

面内および面外荷重下における各種の ひし形空孔を有する弾性体の逆解析†

生 水 雅 之* 平 島 健 一** 広 瀬 幸 雄*

Inverse Analysis for Elastic Medium with Various Lozenge Cavities under In-Plane and Out-of-Plane Loadings

by

Masayuki SHOZU*, Ken-ichi HIRASHIMA** and Yukio HIROSE*

The purpose of this paper is to show a highly accurate inverse analysis for the problem of lozenge cavity with sharp corner under in-plane and out-of-plane loadings, which is based on the complex variable method using a conformal mapping technique. A method of inverse analysis for the magnitude and direction of initial stresses is represented by use of the exact elastic solutions. The results of inverse analysis are in agreement with the analytic results on high accuracy.

Key words: Elasticity, Inverse analysis, Lozenge cavity, Exact elastic solution, Stress concentration, In-plane and out-of-plane loadings

1 緒 言

機械・構造物などの実用部材に内在する空孔などの欠陥または介在物などの周縁およびその近傍に作用する応力・変位を推定することは、それらの強度評価を行う上で重要である。近年、これらを推定する手法として境界要素法等の離散化手法を用いた逆解析¹⁾と呼ばれる研究が行われるようになり、欠陥に対する各種物性値を精度よく推定する数値解析の手法が開発されてきている。²⁾⁻⁷⁾ 一般に逆解析においては、同定すべきパラメータを仮定して順解析を行い、測定値および解析値の両者が十分近くなるようパラメータを反復修正する方法がよく採用されているが、その際得られた解は必ずしも一意性が成り立たない場合があり順解析に比較して難点がある。また、周知のように離散化手法は解析手段として一般的なものであり、その有効性も高いが、計算機の容量や計算時間および精度などの点から各種の制約を受けざるを得ない。これに対し著者らは、これまでに写像関数を用いた複素関数論によって求められる弾性厳密解を各種形状孔または剛体介在物に適用する研究を進めてきた。^{8),9)} そこで無限遠の任意方向より作用する面内および面外荷重下での2次元等方性弾性体内に鋭いコーナ部を有する単一の各種ひし形の空孔または剛体介在物に対して特異応力・変位について順解析を行った。本研究においてはそれらの成果に基づき、各種のひし形空孔が存在する場合に対して、孔周縁およびその近傍でのひずみを補助的入力情報として、逆解析を行い空孔を有する媒体に対する物性値または作用応力値の同定を行い、著者らの一人による既発表論文¹⁰⁾⁻¹²⁾との比較・検討を通して、それらの有効性につ

いて提示を行うことを目的とする。

2 順解析のための面内・面外問題に対する 解析理論

Fig. 1のように弾性無限体内に存在するひし形空孔を考え、その境界を含めた外部領域 (z -平面: 物理平面) を単位円の境界とその外部領域 (ζ -平面: 写像平面) に等角写像する関数を次式で定義する。⁹⁾

$$z = f(\zeta) = a \left\{ \zeta + \sum_{n=1}^m \beta_n \zeta^{-(2n-1)} \right\} / \left(1 + \sum_{n=1}^n \beta_n \right) \quad (1)$$

$$\beta_n = \left[\sum_{i=0}^n P_i Q_{n-1} \right] / (2n-1) \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{\pi - \omega}{\pi}, \quad Q = \frac{\omega}{\pi}, \\ P_0 &= -1, \quad P_n = -P_{n-1} \left\{ \frac{P - (n-1)}{n} \right\}, \\ Q_0 &= 1, \quad Q_n = Q_{n-1} \left\{ \frac{Q - (n-1)}{n} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 a はひし形空孔の長軸の半長を表し、 ω はコーナ部の開き角である。また、 m は写像関数の級数展開項を示しており、本研究においては $m=160$ に設定して解析を進めるものとする。

さて、このときひし形空孔の境界に沿う曲線座標 (ξ, η) の任意点における応力・変位を求める公式は面内問題に対し、2つの複素応力関数 $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ を用いると次式で示される。¹³⁾

$$\sigma_y + \sigma_x + 8iG\bar{\omega}/(\kappa+1) = 4\Phi'(\zeta)/f'(\zeta) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} \\ = 2[\overline{f(\zeta)}\Phi''(\zeta) + \Psi''(\zeta)]e^{2i\theta} \end{aligned} \quad (4)$$

