载荷系をもつモデルでも経路独立性により誤差の少ない経路の模索ができ全エネルギー法に比べて解析における柔軟性を有す。

また、本論文のように、き裂先端近傍の介在物あるいは空隙との界面上に応力ないしひずみエネルギーの不連続性をもつ場合、 $J$  積分では積分経路にそれらの不連続面が含まれると経路独立性が失われ、エネルギー解放率を求めるためには不連続面での積分補正が必要になる<sup>26)</sup>。一方、 $E$  積分はそのような不連続面を横切っても経路独立性は保たれ、何ら補正することなくエネルギー解放率を求めることができる。例えば、Fig.3 中の経路 1, 2, 3 の場合の  $J$  値はすべて異なり、経路 1 のみがエネルギー解放率となるが、 $E$  値は理論上すべて同一

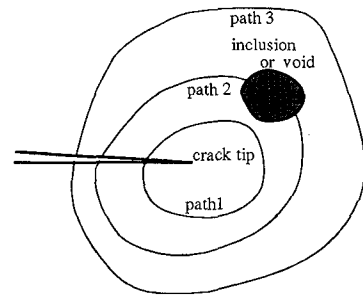


Fig.3 Integral paths containing or across an inclusion or a void.

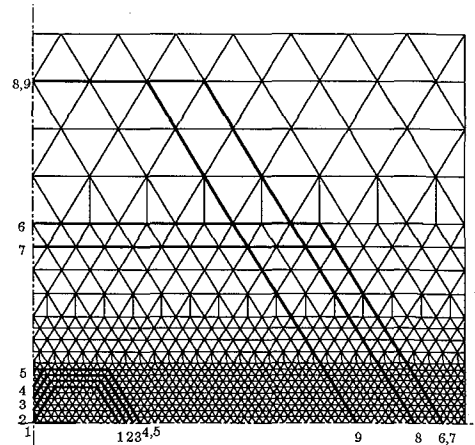


Fig.4 Finite element meshes and integral paths.

でエネルギー解放率を与える。なお、4 節でその数値解析例を示す。

### 3. 解析方法と解析モデル

本研究では無限板中に長さ  $2l=1.2\text{cm}$  のき裂が存在する場合を考え、荷重はき裂面に垂直な一様引張分布荷重  $\sigma_\infty$  が無限遠に载荷されている場合 (载荷的にはモード I) を想定する。これに対する有限要素近似モデルは横幅寸法 (き裂面方向)  $12\text{cm}$ 、縦方向  $11.43\text{cm}$  の有限長方形板としている。このモデルと同一幅をもつ中央にき裂のある等方線形弾性体の無限長帯板の引張モデルの応力拡大係数を文献<sup>27)</sup>にある式で求めたところ、無限板中の中央き裂の場合の応力拡大係数 ( $K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi l}$ ) との差は 0.4% 程度であった。用いた有限要素モデルは、最も扱いの容易な定ひずみ三角形要素を用いるため 1/4 領域に対して Fig.4 に示すような要素分割としている。要素は正三角形を基本とした要素分割が行われており、要素数は 6758 である。節点数については経路積分式を数値解析に適用する場合、その式の性質上、対象となる主き裂モデル (以下基本モ

デルと略する) に対してき裂を微小変化させたモデルを解析する必要がある。本研究ではき裂長さに関する微分項を、き裂を進展させたモデルとの2点差分により近似するため、その節点数は基本モデルで3450、き裂進展モデルで3451である。

積分経路については、その経路を要素の辺上に設定し、Fig.4に太線で示すようにき裂近くの最も細かく要素分割された領域内に5経路、き裂から十分離れた位置に4経路設けている。これらのうちのき裂近くの4経路はき裂の右先端を中央に含んだ正六角形になっており、残りの5経路はき裂全体を被った六角形としており、本研究では線形弾性体を扱うため式(2.11)は次式のように変換できる<sup>16)</sup>。

$$E(l, \alpha) = \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{2} s \cdot \frac{\partial u}{\partial l} - \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial l} \cdot u \right) ds \quad (3.1)$$

この式を2点差分近似すると

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ s_i(l) \cdot \frac{u_i(l + \Delta l) - u_i(l)}{\Delta l} - \frac{s_i(l + \Delta l) - s_i(l)}{\Delta l} \cdot u_i(l) \right\} \Delta s \quad (3.2)$$

