

# Drucker-Prager 弾塑性体のモード II 型き裂先端近傍特異場の漸近解析<sup>†</sup>

新保 泰輝\* 矢富 盟祥\*\*

## Asymptotic Analysis of Mode II Singular Fields near a Crack Tip in a Hardening Drucker-Prager Elastic-Plastic Material

by

Taiki SHIMBO\* and Chikayoshi YATOMI\*\*

In the geomechanical studies the mechanism of the shear failure for the Mode II crack extension is still an open problem. As the basic research, the purpose of this paper is, therefore, to obtain the Mode II singular fields near a crack tip.

The geomaterials, in general, have a pressure sensitive yield function to yield a dilatant effect. Thus, assuming a proportional loading, we obtain the asymptotic stress and displacement fields for the Mode II crack in the linear hardening Drucker-Prager elastic-plastic material.

For the Mode II crack of the Drucker-Prager material, the boundary conditions can not be given on the extension of the crack surface, since the informations of the boundary are unknown: This is due to the loss of symmetry or asymmetry of the displacements and the stresses because of the existence of a parameter of the dilatant effect. Then the boundary conditions for the Mode II crack are given on the crack surfaces; that is, the jumps of the normal displacement, the normal stress, and the shear stress vanish. As a result, a very small normal stress appears on the crack surfaces. We finally examine the angular distribution of the displacement and stress fields which depend on the hardening parameter and the pressure sensitivity parameter.

**Key words:** Dilatant, Stationary crack, Asymptotic analysis, Plane strain condition, Drucker-Prager elastic-plastic material, Mode II

### 1 緒 言

構造物や材料の最終的な耐荷力の決定には、破壊力学によるき裂進展メカニズムの把握が重要である。本論文では、特に、圧縮荷重下にある、岩盤や地盤材料内のき裂進展メカニズムを考究する目的で、その基礎となる、モード II 型の静止き裂先端近傍の応力や変位の漸近解析を行う。

通常、圧縮荷重下におけるこれらの材料の Fig. 1 のような供試体の破壊形態は、上下からの最大圧縮応力に対し、側圧が小さな場合は、縦割れ破壊となり、側圧が大きくなると、Fig. 1 (b) のようなモード II 型のせん断型の破壊となる。

縦割れ破壊は、Fig. 1 (a) のように、供試体中央に斜めき裂を挿入して圧縮すると、き裂の両先端近傍から、き裂面が滑るために発生した最大引張周応力の方向に、ウイングき裂と呼ばれる折れ曲がりき裂が発生し、この折れ曲がりき裂が、最大圧縮方向に進展する実験事実に基づいて説明される。すなわち、物体の中には、無数の微小き裂が存在し、大きな圧縮荷重が作用すると、ウイングき裂が多数発生するが、これが縦方向に連なり、マクロには、これが最終的には縦割れき裂になると解釈される。<sup>1)</sup>

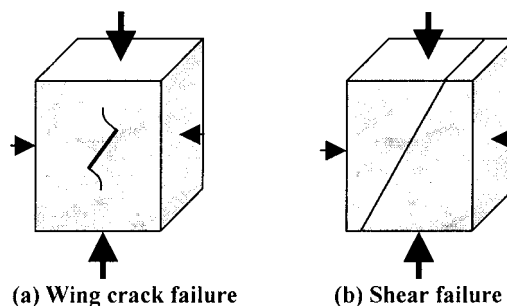


Fig. 1 Failure modes under the compressive loads.

一方、Fig. 1 (b) のようなモード II 型のせん断型の破壊は、地滑りや地震の主要因である活断層の滑り現象に密接に関連した非常に重要な破壊形態であるにもかかわらず、この破壊形態になる破壊基準に関しては、いまだ未解決問題なのである。<sup>2)</sup> 著者らの 1 人は、線形等方弾性体において、エネルギー解放率最大基準を使用し、側圧が小さな場合は、ウイングき裂が発生し、側圧がある程度大きくなるとせん断破壊になることを報告した。<sup>3)</sup> しかしながら、岩盤や地盤材料のき裂先端近傍は、非常に応力が大きくなっているため、もはや線形等方弾性体とは仮定できず、塑性化していると考えるべきであろう。

<sup>†</sup> 原稿受理 平成 19 年 12 月 10 日 Received Dec. 10, 2007 ©2008 The Society of Materials Science, Japan

\* 金沢大学大学院自然科学研究科環境科学専攻 〒920-1192 金沢市角間町, Division of Environmental Sci. & Eng., Graduate School of Natural Sci. & Tech., Kanazawa Univ., kakuma-machi, kanazawa, 920-1192

\*\* 正 会 員 金沢大学大学院自然科学研究科 〒920-1192 金沢市角間町, Graduate School of Natural Sci. & Tech., Kanazawa Univ., kakuma-machi, kanazawa, 920-1192

一方、これらの材料に共通した特性として、せん断変形により、体積変化（以下、単にダイラタンシー効果と表記）が生じる事が知られており、この特性は、降伏関数に圧力の効果を導入した弾塑性体としてモデル化される。しかし、以上に述べたように、破壊力学においては非常に重要な基本的な問題にも関わらず、降伏関数が圧力に影響を受ける弾塑性体の静止き裂におけるモード II 型のき裂先端近傍の特異解に関する研究は、著者らの知る限りでは、存在しない。したがって、このような圧縮荷重下でのモード II 型の弾塑性体の破壊の検討は数値解析に頼るのが現状であり、また、理論解が無いため、その数値解析結果の妥当性が問題となっている。

以下、静止き裂先端近傍の特異解の研究の現状を概説する。

まず、降伏関数が圧力に依存しない弾塑性体のモード I 型の場合の研究として、J. R. Rice, and G. F. Rosengren,<sup>4)</sup> J. W. Hutchinson,<sup>5)</sup>の指数硬化する  $J_2$  変形論に基づいた弾塑性体における HRR 特異応力場が著名である。また、上記の弾塑性体を用いたモード II 型、モード III 型、混合モード型の解、および漸近展開第 2 項までを考慮したものが研究されている。<sup>6)~14)</sup>

一方、降伏関数が圧力に依存した弾塑性体のモード I 型の場合の研究として、F. Z. Li, and J. Pan,<sup>15), 16)</sup>が指数硬化する Drucker-Prager 型の変形論に基づいた弾塑性体の特異応力場を求めており、また、P. Dong, and J. Pan,<sup>17)</sup>は上記の弾塑性体の平面ひずみ条件下での有限要素解析を行なっている。H. Yuan, and G. Lin,<sup>18)</sup>は、上記の弾塑性体の漸近展開第 2 項までで考慮した解を得ている。P. Papanastasiou, and D. Durban,<sup>19)</sup>は同様の弾塑性体に対し、非関連型の変形論に一般化した弾塑性体を用いた漸近解析を行っている。