† 原稿受理 平成7年10月31日 Received Oct. 31, 1995

* 正会員 金沢大学理学部計算科学科 〒920-11 金沢市角間町, Dept. of Mat. Sci. & Eng., Kanazawa Univ., Kakuma-machi, Kanazawa, 920-11

** 正会員 山梨大学工学部土木環境工学科 〒400 甲府市武田, Dept. of Civil & Envi. Eng., Yamanashi Univ., Takeda, Kofu, 400

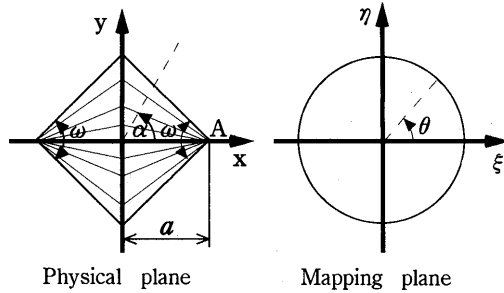


Fig. 1. Physical plane and Mapping plane.

$$2G(u_x - iu_y) = x\overline{\Phi(\zeta)} - [f(\zeta)\overline{\Phi'(\zeta)} + \Psi'(\zeta)]e^{i\theta}. \quad (5)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} e^{2i\theta} &= \zeta \cdot f'(\zeta) / \overline{\zeta} \cdot \overline{f'(\zeta)}, \\ e^{i\theta} &= \zeta \cdot f'(\zeta) / |\zeta| \cdot |f'(\zeta)|. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

x は等価ポアソン比と呼ばれ, 平面応力状態のとき $x = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ であり, 平面ひずみ状態のとき $x = 3 - 4\nu$ をとる. また G , ν および ω はそれぞれせん断弾性係数, ポアソン比および回転角である.

写像平面における境界上の点を $\zeta = \sigma e^{i\theta}$ とすると, 式(3), (4)および式(5)から, 境界条件は統一的に次式のように表せる.

$$k_0 f'(\sigma)\overline{\Phi(\sigma)} - f(\sigma)\overline{\Phi'(\sigma)} - \Psi'(\sigma) = 0. \quad (7)$$

ここに, パラメータ k_0 は孔縁が自由境界の場合においては $k_0 = -1$ となる. なお, 記号 ' は関数の ζ に関する微分を表し, $\overline{\quad}$ は複素共役を表す. ここで複素応力関数を次式のように設定する.

$$\overline{\Phi(\zeta)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^{-n}, \quad \Psi'(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^{-n} \quad (8)$$

ここに A_n , B_n は境界の形状, 作用荷重により決定される未知の複素係数である. また, 式(8)において A_0 , B_0 および A_1 , B_1 については荷重条件および回転型, 平進型の食違いを生じない条件を設定すれば, 次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \sigma_0 / 4R_m, \\ B_0 &= -(\sigma_0 / 2R_m^2) e^{-2i\alpha}, \\ A_1 &= B_1 = 0, \quad R_m = (1 + \sum_{n=1}^m \beta_n) / a. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここに, σ_0 は無限遠により作用する一軸引張応力であり, α は無限遠から作用する応力を x 軸より反時計回りに測った角度である. したがって座標軸方向の応力成分 σ_x^∞ , σ_y^∞ および τ_{xy}^∞ との間に関係式が成り立つ.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^\infty &= \sigma_0 \cos^2 \alpha, \\ \sigma_y^\infty &= \sigma_0 \sin^2 \alpha, \\ \tau_{xy}^\infty &= \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式(8)を式(7)に代入し整理すると係数 A_n および B_n の満たすべき関係は最終的に式(11)~(13)のようになる.