で与えられるので、本研究では式(3.2)を用いた。ここでnは経路における要素辺の数、 $s_i$ は各要素辺における表面応力ベクトル、 $\Delta s$ は各要素辺の長さ、 $u_i$ は各要素辺上における変位ベクトル、そして $\Delta l$ は基本モデルとき裂進展モデルのき裂長さの差である。また( $l$ )および( $l + \Delta l$ )は、それぞれ基本モデルとき裂進展モデルを表している。各辺上の応力は各辺内外の要素応力を平均することにより求めている。各要素辺上における変位については要素辺端の節点変位を平均して求めている。また、き裂進展長さ $\Delta l$ の影響を調べるため、き裂先端付近の要素がFig.4で与えた1/4の大きさ(要素辺長さは1/2で、 $\Delta l$ も1/2になる)の場合の解析をも試みた。その結果、Fig.4に示したモデルとほぼ同じ解析結果が得られることを確認している。E積分法は全エネルギー法の一般化したものであることから、仮想き裂進展法における移動量のように敏感でないのは当然であろう。

本研究では介在物あるいは空隙と、き裂の位置関係の違いによるエネルギー解放率の変化を考察することが目的であるので、その形状は分割要素形状からの簡便性により正六角形とした。Fig.5に示すような、き裂先端付近に六角形の介在物あるいは空隙(以後、特別に区別を要しないときは、介在物あるいは空隙を単に介在物とだけ記す。)が存在する4モデルを基本的な位置関係として考えた。ここでモデルAは介在物の中心はき裂面の延長線上に位置し、き裂先端から介在物までの距離はき裂長さの1/6である。モデルBは介在物の一辺がき裂面の延長線上に位置し、き裂先端から介在物の中心への方向はき裂面方向と $\pi/6$ をなし、き裂先端から介在物までの距離はき裂長さの $\sqrt{3}/12$ 倍であ

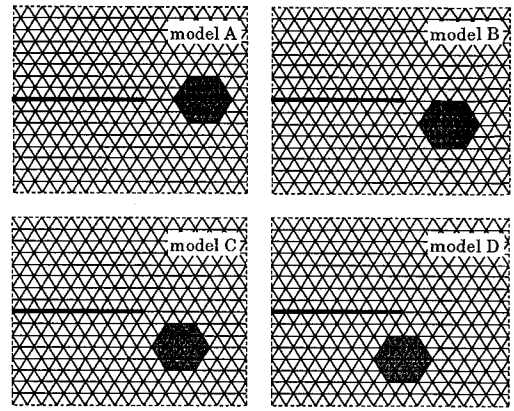


Fig.5 Analytical models with an inclusion or a void.

る。モデルCはき裂先端から介在物の中心への方向はき裂面方向から約 $0.26\pi$ をなし、き裂先端から介在物までの距離はき裂長さの $\sqrt{3}/12$ 倍である。そしてモデルDはき裂先端から介在物の中心への方向はき裂面方向から $\pi/2$ をなし、き裂先端から介在物までの距離はき裂長さの $\sqrt{3}/12$ 倍である。この相互の位置関係を簡単に述べると、介在物あるいは空隙の中心がき裂先端を中心に時計回りの方向に回転している。これらのモデルの介在物による不連続面はき裂先端の近傍にあるが、このような場合でも積分経路をき裂先端から離すことにより高い精度でエネルギー解放率が得られることを確認している<sup>17)</sup>。以下、本研究で行った解析について列挙する。

1. 等方弾性体中のき裂が直進する場合のエネルギー解放率を求め、経路誤差を検討する。またこのときJ積分法の結果についても考察する。
2. モデルAの介在物のき裂からの位置を変えて、積分経路が介在物を含んだり、横切ったりする場合のモデルに対するJ積分およびE積分の値を求め、経路独立性について検討する。
3. 等方弾性体中のき裂の折れ曲がり瞬間時におけるエネルギー解放率を求め、既報の結果と比較する。
4. モデルAについて介在物のヤング係数の変化にともなうエネルギー解放率の変化について検討する。
5. モデルAの介在物のヤング係数をベース材のその10倍にして、介在物の位置をき裂面方向に変化させた場合のエネルギー解放率の違いについて検討する。
6. モデルBおよびモデルCについて介在物のヤング係数をベース材の10倍にして、き裂折れ曲がり瞬間時におけるエネルギー解放率を考察する。
7. モデルDについて介在物のヤング係数をベース材の10倍と0.0001倍に設定してき裂折れ曲がり瞬間時におけるエネルギー解放率を検討する。
8. モデルDの介在物のヤング係数をベース材の

