

# Time-periodic magnetic field analysis with saturation characteristics by harmonic balance finite element method

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2018-06-21 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属:
URL	<a href="https://doi.org/10.24517/00009631">https://doi.org/10.24517/00009631</a>

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.



# 時間周期非線形磁界に対する調波有限要素法 ——任意関数で表示された磁化特性の場合——

金沢大学

○魯 軍偉<sup>1)</sup>, 山田外史<sup>2)</sup>, 別所一夫<sup>3)</sup>

TIME-PERIODIC MAGNETIC FIELD ANALYSIS WITH SATURATION  
CHARACTERISTICS BY HARMONIC BALANCE FINITE ELEMENT METHOD

J.Lu S.Yamada K.Bessho

Electrical Energy Conversion Lab.  
Faculty of Technology, Kanazawa University  
Kanazawa, 920, Japan

## ABSTRACT

The harmonic balance finite element method (HBFEM) for the time-periodic magnetic field with saturation characteristics is discussed. The HBFEM enables us a new method to calculate the harmonic magnetic flux distribution at an AC magnetization, and it dose not need the intricate calculation concerned with the time variation. The procedure of the numerical calculation of the HBFEM is intrinsically similar to that for the static nonlinear magnetic problem. The formulation for time-periodic magnetic field with any saturation characteristics is expressed. The numerical analysis for each harmonic magnetic flux distribution is described, and the comparison between numerical and experimental results is made in this paper.

## 1. まえがき

交流励磁を行った時、磁心の非線形特性による高調波磁束を発生する。このような時間周期的な定常状態での磁界解析の手段として、調波平衡法を有限要素法解析に適用する新しい数値解析を提案した<sup>[1]</sup>。この新しい数値解析法は調波有限要素法と呼ばれ、時間微分に関する計算を行わずに、各調波成分の磁束密度の計算ができる。この手法を用いると、基本的には非線形静磁界解析と同様な手段によって計算が可能であり、計算の短縮につながる。本論文においては、任意関数で表示された磁化特性の場合に対して適用可能な方法について述べ、電磁石を例として数値解析の結果を実験と比較することが行なったので報告する。

## 2. 調波有限要素法の定式化

本解析では磁場解析を以下のように仮定する。

- (1) 二次元直角座標系とする
- (2) うす電流を考慮する準定常磁場とする
- (3) 交流励磁の時間周期問題を対象とする
- (4) 非線形磁心のヒステリシス特性及び磁気異方性を無視とする

仮定(1)と(2)により、2次元直角座標系に対する磁気ベクトルポテンシャルAの微分方程式は、Maxwellの方程式により次の式となる

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -J_s + \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1)$$

ここで、 $\nu$ は磁心の磁気抵抗率、 $\sigma$ は導電率、 $J_s$ は励磁コイルに流れる電流密度である。電流

(1)大学院博士課程 (2)電気情報工学科 助教授 (3)電気エネルギー変換実験施設 教授

〒920 金沢市小立野2丁目40番20号 電話(0762)61-2101

は $z$ 方向に対して無限に連続して流れているとし、電気スカラーポテンシャル $\phi$ に関する式 $(\partial \phi / \partial z) = 0$  ( $\phi$ : 一定) とする。式(1)はガラーキン法を適用して有限要素法の定式化を行うと次式になる<sup>[2]</sup>。すなわち

$$\int_{\text{全領域}} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} (\nu \frac{\partial A}{\partial x}) + \frac{\partial N_i}{\partial y} (\nu \frac{\partial A}{\partial y}) \right\} dx dy - \int_{\text{全領域}} (J_0 - \sigma \frac{\partial A}{\partial t}) N_i dx dy = 0 \quad (2)$$

ここで、重み関数として一次三角要素の補間関数 $N_i$ を用いることとする。

本解析では、交流励磁した時の時間周期的磁界分布のみを対象とする。このような交流励磁状態での時間周期解を求める手段として、強制入力を含む非線形回路の解析に適用される調波平衡法が知られている<sup>[3]</sup>。この調波平衡法を有限要素法に取り入れ磁場の時間周期解を直接求めることができる。時間周期解であるので含まれる調波成分を仮定することができる。すなわち、全ての変数(ベクトルポテンシャル $A$ 、磁束密度 $B$ 、励磁電流 $J_0$ )は調波成分の和として表す。

$$\begin{aligned} A^i &= \sum_{n=1,3,5,\dots} \{A_{ns} \sin(n\omega t) + A_{ne} \cos(n\omega t)\} \\ B_{x^n} &= \sum_{n=1,3,5,\dots} \{B_{xns} \sin(n\omega t) + B_{xne} \cos(n\omega t)\} \\ B_{y^n} &= \sum_{n=1,3,5,\dots} \{B_{yns} \sin(n\omega t) + B_{yne} \cos(n\omega t)\} \\ J_0^i &= \sum_{n=1,3,5,\dots} \{J_{ns} \sin(n\omega t) + J_{ne} \cos(n\omega t)\} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $\omega$ は励磁電流密度の基本周波数の角周波数であり、添字 $i$ 、 $e$ 及び $n$ はそれぞれ節点番号、要素番号並びに高調波次数を示す。また、添字 $x$ 、 $y$ はベクトル方向、添字 $s$ 、 $c$ は $\sin$ 、 $\cos$ 成分を示す。(3)式により各調波の波高値の値が未知変数となる。

本解析における磁心の特性は磁心飽和のみを考慮することより、その磁化特性は奇偶関数の式、すなわち

$$H = H(B) \quad (4)$$

と表す。よって、時間に関する磁気抵抗率 $\nu(t)$ は次の式に与えられる。

$$\nu(t) = H\{B(t)\}/B(t) \quad (5)$$

ここで、磁束密度 $B(t) = (B_x^2 + B_y^2)^{1/2}$ である。(5)式の磁気抵抗率をFourier展開することにより次の式となる。

$$\nu(t) = \nu_0 + \sum_{n=2,4,6} \{ \nu_{ns} \sin(n\omega t) + \nu_{nc} \cos(n\omega t) \} \quad (6)$$