$$\begin{aligned} k_0 h_{2,\infty}^n \frac{\overline{A_n}}{(n-1)} - k_0 \left\{ \sum_{p=2-n}^{2m-n} \frac{(n+p-1)}{(2n+p-1)} \beta_{(n+p)/2} \overline{A_{2n+p}} \right\} \\ + h_{1,2}^n \left\{ \sum_{p=4n}^{2m-n} h_{1,n+p-2}^n \beta_{(n+p)/2} A_p \right\} = -\delta_{2n} R_m B_2 \end{aligned}$$

$$-h_{2,2m}^n \beta_{(n/2)} A_0, \quad (n=2, 4, 6, \dots, 2m). \quad (11)$$

$$\begin{aligned} h_{2,\infty}^n A_n - \frac{R_m}{(n+1)} B_{n+2} + \left\{ \sum_{p=2-n}^{2m-n} \beta_{(n+p)/2} A_{2n+p} \right\} \\ - k_0 h_{1,2}^n \left\{ \sum_{p=4-n}^{2m-n} h_{1,n+p-2}^n (n+p-1) \beta_{(n+p)/2} \frac{\overline{A_p}}{(p-1)} \right\} \\ = -k_0 h_{2,2m}^n (n-1) \beta_{(n/2)} A_0, \quad (n=2, 4, 6, \dots, 2m). \quad (12) \end{aligned}$$

$$k_0 \left\{ \sum_{j=1}^m \beta_j \overline{A_{4j}} \right\} - R_m B_2 - \left\{ \sum_{j=1}^m \beta_j A_{2j} \right\} = -A_0 (k_0 - 1). \quad (13)$$

ここに, δ_{ij} は Kronecker のデルタであり, $h_{r,p}^r$ は次式で定義される量である.

$$h_{r,p}^r = \sum_{s=p}^q \delta_{rs} = \begin{cases} 0 & \dots r < p, \quad q > r, \\ 1 & \dots p \leq r \leq q. \end{cases} \quad (14)$$

式(11)は $(2m)$ 元の連立一次方程式であり A_n について解くことができる. 続いてその結果を式(12)および式(13)に代入することにより係数 B_n を求めることができ, 必要とする複素応力関数 $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ が最終的に決定できることになる. 以上の定式化は Y. Kohnno らによる複素係数の場合分けを行う解析法¹⁵⁾とは異なった手法を用いており, 任意の開き角 ω を有するひし形空孔に対して効率よく解析が行える工夫がなされている.

次に面外問題について考える. 写像関数は面内問題と同一で式(1)で与えられる. ひし形空孔の境界に沿う曲線座標 (ξ, η) の任意点における応力・変位は, 複素応力関数 $\phi_0(\zeta)$ を用いて次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{yz}^\infty - 2\text{Re}[\phi_0'(\zeta)], \\ \tau_{xz} &= \tau_{xz}^\infty - 2\text{Im}[\phi_0'(\zeta)], \\ u_z &= -2\text{Im}[\phi_0(\zeta)]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここで, 上式中の $\phi_0(\zeta)$ を次式のように設定する.

$$\phi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^{-n}. \quad (16)$$

この場合, c_n を空孔の境界条件のもとに定めれば複素応力関数が決定され, 応力・変位成分が式(15)で求められることになる. ここに, τ_0 を無限遠から作用する面外せん断応力とすれば, 座標軸方向の応力成分 τ_{yz}^∞ および τ_{xz}^∞ との間に関係が成り立つ.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}^\infty &= \tau_0 \cos \alpha, \\ \tau_{yz}^\infty &= \tau_0 \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

なお, 空孔の形状および隅角部の曲率が変化した場合の c_n の値が著者らによってすでに報告されているので^{8), 10)} ここでは省略する.

3 各種ひし形空孔を有する逆解析法

逆解析は, 前節までのひし形空孔を有する2次元等方性弾性体問題に関する弾性厳密解を用いた直接定式化法により行うものとする¹¹⁾. 同定パラメータとして, ①無限遠からの面内引張応力 σ_0^∞ または面外せん断応力 τ_0^∞ , ②無限遠からの応力の作用方向角 α である. 本研究においては, 材料の物性は別途引張試験などから同定可能であることを考慮し, 弾性係数 E は既知として解析を行うものとする. なお材料のポアソン比 ν は本来同定すべきパラメータのひとつであるが解析結果に及ぼす影響が少ないことから $\nu = 0.25$ の既知量として与えることとした.