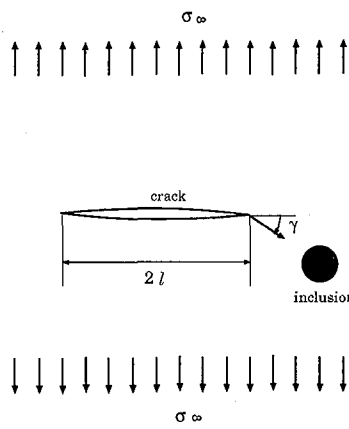


Fig.6 Direction of crack kinking.

0.0001 倍にして介在物がモデル D の位置からき裂面方向に変化する場合のエネルギー解放率の違いについて検討する。

なお、折れ曲がりき裂の幾何学的な関係は Fig.6 に示すように、もとのき裂方向から時計回りに折れ曲がり角  $\gamma$  をとっている。

#### 4. 結果と考察

本論文では、破壊基準を Griffith の議論にしたがい、エネルギー解放率がある限界値（単位表面積を新たに作るのに必要なエネルギー）に達したとき不安定破壊が生じるとし、エネルギー解放率最大の方角にき裂が進展すると仮定して議論を進める。

Table 1 は 9 つの経路によって得られた J 積分値と E 積分値を無限板中き裂のエネルギー解放率  $G_0$  の厳密解で正規化して表にまとめたものである。厳密解  $G_0$  との誤差も挙げているが、J 積分で 3% 以下、E 積分では 1% 前後の誤差となっており、双方とも高い精度で解析されている。ここで、E 積分と J 積分の誤差を比較すると、明らかに E 積分による解析の方が高精度となっている。また J 積分の場合、き裂全体を覆う経路（経路 5~9）では、き裂が座標の正方向に進む時のその両端からのエネルギー解放率が合計されて得られるので 2 つのき裂先端でのエネルギー解放率が互いにキャンセルされてゼロになるため、対象としているき裂先端のエネルギー解放率のみを求めることができない。J 積分法で、き裂長さが微小な場合のき裂の一端からのエネルギー解放率を求めようとすると、その一端のみを含む閉経路を設ける必要があるので工夫を要す。

モデル A の介在物の位置を移動させて、積分経路 1 が介在物を含まないように、経路 2,3 が介在物を横切るように、経路 4 が介在物とベース材の界面になるように、そして積分経路 5~9 が介在物を完全に囲むよ

Table 1 Path error for a crack in an infinite plate.

path	length( $/2l$ )	$J/G_0$	error(%)
1	3.0	0.97588	2.4
2	3.5	0.97398	2.6
3	4.0	0.97208	2.8
4	4.5	0.96994	3.0
5	6.5	$-5.80 \times 10^{-15}$	—
6	24.7	$7.22 \times 10^{-15}$	—
7	23.3	$6.44 \times 10^{-15}$	—
8	27.3	$1.84 \times 10^{-14}$	—
9	24.7	$1.93 \times 10^{-14}$	—

path	length( $/2l$ )	$E/G_0$	error(%)
1	3.0	1.00761	0.8
2	3.5	1.00369	0.4
3	4.0	1.00113	0.1
4	4.5	1.00012	0.0
5	6.5	0.99774	0.2
6	24.7	0.99828	0.2
7	23.3	0.99632	0.4
8	27.3	1.00951	1.0
9	24.7	1.01141	1.1

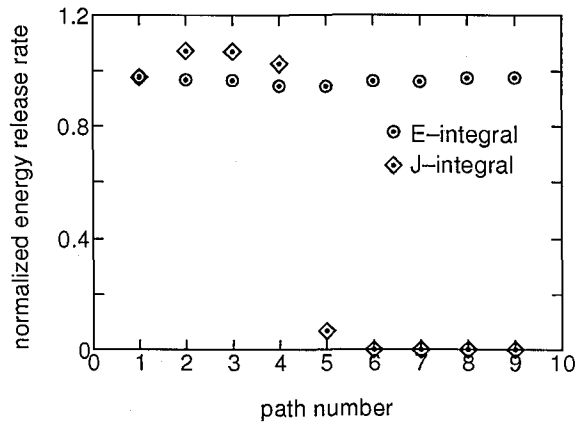


Fig.7 Energy release rates on several integral paths.