以上のように、き裂先端近傍場の漸近解析の研究は非常に多く研究されているが、上述したように、「降伏関数が圧力に依存した弾塑性体のモード II 型」の静止き裂の漸近解析は著者らの知る限りにおいて存在しない。

## 2 構成式と力の釣合い式

本論文では、弾性体の部分は、線形等方弾性体、塑性部分は、圧力に線形に依存する降伏関数を持つ速度型の Drucker-Prager 弾塑性体を考える。簡単のために変形は微小であるとし、慣性項や物体力のない静的な平面ひずみ場における静止き裂を仮定して議論する。

本章では、き裂先端近傍の Drucker-Prager 弾塑性体の構成式や力の釣合い式などに関して述べる。

### 2.1 弾塑性構成式

Drucker-Prager 弾塑性体に基づく線形硬化する等方均質弾塑性体を考える。この時、Fig. 2 に示されるように Drucker-Prager 弾塑性体の降伏関数は、

$$f = \sqrt{J_2} - \beta p - (H\bar{e}^p + \tau_y) = 0, \quad (1)$$

である。ここに  $J_2$  は偏差応力  $\mathbf{S}$  の第 2 不変量であり、 $p$  は平均応力（圧力）である。これらは、それぞれ次式で定義されている。

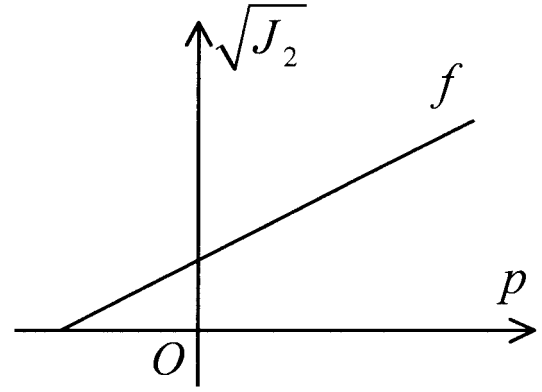


Fig. 2 Drucker-Prager elastic-plastic yield function.

$$J_2 := \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} := \boldsymbol{\sigma} + p \mathbf{1}, \quad p := -\frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \quad (2)$$

ここで中付き  $(\cdot)$  はテンソルの内積であり、 $\mathbf{1}$  は 2 階の恒等テンソルである。また、平均応力  $p$  にマイナスが付いているのは圧縮力を正とするためである。 $\beta$  は弾塑性体の降伏値が偏差応力のみでなく圧力にも線形に依存することを示す物質定数であり、この  $\beta$  により、塑性負荷による塑性体積ひずみが生じる。これを、ダイラタンシー効果と呼ぶ。特別な場合として、 $\beta = 0$  の場合が、von Mises 弾塑性体の降伏関数となる。 $\tau_y$  はせん断降伏応力である。 $H$  は硬化係数であり、ここでは正の定数とする。 $\bar{e}^p$  は相当偏差塑性ひずみであり、次式で定義されている。

$$\bar{e}^p := \int \dot{e}^p dt = \int \sqrt{2 \dot{\mathbf{e}}^p \cdot \dot{\mathbf{e}}^p} dt. \quad (3)$$

ここで、 $t$  は、時間とともに単調増加する負荷パラメータであり、上付き  $(\cdot)$  は、この  $t$  に関する微分を表わす。 $\mathbf{e}^p$  は偏差塑性ひずみであり、

$$\mathbf{e}^p := \mathbf{e}^p - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{e}^p \mathbf{1}, \quad (4)$$

である。流れ則は関連流れ則を仮定すると、塑性ひずみ速度は次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (5)$$

ここで、 $\gamma$  は塑性乗数である。塑性変形時に応力が常に降伏曲面上にあるためのコンシステンシー条件は、

$$\dot{f} = 0, \quad (6)$$

である。ここで、応力速度と弾性ひずみ速度の関係は、弾性構成テンソル  $\mathbf{C}^e$  を用いて、

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{e}}^e, \quad \mathbf{C}^e := \frac{E}{(1+\nu)} \left\{ \mathbf{I} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right\}, \quad (7)$$

となる。ここで、 $E$  は弾性係数、 $\nu$  はポアソン比、 $\mathbf{I}$  は 4 階の恒等テンソルである。

今、全ひずみ速度は弾性ひずみ速度と塑性ひずみ速度の和であるから、降伏関数 (1)、流れ則 (5)、コンシステンシー条件 (6)、構成式 (7) を用いると、

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \nu \text{tr} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{1} + \frac{1}{h} (\mathbf{Q} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{Q} \right\}, \quad (8)$$

$$\mathbf{Q} := \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{S}}{2\sqrt{J_2}} + \frac{\beta}{3} \mathbf{1}, \quad (9)$$

が得られる. ここで  $h := H/E$  とおいた. また, ここで,  $J_2 = 0$  となる場合は, Fig. 2 の  $p$  軸と降伏関数が出交った点であり, この点では構成式が定義できないため, 後述する漸近解を求める際には,  $J_2 > 0$  とした. なお, ここで, 物体の境界で与えられた応力が, 比例負荷で与えられた場合, 式 (8) のひずみ速度に対する応力速度関係は, 式 (9) の  $\mathbf{Q}$  が応力の 0 次同次関数であるから, 除荷のない比例負荷を考え, 常に塑性負荷とすると式 (8) の負荷パラメータ  $t$  の微分がとれ,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu)\boldsymbol{\sigma} - \nu \text{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1} + \frac{1}{h}(\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma})\mathbf{Q} \right\}, \quad (10)$$

となり, 全ひずみを応力の関数として表す事ができる. ここで, 式 (2), 式 (9) を用いれば,

$$\Lambda := \frac{1}{h} \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{h} (\sqrt{J_2} - \beta p), \quad (11)$$

となる. 塑性負荷状態であれば,  $\Lambda > 0$  である. なお, 式 (1) の  $\tau_y$  は有限値であるから, 特異応力部分における降伏条件は,

$$f = \sqrt{J_2} - \beta p - H\bar{e}^p = 0, \quad (12)$$

となる. ここで, 偏差塑性ひずみは式 (10) 右辺の第 3 項の偏差部分であるから, 相当偏差塑性ひずみは,

$$\bar{e}^p = \sqrt{2\mathbf{e}^p \cdot \mathbf{e}^p} = \frac{1}{E} \Lambda \sqrt{\frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}}{2J_2}} = \frac{1}{E} \Lambda, \quad (13)$$

となる.