入力データは以下のように取り扱う。まず、Fig. 2に示すように物理平面上の各種開き角を有するひし形空孔の測線長さBCを4等分し、コーナ点BおよびCを除く、各位置を $BC|_{(1/4)}$ 、 $BC|_{(2/4)}$ および $BC|_{(3/4)}$ とする。次にそれぞれの位置において孔の内壁にひずみゲージを貼り付け、各応力負荷に伴うひずみの変化量を測定するものとし、それらを測定ひずみ $\varepsilon_{BC|1}$ および $\gamma_{BC|1}$ とする。ここに、 $\varepsilon_{BC|1}$ は面内荷重に対する孔壁の接線方向のひずみ(ε_y)を、 $\gamma_{BC|1}$ は面外荷重に対する孔壁の面外方向のせん断ひずみ(γ_{yz})を表す。その際、 $\gamma_{BC|1}$ は3軸ロゼットゲージを用い、求められた直ひずみをせん断ひずみに換算し測定ひずみとしている。他方、解析ひずみの場合すなわちFig. 2における測線長さBCの(1/4)~(3/4)の各点でのひずみは、前述の同定パラメータを適宜与えることにより次式で容易に求めることができ、それらを $\varepsilon_{BC|1}^*$ 、 $\gamma_{BC|1}^*$ と表す。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_y &= (\sigma_y - \nu\sigma_x)/E \equiv \varepsilon_{BC|1}^* \\ \gamma_{yz} &= \tau_{yz}/G \equiv \gamma_{BC|1}^* \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここに、下添字のIは孔壁での測定位置を示しており、 $I=(1/4)$ 、 $(2/4)$ および $(3/4)$ である。したがって、孔壁のゲージ計測より求められる測定値($\varepsilon_{BC|1}$ 、 $\gamma_{BC|1}$)および式(18)より求められる解析値($\varepsilon_{BC|1}^*$ 、 $\gamma_{BC|1}^*$)が次式に示す最小化目的関数 J_1 および J_2

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \sum_{i=1}^3 (\varepsilon_{BC|1}^* - \varepsilon_{BC|1})^2 \leq \varepsilon_{er}^2 \\ J_2 &= \sum_{i=1}^3 (\gamma_{BC|1}^* - \gamma_{BC|1})^2 \leq \gamma_{er}^2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

を満足するまで、DAVIDONの法¹⁶⁾に基づき各パラメータを逐次変化させながら反復計算を行うことにより、効率よく最適パラメータが同定できることになる。ここに、 ε_{er} および γ_{er} は許容誤差を示しており、本研究においては通常の金属材料を対象とするものとして、 $\varepsilon_{er}^2 = \gamma_{er}^2 = 2.0 \times 10^{-9}$ に設定を行っており、また反復計算の上限回数数は 1.0×10^6 とした。以上述べた逆解析をフローチャートにまとめるとFig. 3のようになる。図において①各パラメータの初期値、増分値を適当に設定する。②式(19)で示される最小化目的関数 J_1 および J_2 の残差二乗和を求める。③DAVIDONの方法を用いて J_1 および J_2 を最小にする最適パラメータを求める。④収束判定条件 2.0×10^{-9} を満たすパラメータを最適値として反復計算を終了する。なお、後述の同定精度に関してDAVIDONの方法と方程式の代表的解法であるはさみうち法とはほぼ同一の精度で一致することが確認されている。

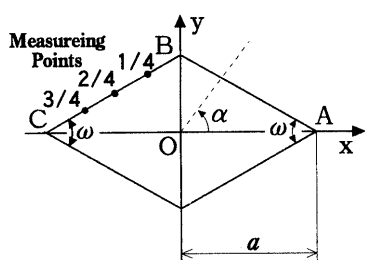


Fig. 2. Measuring points of strain for lozenge cavity.

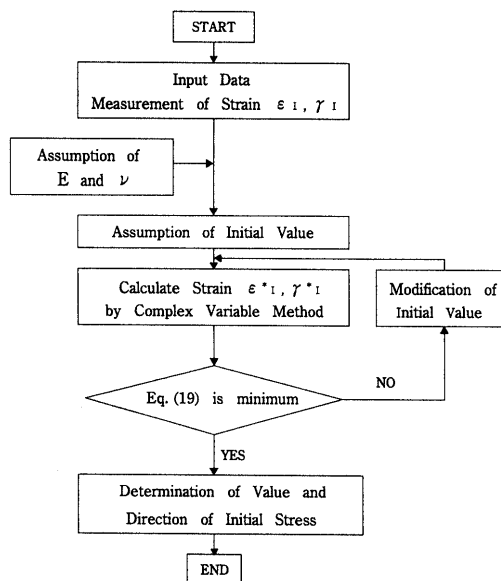


Fig. 3. Flow chart of inverse analysis.