うにして J 積分および E 積分の経路誤差を調べた図が Fig.7 である。前に議論したように、J 積分では経路 1 のみが（理論上、エネルギー解放率を与えるので）E 積分値とほぼ等しく、積分経路が介在物を横切る場合や介在物界面に一部位置する場合には経路独立性が失われていることがわかる。これに対して E 積分はすべての積分経路に対してほぼ経路独立性が保たれている。（ただし、図には記さなかったが、介在物を含まない経路で、その積分経路をき裂先端周りに十分小さくとると、数値誤差により、J 積分値、E 積分値とも正規化されたエネルギー解放率は 1 より離れてくる。）また経路 4 での E 積分値と J 積分値の差は経路 5 でそのまま J 積分値となって現れている。経路 6~9 の J 積分値は、その経路がき裂両端を含んでいるため、ほとんど 0 である。したがって、J 積分法では、数値解の誤差が大きくなるき裂両端近傍および介在物から十分離れた積分経路を

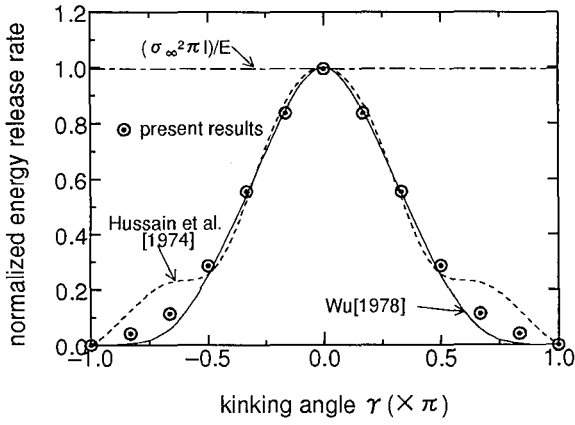


Fig.8 Energy release rate at the onset of crack kinking.

とってエネルギー解放率を求めることは困難になる。以上の結果を踏まえ、以後の議論はき裂から十分離れた4つの積分経路(経路6~9)の平均したE積分値で行う。

Fig.8は無限板中の単一き裂の折れ曲がり瞬間時におけるエネルギー解放率の解析結果である。き裂の先端は正三角形を二分する要素分割を行っているので、 $\pi/6$ ごと計11方向にき裂が進展するときのエネルギー解放率の解析が可能である。ここで縦軸は等方弾性無限体のき裂の直進するときのエネルギー解放率の厳密解で正規化している。以下の図でもエネルギー解放率は同様な厳密解で正規化している。モードI, IIの場合はき裂の折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率の厳密解は存在しないため、既存の解析結果<sup>29)30)</sup>と比較している。ここで折れ曲がり角がかなり大きいときは若干差異をもつが $-\pi/2 \leq \gamma \leq \pi/2$ では3者ともかなりの精度で一致している。このことから、き裂先端付近の介在物によって混合モードになるここでのモデルでは、最大エネルギー解放率を示す折れ曲がり角は、き裂の直進する方向から大きくずれることはないため、E積分法による最大エネルギー解放率を示す折れ曲がり角近傍の解は精度よく得られると考えられる。

Fig.9は図中に示すようにモデルAの介在物の位置がき裂面方向に変化する場合のエネルギー解放率の違いを表している。ここで介在物のヤング係数はベース材の10倍にしており、横軸はき裂付近の1要素辺長さで無次元化している。また、ここで $d=0$ はき裂が介在物に入る瞬間時のエネルギー解放率であり、 $d=-4$ はき裂が介在物からベース材に出る瞬間時のエネルギー解放率である。この解析では介在物のヤング係数がベース材のそれより大きいので、 $d=0$ におけるエネルギー解放率は0で、 $d=-4$ でのエネルギー解放率は $\infty$ であると予想される<sup>28)</sup>。き裂が介在物を貫通しき裂先端から介在物が離れるときは急速に等方弾性無限体の厳密解に収束するが、介在物がき裂の前方にあり、その距離が大きく