一方, 過去に発表された, 弾塑性体のき裂先端近傍漸近解析においては, 応力が非常に大きくなると, 弾性ひずみは塑性ひずみに対して非常に小さくなると仮定し, しばしば, 弾性ひずみを無視した剛塑性体として漸近解析が行なわれている. しかし, 弾性ひずみのノルム, 塑性ひずみのノルムを下記のように定義し, その比を考えると, 式 (10) を用いれば,

$$|\mathbf{e}^e| := \sqrt{\mathbf{e}^e \cdot \mathbf{e}^e} = \frac{1}{E} \sqrt{2(1+\nu)^2 J_2 + 3(1-2\nu)^2 p^2}, \quad (14)$$

$$|\mathbf{e}^p| := \sqrt{\mathbf{e}^p \cdot \mathbf{e}^p} = \frac{1}{\sqrt{6E}} \sqrt{3+2\beta^2} \Lambda,$$

であるから, 式 (11) を用いると,

$$\frac{|\mathbf{e}^e|}{|\mathbf{e}^p|} = \frac{\sqrt{6h}}{\sqrt{3+2\beta^2}} \frac{\sqrt{2(1+\nu)^2 J_2 + 3(1-2\nu)^2 p^2}}{\sqrt{J_2} - \beta p} \quad (15)$$

となる. ここで, き裂先端からの距離を  $r$  とすると, き裂先端近傍では, 応力は  $r \rightarrow 0$  で無限大になる特異性を持つが, 上式の右辺は応力の 0 次同次関数であり,  $h > 0$  であるから, 応力が非常に大きくなっても, 塑性ひずみのノルムに対する弾性ひずみのノルムは,  $O(h)$  となる 0 でない有限な値をもつ. したがって, 線形硬化する Drucker-Prager 弾塑性体においては, 理論上は, 一般に, 塑性ひずみに対し, 弾性ひずみを小さいとみなし無視できるわけではない事に注意したい. 以上を考慮して, 本報告では弾性ひずみを無視せずに, 式 (10) の構成式を使用した漸近解析を行う.

## 2.2 支配方程式とひずみ変位関係式

今, Fig. 3 に示すき裂先端を原点とした極座標を考える. 図中, き裂は分かり易くするため角度を持たせて記載し

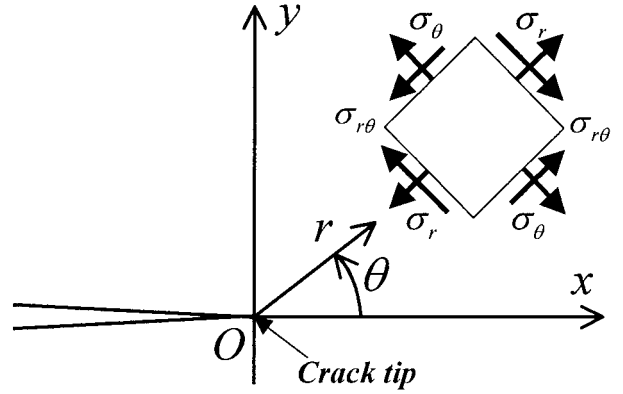


Fig. 3 Polar coordinate system at the crack tip.

てあるが, き裂の元の幅は, ゼロであり, 本論文では, モード II 型の静止き裂を考えているので, 境界荷重が与えられた時, き裂面は上下相対的に滑っても, 常に, き裂は閉じた状態にある. き裂先端からの距離を  $r$ , き裂先端延長線 ( $x$  軸) から反時計回りの角度を  $\theta$  とすると, 極座標系における力の釣合い式は,

$$(r\sigma_r)_{,r} + \sigma_{r\theta,\theta} - \sigma_\theta = 0, \quad (16)$$

$$(r\sigma_{r\theta})_{,r} + \sigma_{\theta,\theta} + \sigma_{r\theta} = 0, \quad (17)$$

である. ここに, 添え字  $r, \theta$  は極座標系の各成分を意味している. この時, ひずみ-変位関係式は, 変位を  $u_r, u_\theta$  とし, 平面ひずみ条件を考慮すれば, 以下で表される.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= u_{r,r}, & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r}(u_{\theta,\theta} + u_r), \\ \varepsilon_z &= 0, & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left\{ u_{\theta,r} + \frac{1}{r}(u_{r,\theta} - u_\theta) \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

## 3 き裂先端近傍特異場の漸近解析

本章では, き裂先端近傍の応力や変位の特異場を支配する非線形連立微分方程式の誘導と, 境界条件について言及する.

### 3.1 変数分離

き裂先端近傍の応力や変位の特異場は, 応力の特異性のオーダーを  $s$  とすれば, 式 (10) から, ひずみの特異性のオーダーも  $s$  であり, 変位は, ひずみの特異性のオーダーより, 1 次だけ大きいから,  $s+1$  の特異性のオーダーを持つ. したがって, 変数分離が可能であると仮定すれば,

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= L\bar{r}^{s+1} \frac{1}{s+1} \bar{u}_r(\theta), & u_\theta(r, \theta) &= L\bar{r}^{s+1} \frac{1}{s+1} \bar{u}_\theta(\theta), \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= H\bar{r}^s \bar{\sigma}_{r\theta}(\theta), & \sigma_r(r, \theta) &= H\bar{r}^s \bar{\sigma}_r(\theta), \\ \sigma_\theta(r, \theta) &= H\bar{r}^s \bar{\sigma}_\theta(\theta), & \sigma_z(r, \theta) &= H\bar{r}^s \bar{\sigma}_z(\theta), \end{aligned} \quad (19)$$

とおける. ここで,  $\bar{r} := r/L$  であり, 長さの次元を持つ量  $L$  で無次元化されている. したがって, 上に (-) が付記してある量は, 全て無次元量である. ここで, 式 (19)<sub>1,2</sub> を, 式 (18) に代入すると, ひずみは,

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \bar{r}^s \bar{u}_r, & \varepsilon_\theta &= \frac{\bar{r}^s}{s+1} (\bar{u}'_\theta + \bar{u}_r), \\ \varepsilon_z &= 0, & \varepsilon_{r\theta} &= \frac{\bar{r}^s}{2(s+1)} (s\bar{u}_\theta + \bar{u}'_r), \end{aligned} \quad (20)$$

となる.