すなわち、偶数次の高調波の和で表する。任意の一次三角要素内(節点1、2、3)における磁気ベクトルポテンシャル $A$ は

$$A = A^1 N_1 + A^2 N_2 + A^3 N_3 \quad (7)$$

であり、補間関数 $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$ は

$$\begin{aligned} N_i &= a_i + b_i x + c_i y \\ (a_i &= x_j y_k - x_k y_j, b_i = y_j - y_k, c_i = x_k - x_j) \end{aligned} \quad (8)$$

(3)式の $A^i$ を(7)式に代入し、(6)式とともに(2)式に再び代入する。(2)式を一次三角要素の一個(節点番号*i*=1,2,3とする)に対して積分を行う。補間関数 $N_i$ に対して(3)式の左辺第1項は各調波成分の $\sin(n\omega t)$ 、 $\cos(n\omega t)$ にてまとめると次の式となる。

$$\begin{aligned} &\int_{\text{要素}} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} (\nu \frac{\partial A}{\partial x}) \right\} dx dy \\ &= \frac{b_i b_i}{\Delta / 4} \left\{ (d_{11} A_{1s} + d_{12} A_{1e} + d_{13} A_{3s} + d_{14} A_{3e} + \dots) \sin \omega t + \right. \\ &\quad (d_{21} A_{1s} + d_{22} A_{1e} + d_{23} A_{3s} + d_{24} A_{3e} + \dots) \cos \omega t + \\ &\quad (d_{31} A_{1s} + d_{32} A_{1e} + d_{33} A_{3s} + d_{34} A_{3e} + \dots) \sin 3\omega t + \\ &\quad (d_{41} A_{1s} + d_{42} A_{1e} + d_{43} A_{3s} + d_{44} A_{3e} + \dots) \cos 3\omega t + \\ &\quad \dots \dots \dots \} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $\Delta$ は要素の面積である。(3)式の左辺第2項は同様に行うと、次式が得られる。

$$\begin{aligned} &\int_{\text{要素}} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial y} (\nu \frac{\partial A}{\partial y}) \right\} dx dy \\ &= \frac{c_i c_i}{\Delta / 4} \left\{ (d_{11} A_{1s} + d_{12} A_{1e} + d_{13} A_{3s} + d_{14} A_{3e} + \dots) \sin \omega t + \right. \\ &\quad (d_{21} A_{1s} + d_{22} A_{1e} + d_{23} A_{3s} + d_{24} A_{3e} + \dots) \cos \omega t + \\ &\quad (d_{31} A_{1s} + d_{32} A_{1e} + d_{33} A_{3s} + d_{34} A_{3e} + \dots) \sin 3\omega t + \\ &\quad (d_{41} A_{1s} + d_{42} A_{1e} + d_{43} A_{3s} + d_{44} A_{3e} + \dots) \cos 3\omega t + \\ &\quad \dots \dots \dots \} \end{aligned} \quad (10)$$

(3)式の左辺第3項は

$$\begin{aligned} &\int_{\text{要素}} (J_0 - \sigma \frac{\partial A}{\partial t}) N_i dx dy \\ &= \int_{\text{要素}} \left[ \{ J_{1s} + \sigma \omega (A_{1s} N_1 + A_{1e} N_2 + A_{3s} N_3) \} \sin \omega t \right. \\ &\quad + \{ J_{1e} - \sigma \omega (A_{1s} N_1 + A_{1e} N_2 + A_{3s} N_3) \} \cos \omega t \\ &\quad + \{ J_{1s} + 3 \sigma \omega (A_{1s} N_1 + A_{3s} N_2 + A_{3e} N_3) \} \sin 3\omega t \\ &\quad + \{ J_{1e} - 3 \sigma \omega (A_{1s} N_1 + A_{3s} N_2 + A_{3e} N_3) \} \cos 3\omega t \\ &\quad \left. + \dots \dots \dots \right] N_i dx dy \\ &= \{ (\Delta J_{1s} / 3 + \sigma \omega (2A_{1s}^2 + A_{1e}^2 + A_{3s}^2) \Delta / 12 \sin \omega t \\ &\quad + (\Delta J_{1e} / 3 - \sigma \omega (2A_{1s}^2 + A_{1e}^2 + A_{3s}^2) \Delta / 12 \cos \omega t \\ &\quad + (\Delta J_{1s} / 3 + 3 \sigma \omega (2A_{1s}^2 + A_{1e}^2 + A_{3s}^2) \Delta / 12 \sin 3\omega t \\ &\quad + (\Delta J_{1e} / 3 - 3 \sigma \omega (2A_{1s}^2 + A_{1e}^2 + A_{3s}^2) \Delta / 12 \cos 3\omega t \\ &\quad + \dots \dots \dots \} \} \end{aligned} \quad (11)$$

となる。ここで、 $\int \int N_i N_j dx dy = (i=j \text{時}, 2\Delta / 12, i \neq j \text{時}, \Delta / 12)$

各調波成分の係数を行列の一行目から順次  $\sin \omega t, \cos \omega t, \sin 3\omega t, \dots$  成分にてまとめると、次式の行列式を得る。

$$\frac{1}{4\Delta} \{(b_1 b_1 + c_1 c_1)D (b_1 b_2 + c_1 c_2)D (b_1 b_3 + c_1 c_3)D\} \langle A \rangle + \frac{\sigma \omega \Delta}{12} \begin{bmatrix} 2N & N & N \\ N & 2N & N \\ N & N & 2N \end{bmatrix} \langle A \rangle = \langle K_1 \rangle \quad (12)$$