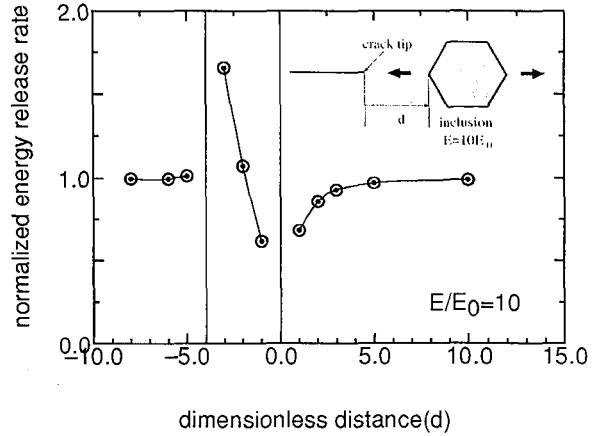


Fig.9 The variation of energy release rate with the position of an inclusion.

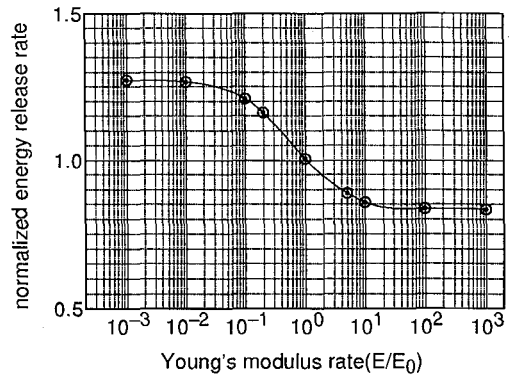


Fig.10 The variation of energy release rate with Young's modulus of an inclusion.

なる場合は $d=6$ 程度で等方弾性無限体の厳密解に収束しており、前者の場合に比べ、その収束の仕方はかなり緩やかである。この傾向はLiらの結果<sup>10)</sup>と若干異なるが、これはLiらは半無限長の主き裂を扱っているのに対して今回の解析では主き裂長さが著しく短いためであると考えられる。

モデルAの介在物のヤング係数(E)の変化に伴う、エネルギー解放率の変化を示したものがFig.10である。介在物のヤング係数がベース材のそれより大きければ正規化されたエネルギー解放率は1より小さく(したがって、等方弾性無限体の介在物のない場合より進みにくい)、小さければ正規化されたエネルギー解放率は1より大となる(したがって、等方弾性無限体の介在物のない場合よりき裂は進みやすくなる)。ベース材のヤング係数( $E_0$ )との比は $E < E_0$ のときは $10^{-2}$ 程度で一定値に近づく。このことは $E \approx 0.001E_0$ 以下をとれば空隙が近似できることを示唆する。また $E > E_0$ のときは $10^2$ 程度で一定値に近づいている。

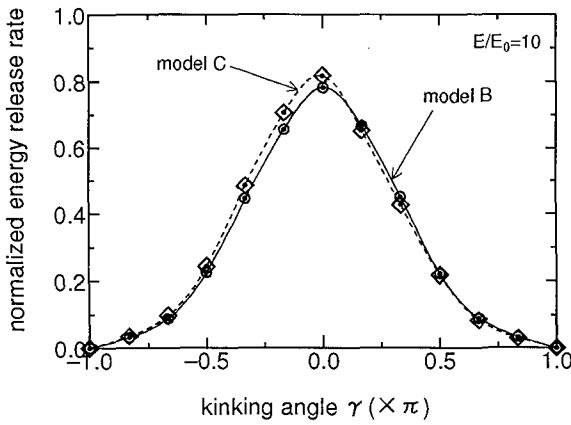


Fig.11 The variation of energy release at the onset of crack kinking for model B and model C.