### 3・2 非線形連立常微分方程式

今、負荷は比例負荷を仮定しているため、応力は負荷パラメータ  $t$  に比例している。この時、式 (10) より、ひずみも  $t$  に比例している。したがって、応力のなす単位面積辺りの仕事  $W$  は次式ようになる。

$$W = \int_0^t \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dt = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}. \quad (21)$$

ここで、 $W$  の、き裂先端を含む任意の面  $S$  上での極座標で表した面積分は、

$$\int_S W r dr d\theta, \quad (22)$$

である。したがって、破壊力学において通常仮定されるように、この値が有限であるとする、 $W$  の特異性のオーダーの最大値は、 $-1$  となる必要があるから、応力、ひずみの特異性のオーダーは、 $s = -1/2$  となる。したがって、力の釣合い式 (16), (17), および構成式 (10) に式 (19), (20) を代入すると、以下の 6 個の式が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{u}'_r &= \frac{1}{2} \bar{u}_\theta + (1+\nu)h\bar{\sigma}_{r\theta} + \bar{\Lambda}Q_{r\theta}, \\ \bar{u}'_\theta &= -\bar{u}_r + \frac{1}{2} [h\{\bar{\sigma}_\theta - \nu(\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_z)\} + \bar{\Lambda}Q_\theta], \\ \bar{\sigma}'_{r\theta} &= -\frac{1}{2} \bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta, \\ \bar{\sigma}'_\theta &= -\frac{3}{2} \bar{\sigma}_{r\theta}, \\ \bar{u}_r &= h\{\bar{\sigma}_r - \nu(\bar{\sigma}_\theta + \bar{\sigma}_z)\} + \bar{\Lambda}Q_r, \\ 0 &= h\{\bar{\sigma}_z - \nu(\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta)\} + \bar{\Lambda}Q_z. \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、上付き (') は  $\theta$  に関する微分である。また、

$$\begin{aligned} Q_r &= \frac{2\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z}{6\sqrt{J_2}} + \frac{\beta}{3}, & Q_\theta &= \frac{2\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_z}{6\sqrt{J_2}} + \frac{\beta}{3}, \\ Q_z &= \frac{2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r}{6\sqrt{J_2}} + \frac{\beta}{3}, & Q_{r\theta} &= \frac{\bar{\sigma}_{r\theta}}{2\sqrt{J_2}}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\bar{J}_2 = \frac{1}{3} (\bar{\sigma}_r^2 + \bar{\sigma}_\theta^2 + \bar{\sigma}_z^2 - \bar{\sigma}_r\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_\theta\bar{\sigma}_z) + \bar{\sigma}_{r\theta}^2, \quad (25)$$

$$\bar{\Lambda} = \sqrt{J_2} + \frac{\beta}{3} (\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta + \bar{\sigma}_z), \quad (26)$$

である。

また、式 (23) で、 $\beta = 0$  とすると、線形硬化する von Mises 弾塑性体の場合の連立微分方程式となるが、この時、式 (23)<sub>1, 2, 5, 6</sub> の応力に関する非線形項がなくなり、これを整理すると線形等方弾性体と物質係数だけが異なる連立微分方程式に帰着する。したがって、比例負荷下においては線形硬化する von Mises 弾塑性体のき裂先端近傍特異場は、線形等方弾性体の場合と物質係数が異なるだけとなる。

ここで、式 (23)<sub>5, 6</sub> の両辺の微分を取り、連立させる事により、以下の二つの式を得る。

$$\bar{\sigma}'_r = \frac{1}{(B_4C_6 - B_6C_4)} X, \quad \bar{\sigma}'_z = \frac{1}{(B_4C_6 - B_6C_4)} Y. \quad (27)$$

上式右辺の  $B, C$  および  $X, Y$  の具体的な表現は付録の式 (A1) から式 (A10) に示す。また、 $X, Y$  内にある  $\bar{u}'_r, \bar{\sigma}'_{r\theta}, \bar{\sigma}'_\theta$  は式 (23)<sub>1, 3, 4</sub> を用いて微分のない形で求められる。以上より得られた式 (23)<sub>1, 2, 3, 4</sub> および式 (27)<sub>1, 2</sub> の計 6 個の非線形連立微分方程式を解く事により比例負荷下にある Drucker-Prager 弾塑性体のき裂先端近傍特異場の変位や応力が得られる。また、ここで、式 (23) で  $H$  を

固定して、 $E \rightarrow \infty$  とすることにより、 $h \rightarrow 0$  とすれば、剛塑性体の場合となる。また構成式 (10) で  $E$  を固定して、 $H \rightarrow \infty$  にすることにより、 $h \rightarrow \infty$  とすれば、線形等方弾性体となる。ただし、式 (23) で  $h \rightarrow \infty$  としても線形等方弾性体にはならない事に注意したい。ただ、この  $h$  を大きくすると変位や応力の弾塑性体的挙動が顕著になる。

### 3・3 境界条件

線形等方弾性体や von Mises 弾塑性体の場合には、式 (23) より、モード I 型の場合、き裂の延長線上  $\theta = 0$  に関し  $\{\bar{u}_\theta, \bar{\sigma}_{r\theta}\}$  は反対称、 $\{\bar{u}_r, \bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\sigma}_z\}$  は対称関数になり、モード II 型の場合は、前者と後者が逆の対称性を持つことが分かる。一方、Drucker-Prager 弾塑性体においては、式 (23) より、モード I 型の場合は、上記と同じ対称性をもつが、モード II 型の場合は、 $\beta$  が存在するため、もはや応力や変位の対称性、反対称性の特性は無くなる事が分かる。したがって、モード II 型の場合は、線形等方弾性体や von Mises 弾塑性体の場合と異なり、き裂の延長線上  $\theta = 0$  の変位や応力の境界条件は未知となる。したがって、き裂面  $\theta = \pm\pi$  にて境界条件を与える必要がある。今、モード II 型であることを考慮し、き裂面が閉じている事と力の釣合い条件から、

$$[\bar{u}_\theta] = [\bar{\sigma}_{r\theta}] = [\bar{\sigma}_\theta] = 0, \quad (28)$$