ここで、

$$\langle A \rangle = \{ A_{1,1}^{-1} A_{1,2}^{-1} A_{3,1}^{-1} A_{3,2}^{-1} A_{5,1}^{-1} A_{5,2}^{-1}, \dots, A_{1,3}^{-2} A_{1,4}^{-2} A_{3,3}^{-2} A_{3,4}^{-2} A_{5,3}^{-2} A_{5,4}^{-2}, \dots, A_{1,5}^{-3} A_{1,6}^{-3} A_{3,5}^{-3} A_{3,6}^{-3} A_{5,5}^{-3} A_{5,6}^{-3}, \dots \}^T \quad (13)$$

$$\langle K_1 \rangle = \Delta / 3 \{ J_{1,1} J_{1,2} J_{3,1} J_{3,2} J_{5,1} J_{5,2}, \dots \}^T \quad (14)$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & \dots \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & \dots \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & \dots \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2v_{10}-v_{20} & v_{20} & v_{20}-v_{40} & -v_{20}+v_{40} & v_{40}-v_{60} & \dots \\ 2v_{10}+v_{20} & v_{20}+v_{40} & v_{20}+v_{40} & v_{40}+v_{60} & v_{40}+v_{60} & \dots \\ 2v_{10}-v_{60} & v_{60} & v_{20}-v_{60} & v_{40}-v_{60} & v_{40}-v_{60} & \dots \\ 2v_{10}+v_{60} & v_{60} & 2v_{10}+v_{60} & v_{40}+v_{60} & v_{40}+v_{60} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

対称

$$\begin{bmatrix} -v_{40}+v_{60} & v_{60}-v_{80} & -v_{40}+v_{80} & \dots \\ v_{40}+v_{60} & v_{60}+v_{80} & v_{40}+v_{80} & \dots \\ -v_{20}+v_{80} & v_{40}-v_{100} & -v_{40}+v_{100} & \dots \\ v_{20}+v_{80} & v_{40}+v_{100} & v_{40}+v_{100} & \dots \\ v_{100} & v_{20}-v_{120} & -v_{40}+v_{120} & \dots \\ 2v_{10}+v_{100} & v_{20}+v_{120} & v_{40}+v_{120} & \dots \\ 2v_{10}-v_{140} & v_{140} & v_{140} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (16)$$

ブロック行列 D は、磁心の非線形性を考慮する項であり磁気抵抗率行列と呼ぶ。また、行列 N は、調波次数を意味する行列であり調波行列と呼ぶ。また、補間関数  $N_2, N_3$  に対して同様に行うと、一個の三角要素に対する式を得る。すなわち、

$$\frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} (b_1 b_1 + c_1 c_1)D (b_1 b_2 + c_1 c_2)D (b_1 b_3 + c_1 c_3)D \\ (b_2 b_1 + c_2 c_1)D (b_2 b_2 + c_2 c_2)D (b_2 b_3 + c_2 c_3)D \\ (b_3 b_1 + c_3 c_1)D (b_3 b_2 + c_3 c_2)D (b_3 b_3 + c_3 c_3)D \end{bmatrix} \langle A \rangle + \frac{\sigma \omega \Delta}{12} \begin{bmatrix} 2N & N & N \\ N & 2N & N \\ N & N & 2N \end{bmatrix} \langle A \rangle = \langle K \rangle \quad (17)$$

ここで、

$$\langle K \rangle = \Delta / 3 \{ J_{1,1} J_{1,2} J_{3,1} J_{3,2} J_{5,1} J_{5,2}, \dots, J_{1,3} J_{1,4} J_{3,3} J_{3,4} J_{5,3} J_{5,4}, \dots, J_{1,5} J_{1,6} J_{3,5} J_{3,6} J_{5,5} J_{5,6}, \dots \}^T \quad (18)$$