モデル B とモデル C の介在物のヤング係数をベース材の 10 倍としてき裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を解析した結果が Fig.11 である。両方との介在物はき裂の前方に位置しているので、正規化したエネルギー解放率は 1 より小となる。モデル B では介在物の境界がき裂面方向上にあるのでき裂の開口に対する拘束が比較的大きく正規化したエネルギー解放率は折れ曲がり角に対してほぼ対称である。これに対してモデル C ではモデル B に比べて、介在物がき裂の折れ曲がり角の正の方向に存在するのでエネルギー解放率はき裂の折れ曲がり角に対して若干非対称になる。このことは、モデル C の方が B に比べ、き裂が折れ曲がりやすいことを示している。介在物をき裂先端に更に近づければ、この傾向はより顕著になるであろう。

Fig.12 はモデル D の介在物のヤング係数をベース材の 10 倍と 0.0001 倍 (空隙とみなせる。) としてき裂の折れ曲がり瞬間時におけるエネルギー解放率を求めたものである。このように介在物がき裂の先端の側方に位置する場合はき裂前方に位置する場合と異なり、ベース材のヤング係数 ( $E_0$ ) との比が、 $E < E_0$  のときは正規化されたエネルギー解放率は 1 より小さくなり、逆に  $E > E_0$  のときは、正規化されたエネルギー解放率は 1 より大きくなる。これは介在物によって引張応力による変形が過度に伝達されたり、緩和されたりするからである。ここで用いた介在物のヤング係数の違いによるき裂の進展特性について考察すると、エネルギー解放率は応力の平方に比例するため、0.0001E の介在物が側方に存在するとき、き裂を進展させるためには、10E の介在物が存在する場合と同じようにき裂を直進させるときの 3 割り増し近くの荷重の大きさを要することになる。またき裂の進展方向は、正規化されたエネルギー解放率のき裂折れ曲がり角に対する非対称性により、 $E < E_0$  のときはその介在物に近づくように、逆に  $E > E_0$  の

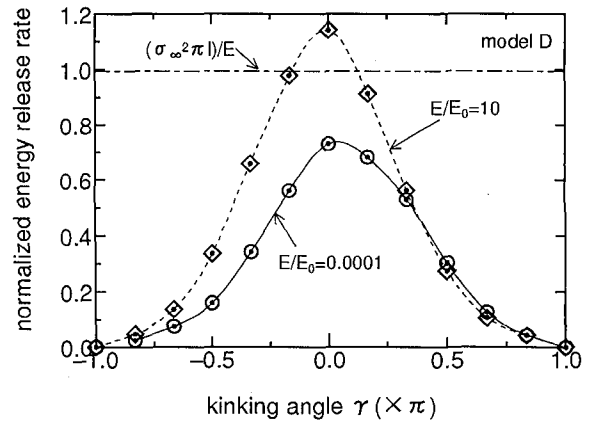


Fig.12 The variation of energy release at the onset of crack kinking for model D.

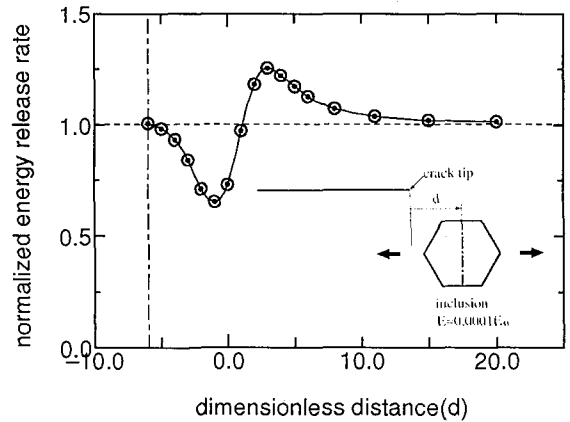


Fig.13 The variation of energy release with the position of an inclusion.

ときは介在物を避けるように進展するよう推測される。しかし、エネルギー解放率にもとづく、その折れ曲がり角については、今回の解析の位置関係では、その方向を正確に確認できるほど大きくなかった。上記のように、介在物をき裂先端に更に近づけることにより、この傾向は、より顕著になると思われるが、これらについては今後の研究課題としたい。

最後の解析例は Fig.13 に示すように介在物のヤング係数をベース材の 0.0001 倍としてモデル D の介在物をき裂面方向に変化させた場合のエネルギー解放率の違いである。ここで横軸はき裂周りの 1 要素辺で除して無次元化している。d=0 はき裂先端の真横に介在物の中心がある場合であり、d=6 はき裂の中心点の真横に介在物の中心がある場合である。このような解析は介在物の大きさに大きな影響を受けるが、本研究のようにき裂長さ 12mm に対して介在物の大きさが一辺 2mm の正六角形の場合、き裂の先端のほぼ真横に介在物の