を与える。ここで、 $[\ ]$  はき裂上下面の物理量の差であるが、それがゼロであっても、一般には、き裂上下面では値を持つことに注意したい。線形等方弾性体の場合などは、通常、き裂面には表面力がゼロとなる自由境界を仮定すれば、き裂面は閉じる結果が得られる。一方、Drucker-Prager 弾塑性体においては、自由境界の条件だけを与えた場合には、き裂面は、 $\beta$  の効果により開きやめり込みの解が得られる。したがって、式 (28)<sub>1</sub> のようにき裂面が閉じる条件が必要になるが、今度はそのき裂面を閉じるために必要な応力  $\bar{\sigma}_\theta$  がき裂面に発生する。後で詳述するが、この応力は、き裂面上で  $1/\sqrt{r}$  の特異性を持つが、き裂面上で可積分であり、その値は非常に小さい。また、ここで、Drucker-Prager 弾塑性体においては、モード II 型である事を特性づけるため、次式の境界条件を課す。

$$\bar{\sigma}_r(-\pi) = -1. \quad (29)$$

ここで、 $\bar{\sigma}_r(-\pi)$  の絶対値を 1 としたのは、式 (23)<sub>1, 2, 3, 4</sub>、式 (27)<sub>1, 2</sub> で与えられた連立微分方程式は非線形であるが、未知関数に関して一次同次になっているため、ある一組の関数が境界条件を満たした非自明な解であれば、その関数全てに正の実数倍したのもも解であるから、それらの、特に、応力の基準値とするためである。 $\bar{\sigma}_r(-\pi)$  に負の符号を付けたのは、今後の研究で、き裂に作用する最大圧縮力が、Fig. 3 の  $\theta = \pi/5$  ( $= 36^\circ$ ) 程度から作用し、き裂先端近傍では、き裂先端に反時計周りの方向にせん断力が作用していることを想定したからにすぎない。また、 $\bar{u}_r, \bar{\sigma}_z$  の  $\theta = -\pi$  での境界条件は、 $\bar{\sigma}_{r\theta}, \bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta$  の境界条件を用いて式 (23)<sub>6</sub> に Newton 法を用いて  $\bar{\sigma}_z$  が得られ、その結果を式 (23)<sub>5</sub> に代入する事により  $\bar{u}_r$  が得られ

る。以上より未知関数 6 個に対して 6 個の境界条件が得られ、非線形連立微分方程式を解く事ができる。ただし  $\bar{u}_\theta(\pm\pi) = \xi$ ,  $\bar{\sigma}_\theta(\pm\pi) = \eta$ ,  $\bar{\sigma}_{r\theta}(\pm\pi) = \zeta$  が未知境界条件となる境界を  $\theta = \pm\pi$  とした二点境界値問題となっている。本論文では、この解析手法として Runge-Kutta-Gill 法と割線法を組み合わせた Shooting 法を用いた。<sup>20)</sup>

4 解析結果

本章では、線形硬化する Drucker-Prager 弾塑性体のモード II 型におけるき裂先端近傍特異場の解析結果を示す。なお、ここでは、き裂先端近傍は、塑性負荷状態であると仮定する。

4.1 Drucker-Prager 弾塑性体の解析結果

今、ポアソン比を  $\nu = 1/3$  とした場合のき裂面が閉じたまま力の釣合いを満たす未知境界条件の結果を Table 1 に示す。

Table 1 に示した値は  $\bar{\sigma}_r(-\pi) = -1$  とした場合の固有解の結果であり、 $\bar{\sigma}_r(-\pi) = -1$  と Table 1 のひとつの組に対し、正の実数倍した値も解である。また、Table 1 に示す以上の  $\beta$  では、積分区間  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  内に弾性域が発生する事があり、き裂先端近傍が塑性負荷であるという仮定に反するため、解とはせず、Table 1 には記載していない。Table 1 に示す通り  $\bar{\sigma}_{r\theta}(\pm\pi) = \zeta$  は常に 0 を示し、 $\bar{\sigma}_\theta(\pm\pi) = \eta$  は  $\beta$  が大きい場合を除き、 $\bar{\sigma}_\theta(\pm\pi) = \eta > 0$  である事が分かる。すなわち、き裂面に引張力が働き、ダイラタンシー効果による、き裂面の開きを発生させないように作用している。また、 $\beta$  が大きい場合、すなわち、ダイラタンシー効果が非常に大きい場合には、引張りから圧縮に変化している。この圧縮応力は、過剰な体積膨張によるき裂面のめり込みを押えている。また、その値は  $\beta$  の大きさによって変化しており、ダイラタンシー効果による体積膨張の大きさに依存してその大きさが変化している。すなわち、膨張が小さい場合には小さい応力で良く、ある程度の大きさまでは必要な応力が大きくなり、体積膨張がより大きくなると、き裂面同士が近付くような膨張を示し必要な応力が低下する。そして、き裂面がめり込むような大きな体積膨張に対しては、圧縮応力が必要になるといえる。ただし、Table 1 で分かるようにき裂面に働く応力  $\bar{\sigma}_\theta(\pm\pi) = \eta$  は  $\bar{\sigma}_r(-\pi) = -1$  に対し

て、それぞれの絶対値は、相対的に非常に小さい値であり、き裂先端近傍応力の漸近展開第 2 項である均一応力を考慮した場合には、その値に比べて、ほとんど無視できる値である。この詳細については、別報で報告する。また、係数  $\xi$ ,  $\eta$  の値は  $h$  の値が大きくなるほど小さくなっており、これは  $h \rightarrow \infty$  とした場合、弾性係数に対して相対的に硬化係数の大きな弾塑性体となり、すなわち、線形等方弾性体に近くなるから、上述したように、 $h$  の上昇に伴い  $\xi$ ,  $\eta$  が線形等方弾性体と同様に 0 に近づくのは妥当といえる。また、Table 1 の結果を見ると、 $\beta$  の値が 0 でなければ、 $\bar{u}_\theta(\pm\pi) = \xi$  は、負の値となっていることに注意したい。すなわち、き裂面先端近傍は、き裂先端を中心に時計周りの方向に曲がって閉じている、この値の実際の大きさは、材料係数の違いだけでなく、物体やき裂の大きさ、境界条件によって異なるものである。この閉じたき裂の曲がりの大きさなどに関する考察は後の研究課題としたい。

ここで、無次元化された応力分布、変位分布を  $h = 0.01$  の結果を、Fig. 4 ~ 9,  $h = 0.2$  の結果を Fig. 10, 11,  $h = 0.4$  の結果を Fig. 12, 13 に示す。用いた  $\beta$  については図を参照したい。また、図中横軸は慣例に従い ( $^\circ$ ) とした。

Fig. 4 ~ 13 に示すように応力や変位が、全ての場合において、線形等方弾性体のような対称性、反対称性は失われている事が分かる。(ただし、Fig. 5 では対称性、反対称性の違いが図ではわかりにくい。)

また、Fig. 4, 5 に示す  $\beta$  が小さい場合には、応力、変位共に線形等方弾性体と非常に似た傾向にある。これは、von Mises 弾塑性体に近付くためである。

Table 1 Unknown boundary values  $\xi, \eta, \zeta$ .