本論文中に示す弾性厳密解を用いることにより任意の位置での解析が容易であるため、逆解析のために計算すべき点はひずみゲージの計測点に対応した位置のみでよいことになる。したがって、繰返し計算を伴う場合でも境界要素法、有限要素法などの離散化手法に比べて短時間でかつ極めて効率よく解析を行うことが可能である。

4 数値計算例

4.1 順解析によるひずみの計算例

まず、Fig. 4に面内荷重下でひし形孔の開き角 ω を変化させたとき、荷重の作用方向角 α と孔境界の測線 $BC|_{(1/4)-(3/4)}$ の各点におけるひずみ $\varepsilon_{BC|1}$ の関係について弾性厳密解に基づき求めた結果を示す。同様にFig. 5に、面外荷重下でのせん断ひずみ $\gamma_{BC|1}$ について求めた結果を示す。両図において各測定位置での応力の作用方向角 α に対するひずみの変化は面内および面外問題でそれぞれ異なった傾向を示すことが観察され、逆解析を行う上でのひずみの有意差が認められる。なお、これらの図は次項で示す逆解析の際に必要な資料である。以上に示したように、本手法によれば空孔形状、作用応力、作用方向および弾性係数が設定されれば、順解析結果として孔周縁(孔の周辺部も含む)での任意点での面内および面外荷重に対応した応力、変位およびひずみが厳密にかつ容易に求められる。

4.2 逆解析による作用応力値の計算例

各種ひし形空孔に関する物性値または同定するために、Fig. 4~5の順解析で得られたひずみの計算結果に基づき、逆解析のための入力データを作成する。Table Iに面内荷重下のデータを、Table IIに面外荷重下のデータをそれぞれ示す。両表において、Case AおよびCase Dに示すデータは、得られた測定ひずみを入力データとしたものであり、またCase BおよびCase Eに示すデータは計測に測定誤差が伴うことを考慮して、測定ひずみをそれぞれ $\pm 5\%$ の範囲でランダム変化させたものを示している。さらにCase CおよびCase Fに示すデ

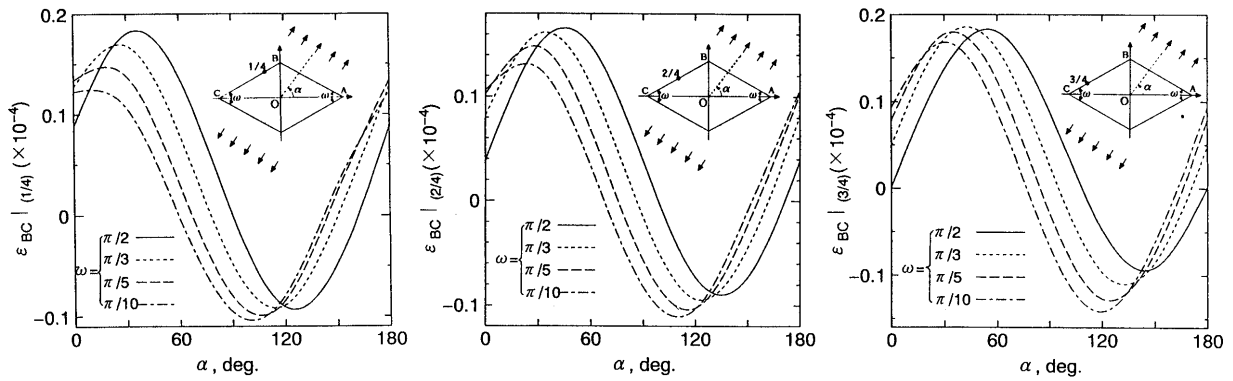


Fig. 4. Results of analysis at the boundary of lozenge cavity under in-plane loading.