中心が存在する場合に、正規化されたエネルギー解放率は最も小さく、介在物の中心がき裂の先端から離れていくにしたがい、急激にエネルギー解放率は大きくなり  $d=3$  付近でピークをもつ。エネルギー解放率が最大と最小となる介在物の中心の位置の違いは、約4要素辺の長さ（主き裂長さの1/3）で、この間でエネルギー解放率は1より大きくなる。エネルギー解放率の最大値と最小値を荷重に換算すると、き裂が最も進みやすいときの荷重は最も進みにくい場合の3割から4割小さい荷重となる。したがって空隙はき裂の進展に複雑で大きな影響を与えることがわかる。

## 5. おわりに

本研究では無限板中の単一き裂周りの介在物あるいは空隙のき裂進展への影響を考えた。介在物および空隙はすべて同じ大きさの六角形に固定して、介在物のヤング係数と位置を変化させてエネルギー解放率を解析し、き裂の進展への効果を考察した。以下に得られた結論を列挙する。

1. 積分経路が介在物の一部を含む場合はJ積分では明らかに経路独立性を失うが、E積分では介在物の存在に関わらず、経路独立性が保たれている。
2. 介在物がき裂の前方にあるモデルAでは、介在物のヤング係数を変化させれば、ベース材に対して大きい場合も、小さい場合もエネルギー解放率はある一定値に収束する。
3. 介在物にき裂が入る瞬間時あるいは介在物からき裂が出る瞬間時において、理論的にはエネルギー解放率は0または $\infty$ になると推察されるが（ただし、著者らの知る限り、その厳密な証明は発表されていない。）、本研究でもその傾向が示された。
4. 介在物がき裂先端の前方に位置する場合は介在物のヤング係数がベース材のそれより大きい場合はき裂進展を妨げる作用をし、逆に小さい場合はき裂進展を助長する効果となる。
5. 介在物がき裂先端の側方に位置する場合は前方に位置する場合とは逆に介在物のヤング係数がベース材のそれより大きい場合はき裂進展を助ける作用をする。また介在物のヤング係数がベース材のそれより小さい場合はき裂進展を妨げる作用をする。
6. 介在物がき裂先端の前方にある場合も、側方にある場合もき裂面方向に対して非対称な位置に存在すれば、き裂の折れ曲がり角とエネルギー解放率の関係はき裂の折れ曲がり角が0の場合に対して非対称となる。この非対称性は介在物がき裂の前方にある場合と側方にある場合では逆の傾向をもつ。またこれはき裂の折れ曲がりの可能性を示すものである。

本研究で用いたE積分による解析方法は有限要素法を用いているので様々なモデルに適用できるうえ、比較的粗い要素分割でも高い精度でエネルギー解放率を得ることができる。今後の問題として、介在物をもつ更に複雑なモデルやき裂同士の干渉などへの応用が考えられる。