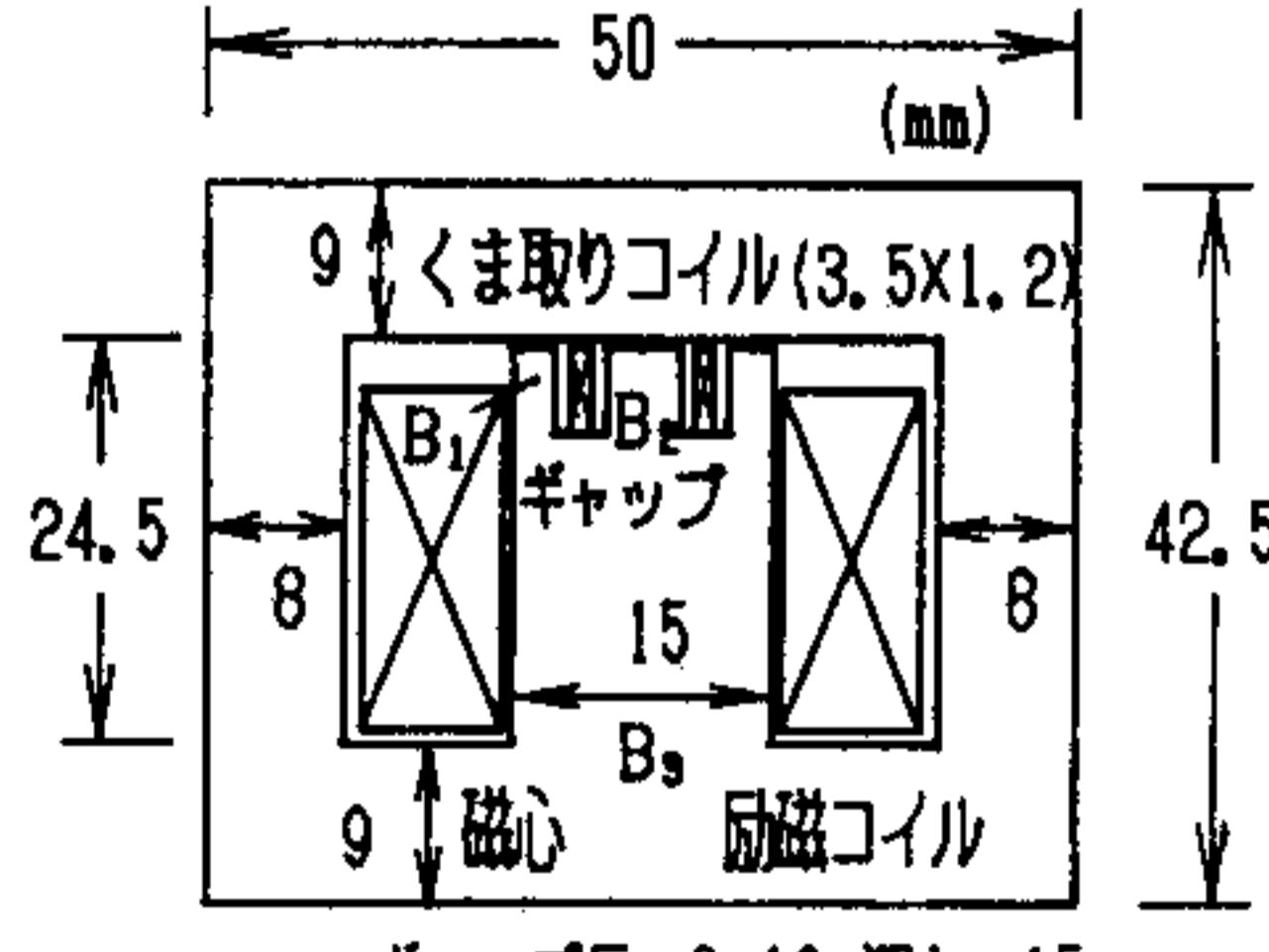
(17) 式における未知変数として磁気ベクトルポテンシャルは、各節点における各高調波の正弦波および余弦波成分の波高値であり、時間偏微分に関する演算を取り除くことができた。

全領域にわたる (2) 式の計算においては、 $\sin \omega t, \cos \omega t$  関数が直交関数であることにより各係数を零と置くことができる。すなわち、(17) 式を用いることにより通常の有限要素法の手続きと同様に全体節点方程式を導くことができる。本論文では、高調波の成分を有限と仮定して、全体節点方程式の数値解析は繰り返し法または Newton-Laphson 法を用いて計算を行う。計算手法は非線形静磁界解析の場合と同様である。