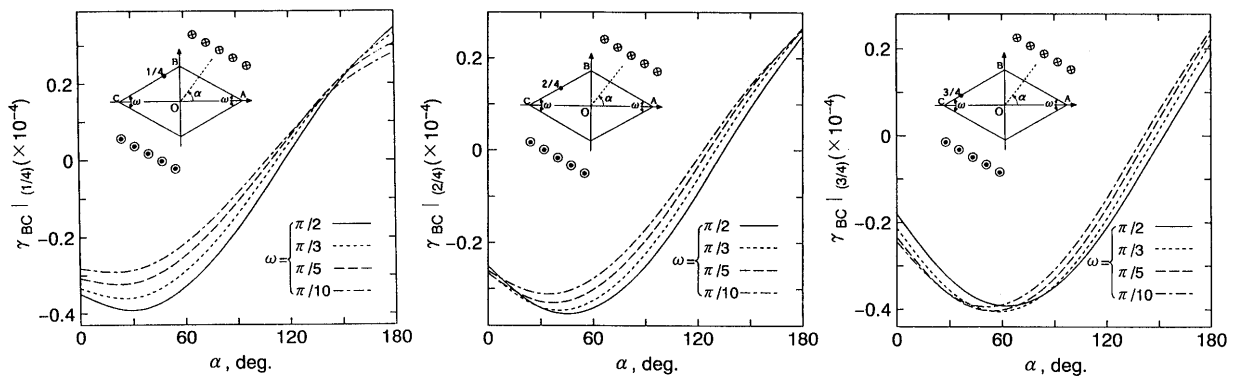


Fig. 5. Results of analysis at the boundary of lozenge cavity under out-of-plane loading.

Table I. Input data for inverse analysis under in-plane loading ($\times 10^{-4}$).

ϵ	ω	α (deg)				Remarks
		$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/5$	$\pi/10$	
$\epsilon_{BC} (1/4)$		0.137	0.081	0.031	-0.0023	Case A
		0.140 (+2%)	0.082 (+1%)	0.030 (-3%)	-0.0022 (-5%)	Case B
		0.148 (+8%)	0.070 (-14%)	0.037 (+19%)	-0.0026 (+13%)	Case C
$\epsilon_{BC} (2/4)$		0.149	0.112	0.068	0.033	Case A
		0.143 (-4%)	0.115 (+3%)	0.072 (+5%)	0.032 (-3%)	Case B
		0.165 (+11%)	0.101 (-10%)	0.059 (-15%)	0.035 (+6%)	Case C
$\epsilon_{BC} (3/4)$		0.181	0.160	0.124	0.088	Case A
		0.179 (-1%)	0.152 (-5%)	0.126 (+2%)	0.092 (+4%)	Case B
		0.166 (-8%)	0.184 (+15%)	0.116 (-6%)	0.090 (+2%)	Case C

Table II. Input data for inverse analysis under out-of-plane loading ($\times 10^{-4}$).

γ	ω	α (deg)				Remarks
		$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/5$	$\pi/10$	
$\gamma_{BC} (1/4)$		-0.329	-0.289	-0.248	-0.215	Case D
		-0.339 (+3%)	-0.295 (+2%)	-0.260 (+5%)	-0.217 (+1%)	Case E
		-0.379 (+15%)	-0.253 (-12%)	-0.264 (+6%)	-0.176 (-19%)	Case F
		-0.342	-0.325	-0.302	-0.278	Case D
		-0.328 (-4%)	-0.338 (+4%)	-0.299 (-1%)	-0.269 (-3%)	Case E
		-0.318 (-7%)	-0.353 (+9%)	-0.365 (+21%)	-0.265 (-5%)	Case F
$\gamma_{BC} (3/4)$		-0.392	-0.405	-0.401	-0.389	Case D
		-0.399 (2%)	-0.393 (-3%)	-0.381 (-5%)	-0.381 (-2%)	Case E
		-0.353 (-10%)	-0.449 (+11%)	-0.346 (-14%)	-0.452 (+16%)	Case F

ータは貼り付けるゲージがその箇所で一定の面積を占めることを考慮し、前述の $BC |_{(1/4)-(3/4)}$ の各測定点を中心に測線方向に沿った $\pm(a/10)$ の領域内において、さらに $(a/50)$ きざみの測定値を採用し、得られたデータの最大値および最小値の範囲内でランダム変化させたものである。表中には参考のため Case A および Case D に対しての差異を括弧内に示してある。以上の入力データに基づき、式(19)にしたがって各パラメータを逆解析した結果を Table III および IV に示す。両表において Analysis A, B および Analysis D, E に示す数値は、い