## 参考文献

- 1) 橋本堅一, 工藤洋三, 矢富盟祥, 中川浩二: 花崗岩の亀裂の進展特性と破壊靱性異方性: 岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, Vol.21, pp.446~450, 1989.
- 2) 工藤洋三, 橋本堅一, 佐野修, 中川浩二: 花崗岩内に発生するクラックと鉱物粒の関係, 資源と素材, Vol.107, pp.423~427, 1991.
- 3) Tirosh J. and Tetelman A. S.: Fracture condition of a crack approaching a distance, Int. J. Fracture, Vol.12, No.2, pp.187~199, 1976.
- 4) Rubinstein A. A.: Macrocrack-microdefect interaction, J. Appl. Mech., Vol.53, pp.505~510, 1986.
- 5) Tamate O.: The effect of a circular inclusion on the stresses around a line crack in a sheet under tension, Int. J. Fract. Mech., Vol.4, No.3, pp.257~266, 1968.
- 6) Muskhelishvili N. I.: Some basic problem of the mathematical theory of elasticity, translated by J. R. Radok, Noordhoff, Groningen, 1975.
- 7) 三好俊郎: 非線形破壊力学と有限要素法, 日本機械学会誌, Vol.79, No.691, pp.60~66, 1976.
- 8) 石川晴雄: J積分による応力拡大係数の有限要素解析, 日本機械学会論文集(A編), Vol.46, No.401, pp.67~76, 1980.
- 9) Watwood Jr. V. B.: The finite element method for prediction of crack behavior, Nuclear Engng. and Design, Vol.11, pp.323~332, 1969.
- 10) Li R. and Chudnovsky A.: Energy analysis of crack interaction with an elastic inclusion, Int. J. Fracture, Vol.63, pp.247~261, 1993.
- 11) Parks D. M.: A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors, Int. J. of Fracture, Vol.10, No.4, pp.487~501, 1974.
- 12) Hellen T. K.: On the method of virtual crack extensions, Int. J. Num. Methods of Engng., Vol.9, pp.187~207, 1975.
- 13) 石川晴雄, 中野禪, 結城良治, 鄭南龍: 要素剛性マトリックスの微分を用いた仮想き裂進展法の効率化, 日本機械学会論文集(A編), Vol.55, No.512, pp.937~941, 1989.
- 14) Ishikawa H.: A finite element analysis of stress intensity factor for combined tensile and shear loading by only a virtual crack extension, Int. J. Fracture, Vol.16, R243~R246, 1980.
- 15) Yatomi C. and Ishida H.: Energy release rate by the path-independent E-integral and J-integral for a non-straight crack, submitted to Int. J. Fracture.
- 16) Yatomi C., Hashimoto K. and Ishida H.: Finite element analysis of the energy release rate for a kinked crack using the E-integral, Lecture Note in Num. Appl. Anal., 13, pp.61~74, Kinokuniya, 1994.
- 17) 橋本堅一, 矢富盟祥, 石田啓: E積分による異種材料界面近くのき裂に対するエネルギー解放率の解析, 土木学会年次講演概要集, 共通, 1994.
- 18) 橋本堅一, 矢富盟祥, 石田啓: E積分によるき裂折れ曲がり時におけるエネルギー解放率の数値解析, 破壊力学シンポジウム講演論文集, Vol.7, pp.280~284, 1993.
- 19) Rice J. R.: A path-independent integral and the ap-

- proximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.*, Vol.35, pp.376~386, 1968.
- 20) Eshelby J. D. : The continuum theory of lattice defect, Vol.III, pp.79~144, Academic Press, New York, 1956.
  - 21) S. N. Atluri and T. Nishioka : Incremental path-independent integrals in inelastic and dynamic fracture mechanics, *Eng. Fract. Mech.*, Vol.20, No.2, pp.209~244, 1984.
  - 22) 岸本喜久雄, 青木繁, 坂田勝 : き裂の進展挙動を記述するための破壊力学パラメータについて, *日本機械学会論文集 (A 編)*, Vol.46, No.410, pp1049~1061, 1980.
  - 23) Irwin G. R. : Analysis of stress and strain near the end of crack traversing a plate, *J. Appl. Mech.*, Vol.24, pp.361~364, 1957.
  - 24) 白鳥正樹, 三好俊郎, 松下久雄 : 数値破壊力学, 実教出版, pp.66, 1980.
  - 25) Yatomi C. : The energy release rate and the work done by the surface traction in quasi-static elastic crack growth, *Int. J. Solid Structure*, 19, pp.183~187, 1983.
  - 26) 西岡俊久, 小林豊, J. S. Epstein : 非均質弾塑性破壊試験片の変形挙動有限要素シミュレーション, *日本機械学会論文集 (A 編)*, Vol.59, No.561, pp.1319~1326, 1993.
  - 27) Stress intensity factor handbook, edi. by Y. Murakami et al., Vol.1, pp.3~4, Pergamon Press, 1987.
  - 28) 結城良治, Cho S. B., 松本敏郎, 木須博行 : Hetenyiの基本解を用いた効率的境界要素弾性解析, *日本機械学会論文集 (A 編)*, Vol.53, No.492, pp1581~1589, 1987.
  - 29) Wu C. H. : Maximum-energy-release rate criterion applied to a tension-compression specimen with crack, *J. Elasticity*, pp.235~237, 1978.
  - 30) Hussain M. A., Pu S. L. and Underwood J. : Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II, *Fracture Analysis ASTM STP 560* pp.2~28, 1974.

(1994年9月14日受付)