### 3. 調波有限要素法による磁界解析

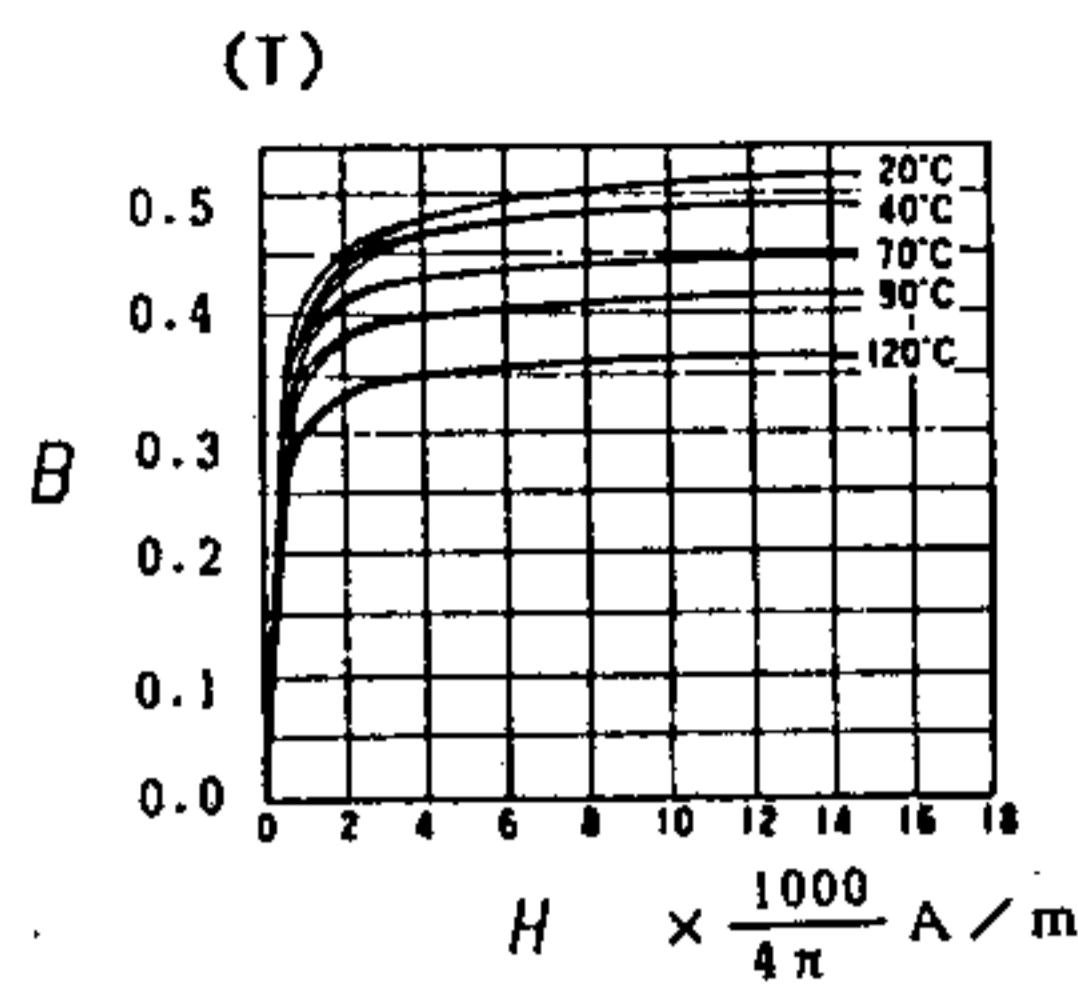
#### 3.1 くま取りコイル付き電磁石の解析

調波有限要素法の適用を検討するため、うず電流を考慮した場合に非線形磁界における時間周期の数値解析を実験結果と比較することを行った。くま取りコイルに発生する誘導電流を渦電流解析の対象とした。磁心は図 1 に示すようなフェライト磁心 (TDK 製 H<sub>700</sub>) を用い、その磁化特性は近似関数で表した磁化特性と並びに図 2 に示す。

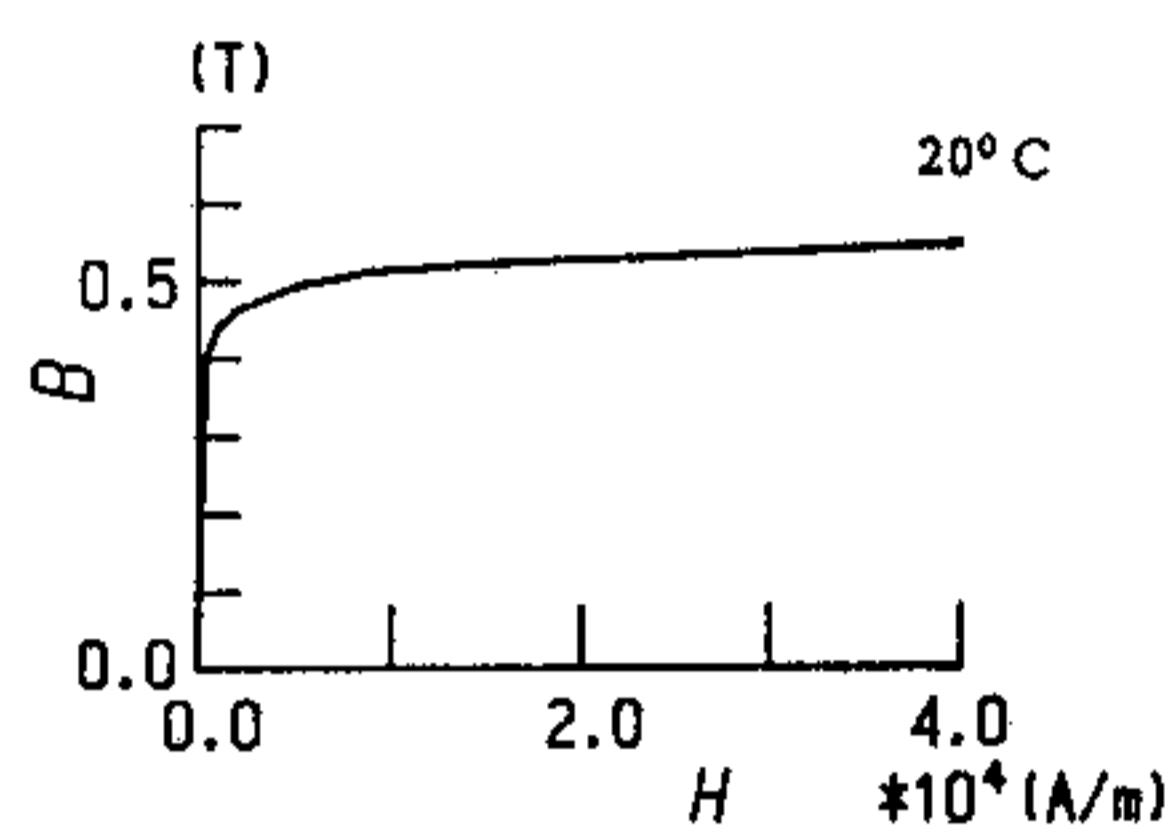


ギャップ長 = 0.19, 深さ = 15  
励磁コイル巻数 = 225匝

図. 1 くま取りコイル付く電磁石



(a) 磁心の磁化特性



(b) 磁化特性の近似関数

図. 2 磁化特性

近似関数は次式に示す。

$$\begin{aligned} |B| < 0.400 : H &= 90.58 + 1.58 \times 10^3 B^5 \\ 0.400 < |B| < 0.435 : H &= \pm 50.0 + 1.43 \times 10^3 (B \mp 0.400) \\ 0.435 < |B| < 0.460 : H &= \pm 100 + 4.00 \times 10^3 (B \mp 0.435) \\ 0.460 < |B| < 0.490 : H &= \pm 200 + 1.00 \times 10^4 (B \mp 0.460) \\ 0.490 < |B| < 0.510 : H &= \pm 500 + 2.00 \times 10^4 (B \mp 0.490) \\ 0.510 < |B| < 0.520 : H &= \pm 900 + 6.00 \times 10^4 (B \mp 0.510) \\ 0.520 < |B| : H &= \pm 1500 + 1.00 \times 10^5 (B \mp 0.520) \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $B > 0$  時上符号、 $B < 0$  時下符号をとる。

この解析例では 5 次高調波成分までを考慮して、図 1 の断面積の  $1/2$  を解析領域とし、要素数 336、節点数 195 である。またこの計算での定数は以下の値を用いた。

励磁電流密度

$$\begin{aligned} J_{1s} &= 1.0 \times 10^6 \text{ A/m}^2 \\ J_{3s} &= -5.4 \times 10^4 \text{ A/m}^2 \\ J_{1c} = J_{3c} = J_{5c} = J_{5s} &= 0 \end{aligned}$$