$h$	$\beta$	$\bar{U}_\theta(\pm\pi)=\xi$	$\bar{\sigma}_\theta(\pm\pi)=\eta$	$\bar{\sigma}_{r\theta}(\pm\pi)=\zeta$
0.01	0.0	0.00000	0.00000	0.00000
	0.1	-0.00174	0.00234	0.00000
	0.2	-0.00625	0.00437	0.00000
	0.3	-0.01253	0.00624	0.00000
	0.5	-0.02612	0.00975	0.00000
	0.7	-0.03273	0.01061	0.00000
0.2	0.0	0.00000	0.00000	0.00000
	0.1	-0.00099	0.00104	0.00000
	0.2	-0.00371	0.00186	0.00000
	0.3	-0.00768	0.00236	0.00000
	0.5	-0.01750	0.00158	0.00000
	0.7	-0.02638	-0.00465	0.00000
0.4	0.0	0.00000	0.00000	0.00000
	0.1	-0.00068	0.00046	0.00000
	0.2	-0.00258	0.00078	0.00000
	0.3	-0.00546	0.00086	0.00000
	0.5	-0.01302	-0.00021	0.00000

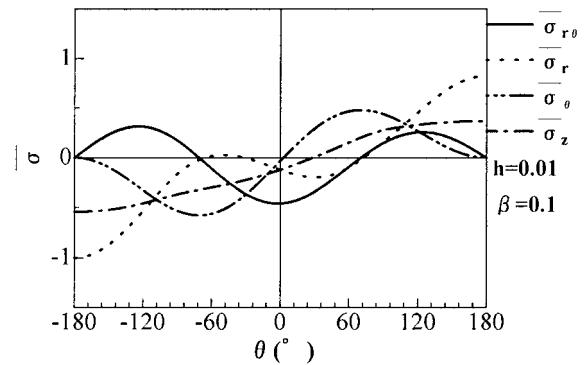


Fig. 4 Angular variation of dimensionless stresses.

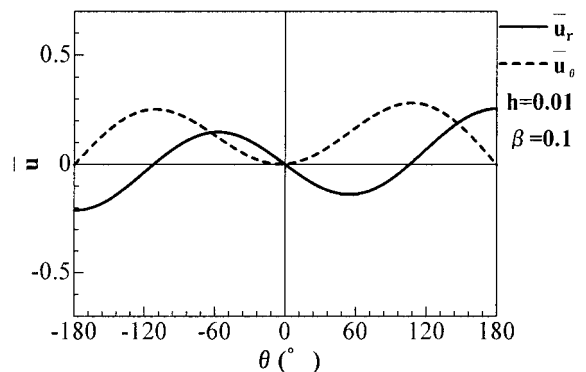


Fig. 5 Angular variation of dimensionless displacements.

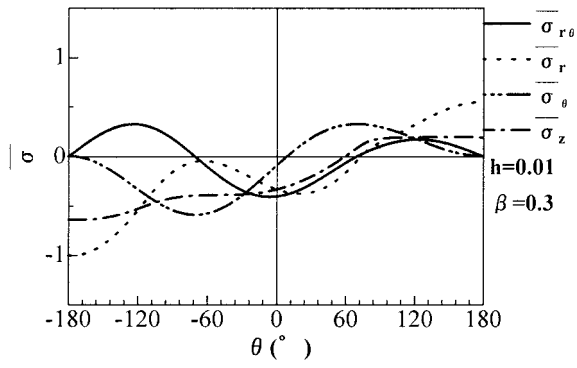


Fig. 6 Angular variation of dimensionless stresses.

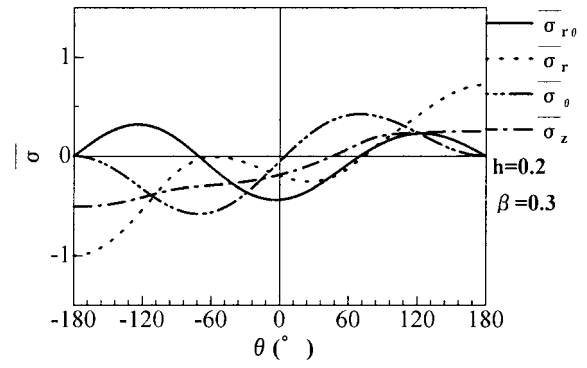


Fig. 10 Angular variation of dimensionless stresses.

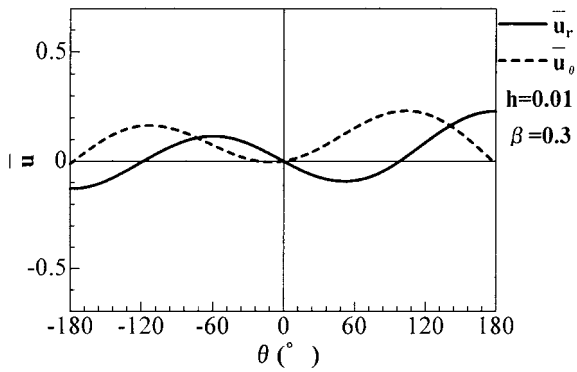


Fig. 7 Angular variation of dimensionless displacements.

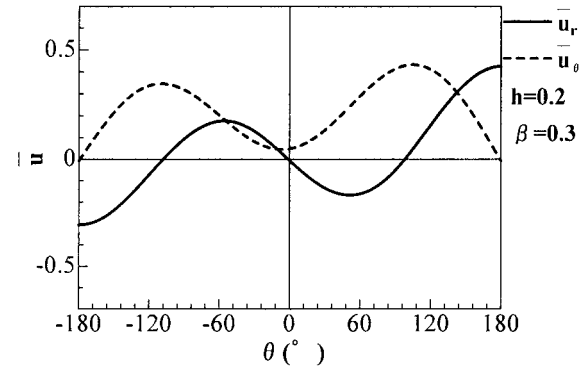


Fig. 11 Angular variation of dimensionless displacements.

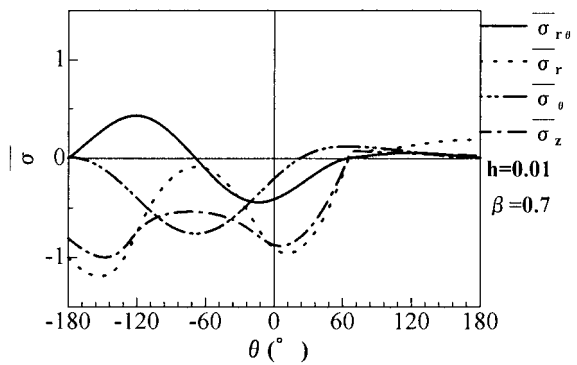


Fig. 8 Angular variation of dimensionless stresses.