くま取りコイルの導電率

$$\sigma = 3.55 \times 10^7 \text{ S/m}$$

励磁基本周波数

$$f = 180 \text{ Hz.}$$

数値解析を実験結果と比較するため、計算における励磁電流密度は実験に対応する値を与えており。

図 3 は各磁心部分における磁束密度及び励磁電流密度波形を描いた。磁束密度  $B_1$ 、 $B_2$  及び  $B_3$  は図 1 に示すくま取りコイル外部、内部及び中央脚での値を示す。実験では磁束密度はさぐりコイルの電圧をアナライジングレコーダー（横河電機、type3656）でデジタル積分して測定したものである。くま取りコイル内部では高調波成分が排除され、正弦波に近くまた位相遅れが大きいのに対し、くま取りコイル外側では磁束密度は飽和値に達し波形歪が観測される。図 3 には実験値と計算値の結果を一致することが分かる。

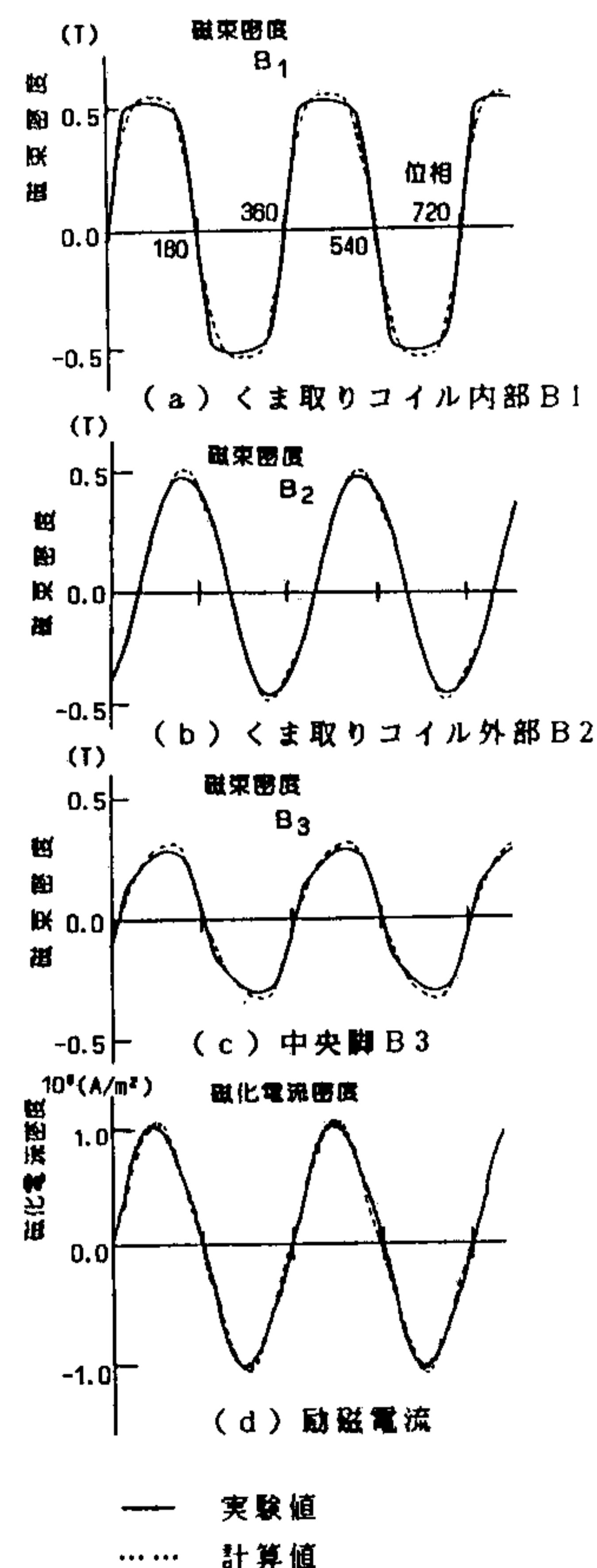


図. 3 各磁心部分に置ける磁束密度波形

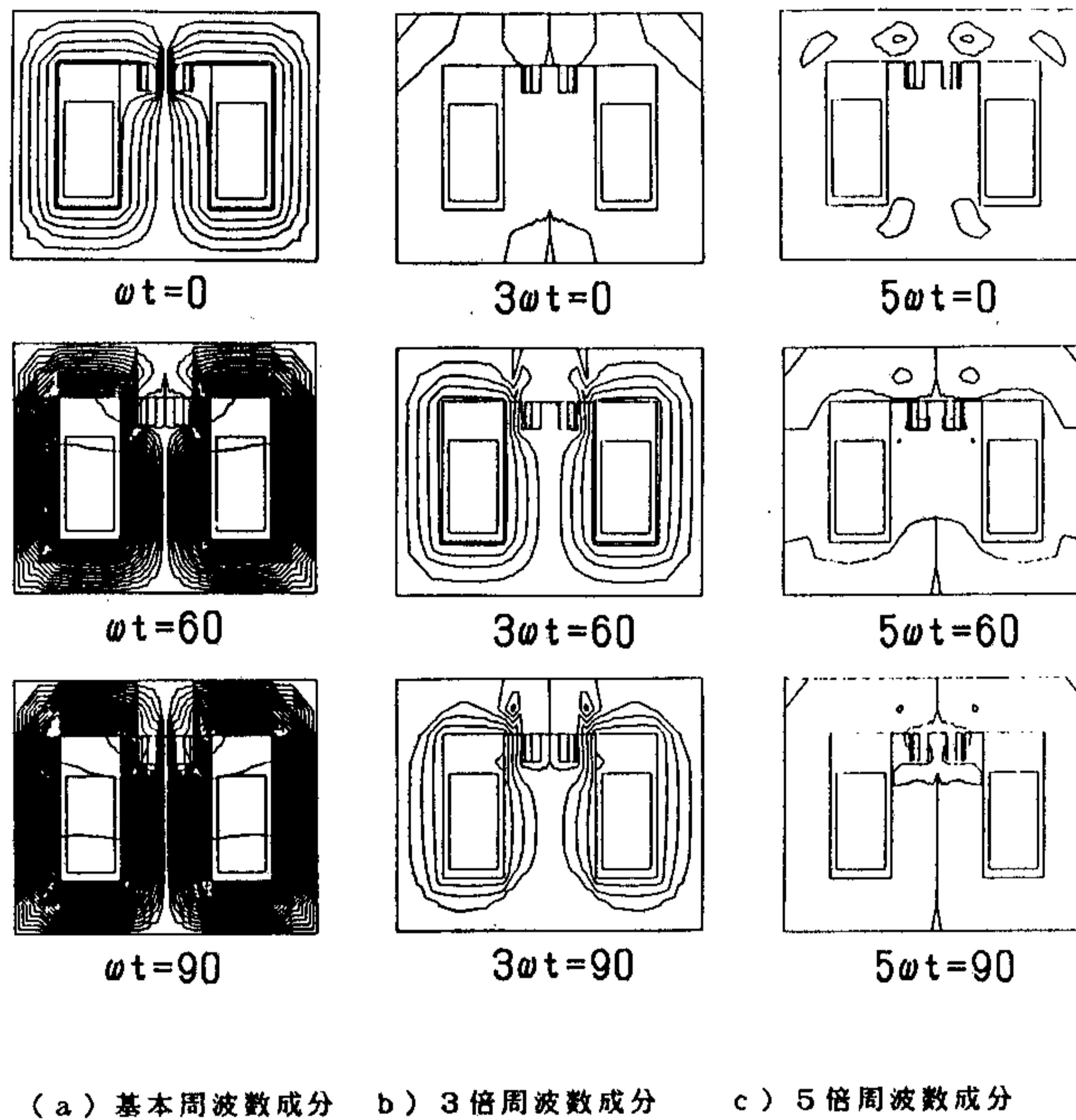


図. 4 基本周波数と高調波周波数の磁束分布

図4の結果は、基本周波数、第3及び第5高調波成分のそれぞれについての磁束分布を各位相での瞬時値として描いた。基本周波数成分の磁束はくま取りコイル内側で位相が遅れが確認される。それに対してもくま取りコイル外側の磁心内部では磁束密度は飽和値に達し、高調波磁束が発生される。そのために、第3高調波磁束成分の分布は、くま取りコイル外側を通る分布となっていることが分かる。第5高調波磁束成分はきわめて小さく明確な分布を示していない。

### 3. 2 くま取りコイルを除いた電磁石の解析

3. 1節の解析と比較するため、くま取りコイルを取り除いた場合を解析した。図5には磁心各

部分における磁束密度及び励磁電流密度波形を示す。磁束密度  $B_1$ 、 $B_2$  及び  $B_3$  は図1に示す位置と同様である。図5には実験値と計算値の結果を一致することが見られるが、実験値の波形について波の山部分が一致しない原因はヒステリスの影響であると思われる。すなわち、ヒステリスを無視し磁心の磁化特性を近似することによる角形特性の鈍化によるものと考えられる。

図6には、基本周波数と第3高調波成分のみについての磁束分布を各位相での瞬時値として描いた。位相が零になる時の値および第5高調波の成分がきわめて小さいので、ここで、図面に示すことを省略する。