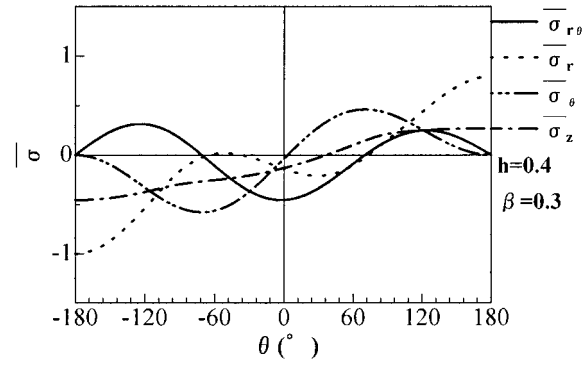


Fig. 12 Angular variation of dimensionless stresses.

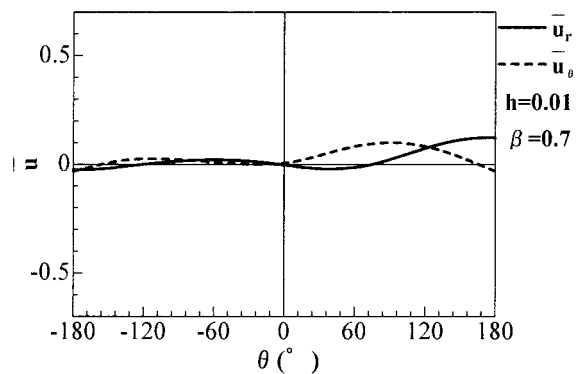


Fig. 9 Angular variation of dimensionless displacements.

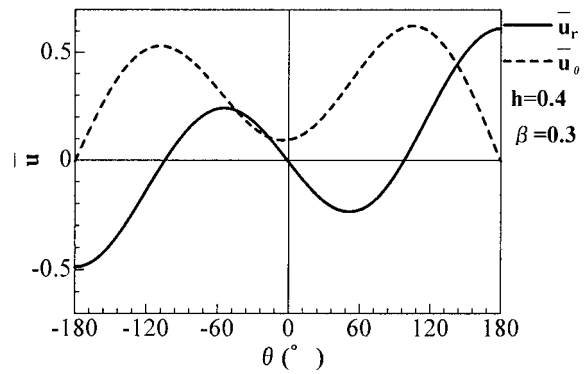


Fig. 13 Angular variation of dimensionless displacements.

von Mises 弾塑性体は 3・3 節で言及した通り, 線形等方弾性体と同じ形の微分方程式をしており, 線形等方弾性体と同様にき裂上下面で応力, 変位の対称性, 反対称性が存在し, その応力, 変位分布は線形等方弾性体と実数倍の関係にある。したがって,  $\beta$  が小さい場合には, von Mises 弾塑性体に近づく事から, 応力は, 線形等方弾性体と同じ傾向を示す事になる。ただし, 変位の値に関しては式 (23)<sub>5</sub> より,  $h$  が小さい場合には, 弾性ひずみに相当する変位が小さくなるためトータルの変位は小さくなっている。

また, Fig. 8, 9 に示す  $\beta$  が大きい場合には,  $\theta$  が  $\pi/3$  ( $= 60^\circ$ ) より大きな角度において, 全ての応力の絶対値が非常に小さくなっている。特に, この場合では, 引張周応力も非常に小さく線形等方弾性体において汎用されている引張周応力最大破壊基準の採用には注意が必要になる。実際, き裂先端近傍応力の漸近展開第 2 項に均一圧縮応力を考えると, この周応力は圧縮応力となる。本報告では, ダイラタンシー効果を示す係数  $\beta$  と物体の内部摩擦係数が一致した関連流れ則を用いており, 例えば,  $\beta = 0.7$  は, 非常に粗い材料であれば摩擦係数としては妥当ではあるが, ダイラタンシー係数としては非常に大きな値であり, 逆に  $\beta = 0.1, 0.3$  などは, ダイラタンシー係数としては妥当であるが, 内部摩擦係数としては, 小さ過ぎるであろう。これを区別するには非関連流れ則を用いた構成式での検討が必要になる。

また, 構成式から明白な事であるが, Fig. 6, 7, Fig. 10~13 に示すように, 線形硬化する Drucker-Prager 弾塑性体のモード II 型のき裂を考慮する場合,  $\beta$  の効果は  $h$  が小さい程顕著であり, 材料の硬化係数にくらべ弾性係数が非常に大きな材料を取り扱う場合, 弾性ひずみを無視した剛塑性モデルとした場合に, 特にダイラタンシー効果が顕著になることが分かる。

## 5 結 言

本報告では, 線形硬化する Drucker-Prager 弾塑性体の比例負荷下でのモード II 型のき裂先端近傍特異場の漸近解析を行った。その結果以下の事が分かった。

(1) 比例負荷下における Drucker-Prager 弾塑性体の特異性のオーダーは  $-1/2$  であり線形等方弾性体と一致する。

(2) 線形等方弾性体や von Mises 弾塑性体のモード II 型の場合と異なり, Drucker-Prager 型の場合は, ダイラタンシー効果の影響により, き裂面上に垂直応力  $\sigma_\theta$  が発生する。しかし, この時発生する  $\sigma_\theta$  は, き裂先端近傍の他の応力成分と比較すると非常に小さいものである。

(3) き裂先端近傍のき裂面の変位は, 閉じたままではあるが, その値は, 負となっている。すなわち, き裂面先端近傍のき裂面は, 線形等方弾性体や von Mises 弾塑性体のモード II 型の場合と異なり, き裂先端を中心に時計周りの方向に曲がって閉じていることが分かった。ただし, その大きさは, 応力拡大係数などと同じ意味で, 境界条件などによって異なるものであり, 本論文の漸近解析だけでは決まらない。

(4) パラメータ  $\beta$  によるダイラタンシー効果は  $h$  が低い程顕著であり,  $\beta$  が大きい場合には線形等方弾性体や von Mises 弾塑性体とは非常に異なった応力分布となる事が分かった。