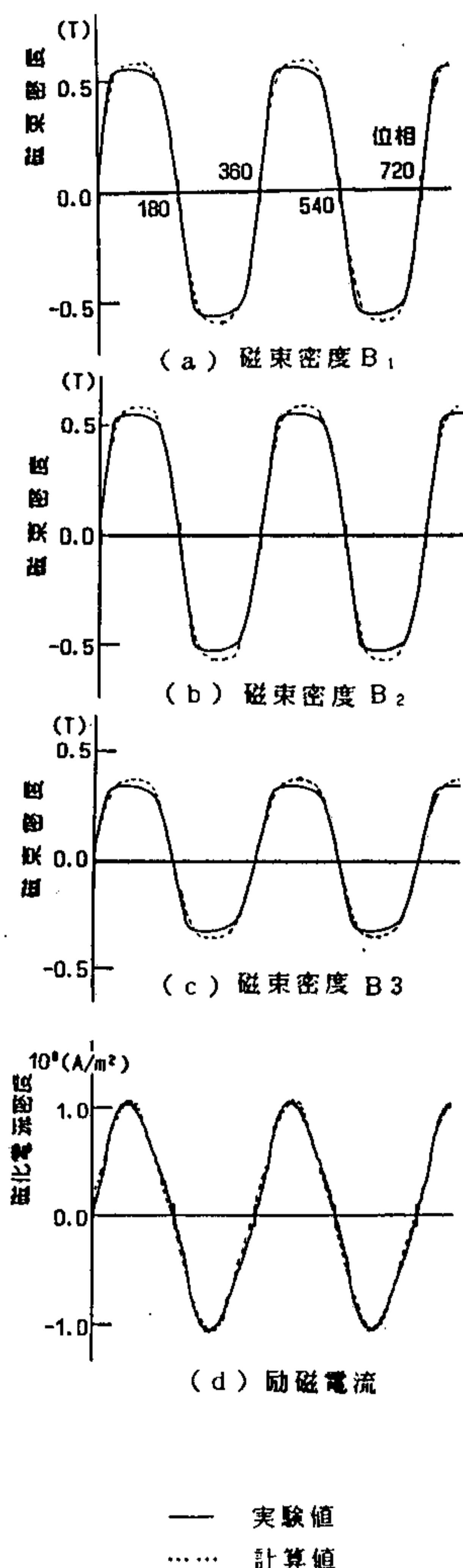
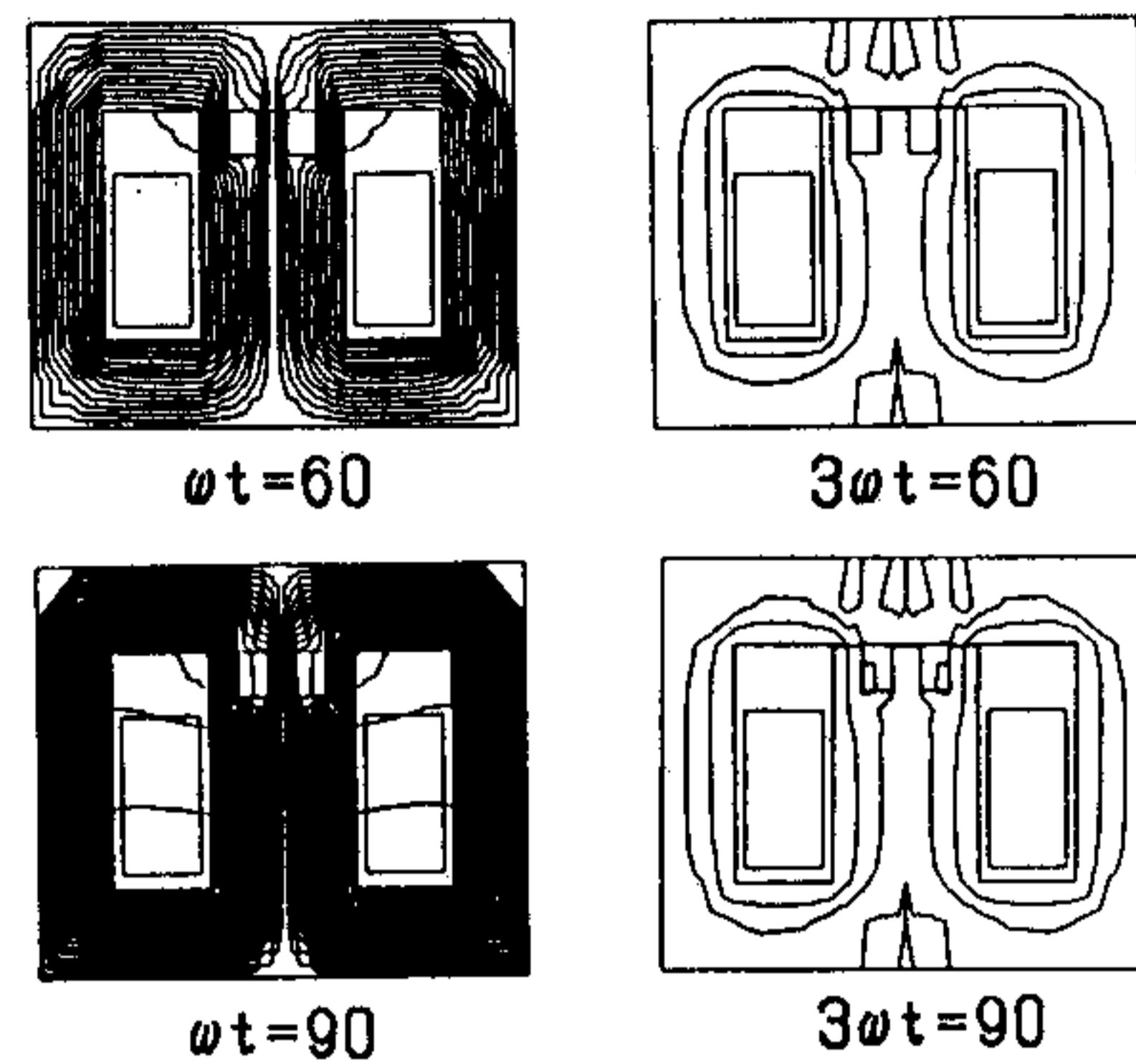


図. 5 各磁心部分に置ける磁束密度波形



(a) 基本周波数成分 (b) 3倍周波数成分

図. 6 基本周波数と高調波周波数の磁束分布

#### 4.まとめ

本研究では、飽和特性を持つ磁心の磁界解析において、交流励磁した場合の時間周期解を求める手法として調波有限要素法を提案し、本手法による計算結果の検証を行った。この計算では、定常状態における解を低次の調波成分の和と仮定することにより近似解を得るものであり、そのため時間偏微分に関する計算を除くことができた。計算の手続きとして通常の非線形静磁場解析と基本的には同様である。

調波有限要素法の特徴を下記に列記する。

- (1)要素係数マトリクスは、非線形静磁場の有限要素法と同じ手法で取り扱うことができる。
- (2)磁化特性の考慮は磁気抵抗率行列のみにて考えることができる。
- (3)非線形方程式の解法は従来の非線形方程式の手法を用いればよい。
- (4)磁化特性を一般的な関数で表した場合にも適用できる。

今後、調波有限要素法による磁心のヒステリシス特性を考慮した場合の検討を進めたい。

#### 参考文献

- [1] 山田, 別所, 魯: 「調波有限要素法による時間周期非線形2次元磁場の解析」、電気学会マグネティックス研究会、MAG-88-139 (昭63)
- [2] 中田, 高橋: 電気工学の有限要素法、(昭57) 森北出版
- [3] 牛田, 森: 非線形回路の数値解析法、(昭62) 森北出版