緒言に述べたように, 本論文の目的は, 圧縮荷重下にある, 岩盤や地盤材料内のき裂進展メカニズムを考究することにある。その基礎的研究の第一歩として, これまでに報告された事が無かった圧力依存性の降伏関数を持つ弾塑性体のモード II 型の静止き裂先端近傍の応力や変位の漸近展開の第 1 項部分のみを求めた。しかしながら, 圧縮荷重下でのき裂先端近傍解には, 漸近解第 2 項, すなわちき裂先端からの距離  $r$  に依存しない圧縮応力項およびき裂面上の摩擦を考慮する事が非常に重要になる。<sup>21)</sup> 紙面の都合もあり, 第 2 項を考慮した結果は, 次報告として投稿する。

## 付 録

$$B_3 = 72\sqrt{J_2}\sqrt{J_2}Q_{r\theta}Q_r - 6(2\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z)\bar{\sigma}_{r\theta}\bar{\Lambda}, \quad (A1)$$

$$B_4 = 36\sqrt{J_2}\sqrt{J_2}(h + Q_r^2) + \{12\sqrt{J_2} - (2\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z)^2\}\bar{\Lambda}, \quad (A2)$$

$$B_5 = 36\sqrt{J_2}\sqrt{J_2}(Q_\theta Q_r - vh) - \{6\sqrt{J_2} + (2\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z)(2\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_z)\}\bar{\Lambda}, \quad (A3)$$

$$B_6 = 36\sqrt{J_2}\sqrt{J_2}(Q_z Q_r - vh) - \{6\sqrt{J_2} + (2\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z)(2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta)\}\bar{\Lambda}, \quad (A4)$$

$$C_3 = 72\sqrt{J_2}\sqrt{J_2}Q_{r\theta}Q_z - 6(2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta)\bar{\sigma}_{r\theta}\bar{\Lambda}, \quad (A5)$$

$$C_4 = 36\sqrt{J_2}\sqrt{J_2}(Q_r Q_z - vh) - \{6\sqrt{J_2} + (2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta)(2\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z)\}\bar{\Lambda}, \quad (A6)$$

$$C_5 = 36\sqrt{J_2}\sqrt{J_2}(Q_\theta Q_z - vh) - \{6\sqrt{J_2} + (2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta)(2\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_z)\}\bar{\Lambda}, \quad (A7)$$

$$C_6 = 36\sqrt{J_2}\sqrt{J_2}(Q_z^2 + h) + \{12\sqrt{J_2} - (2\bar{\sigma}_z - \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\theta)^2\}\bar{\Lambda}, \quad (A8)$$

$$X := 36\sqrt{J_2}\sqrt{J_2}C_6\bar{u}'_r + (B_6C_3 - C_6B_3)\bar{\sigma}'_{r\theta} + (B_6C_5 - B_5C_6)\bar{\sigma}'_\theta, \quad (A9)$$

$$Y := -36\sqrt{J_2}\sqrt{J_2}C_4\bar{u}'_r + (B_3C_4 - B_4C_3)\bar{\sigma}'_{r\theta} + (B_5C_4 - B_4C_5)\bar{\sigma}'_\theta. \quad (A10)$$

## 参 考 文 献

- 1) S. Nemat-Nasser and H. Horii, "Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation, and rockburst", Journal of Geophysical Research, Vol.87, pp.6805-6821 (1982).
- 2) C. H. Scholz, "The mechanics of earthquakes and faulting", pp.1-461 (1991) Cambridge University Press.
- 3) C. Yatomi and Y. Suzuki, "Finite element analysis of the energy release rate by using the E-integral under the compressive loads", Journals of the Japan Society of Civil Engineers, No.612, pp.251-263 (1999).
- 4) J. R. Rice and G. F. Rosengren, "Plane strain deformation near a

- crack tip in a power-law hardening material”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.16, pp.1-12 (1968).
- 5) J. W. Hutchinson, “Singular behaviour at the end of tensile crack in a hardening material”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.16, pp.33-31 (1968).
  - 6) S. M. Sharma and N. Aravas, “Determination of higher order terms in asymptotic elastoplastic crack tip solutions”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.39, No.8, pp.1043-1072 (1991).
  - 7) N. Aravas and D. A. Blazo, “Higher order terms in asymptotic elastoplastic mode III crack tip solutions”, *Acta Mechanica*, Vol.90, pp.139-153 (1991).
  - 8) J. Pan and C. F. Shih, “Elastic-plastic analysis of combined mode II and III crack-tip fields under small-scale yielding conditions”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.57, pp.259-267 (1990).
  - 9) J. Pan and C. F. Shih, “Elastic-plastic analysis of combined mode I and III crack-tip fields under small-scale yielding conditions”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.38, pp.161-181 (1990).
  - 10) J. Pan and C. F. Shih, “Elastic-plastic analysis of combined mode I, II and III crack-tip fields under small-scale yielding conditions”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.29, pp.2795-2814 (1992).
  - 11) P. Dong and J. Pan, “Plane-strain mixed-mode near tip fields in elastic perfectly plastic solids under small-scale yielding conditions”, *International Journal of Fracture*, Vol.45, pp.243-262 (1990).
  - 12) J. W. Hutchinson, “Plastic stress and strain fields at a crack tip”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.16, pp.337-347 (1968).
  - 13) S. Yang, Y. J. Chao and M. A. Sutton, “Complete theoretical analysis for higher order asymptotic terms and the HRR zone at a crack tip for mode I and mode II loading of a hardening material”, *Acta Mechanica*, Vol.98, pp.79-98 (1993).
  - 14) Q. X. Guo and K. Li, “The plastic zone ahead of a mode II plane strain crack”, *International Journal of Fracture*, Vol.35, pp.153-159 (1987).
  - 15) F. Z. Li and J. Pan, “Plane-strain crack-tip fields for pressure-sensitive dilatant materials”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.57, pp.40-49 (1990).
  - 16) F. Z. Li and J. Pan, “Plane-stress crack-tip fields for pressure-sensitive dilatant materials”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.35, No.6, pp.1105-1116 (1991).
  - 17) P. Dong and J. Pan, “Elastic-plastic analysis of cracks in pressure-sensitive materials”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.28, pp.1113-1127 (1991).
  - 18) H. Yuan and G. Lin, “Elastoplastic crack analysis for pressure-sensitive dilatant materials Part 1 : High-order solutions and two-parameter characterization”, *International Journal of Fracture*, Vol.61, pp.295-330 (1993).
  - 19) P. Papanastasiou and D. Durban, “Singular plastic fields in non-associative pressure sensitive solids”, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.35, No.2, pp.227-268 (1987).
  - 20) W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, “Numerical recipes in C”, pp.757-759 (1988) Cambridge University Press.
  - 21) Y. Suzuki and C. Yatomi, “Mode II crack extension behavior under compressive loads”, *Journal of Applied Mechanics, JSCE*, Vol.3, pp.25-35 (2000).