ずれも無限遠からの初期応力 σ_0^* または τ_0^* および応力の作用方向角 α を高精度で同定できていることが分かる。また、Case C および Case F に示す入力値の場合、初期応力 σ_0^* および τ_0^* に見られるように精度が幾分悪くなっていることが分かる。このことは、著者らの一人によってすでに報告されており¹²⁾、各同定パラメータの収束性の相違に起因するものである。

5 結 言

等方性弾性体内の無限遠に任意傾斜の面内および面外荷重が作用する場合の、各種ひし形空孔の境界およびそ

Table III. Results of inverse analysis using Table I (unit ; MPa or deg.).

Correct Answer	σ_0°	α	E	Remarks
	1.00	60.0	10000	
$\omega = \pi/2$	1.00	60.0	10000*	Analysis A
	1.00	60.0	10000*	Analysis B
	0.98	60.0	10000*	Analysis C
$\omega = \pi/3$	1.00	60.0	10000*	Analysis A
	1.00	60.0	10000*	Analysis B
	0.98	60.0	10000*	Analysis C
$\omega = \pi/5$	1.00	60.0	10000*	Analysis A
	1.01	60.0	10000*	Analysis B
	1.03	59.9	10000*	Analysis C
$\omega = \pi/10$	1.00	60.0	10000*	Analysis A
	0.98	59.9	10000*	Analysis B
	0.96	59.8	10000*	Analysis C

*Fixed to correct answer.

Table IV. Results of inverse analysis using Table II (unit ; MPa or deg.).

Correct Answer	τ_0°	α	E	Remarks
	1.00	60.0	10000	
$\omega = \pi/2$	1.00	60.0	10000*	Analysis D
	1.00	60.0	10000*	Analysis E
	1.00	60.0	10000*	Analysis F
$\omega = \pi/3$	1.00	60.0	10000*	Analysis D
	1.00	60.0	10000*	Analysis E
	0.99	60.0	10000*	Analysis F
$\omega = \pi/5$	1.00	60.0	10000*	Analysis D
	1.01	60.0	10000*	Analysis E
	1.02	59.9	10000*	Analysis F
$\omega = \pi/10$	1.00	60.0	10000*	Analysis D
	0.99	60.0	10000*	Analysis E
	0.98	59.9	10000*	Analysis F

*Fixed to correct answer.

の近傍における計測値を用いて逆解析理論の提示を行うとともに、具体的数値計算例を通して本解析法の有効性

を示した。ここで行った提示は、弾性厳密解に基づき理論的に閉じた型の解を基本とするものであり解析精度が高く、有限要素法や境界要素法などの離散化手法に比べて計算機の容量、計算時間への依存性が少なく優れた手法であると言える。また、本結果は従来までの研究者により求められた面内問題での解を特殊な場合として包含するとともに、面外荷重問題に拡張したものになっている。

参 考 文 献

- 久保司郎, “逆問題”, p.1 (1992) 培風館.
- 日本機械学会編, “逆問題のコンピュータアナリシス”, p.81 (1991) コロナ社.
- 古口日出男, 渡部 浩, 日本機械学会論文集, A-60, 2863 (1994).
- 古口日出男, 渡部 浩, 矢田敏夫, 日本機械学会論文集, A-60, 1029 (1994).
- 阪上隆英, 久保司郎, 大路清嗣, 山本賢治, 中塚顕二, 日本機械学会論文集, A-56, 27 (1990).
- 天谷賢治, 早瀬仁則, 植田昌克, 青木 繁, 材料, 44, 238 (1995).
- 尾田十八, 服部 誠, 日本機械学会論文集, A-58, 1376 (1992).
- 生水雅之, 平島健一, 広瀬幸雄, 日本機械学会論文集, A-61, 326 (1995).
- 生水雅之, 平島健一, 広瀬幸雄, 日本機械学会論文集, A-61, 1595 (1995).
- 平島健一, 川上哲太郎, 藤原紀夫, 山下幸夫, 土木学会論文集, 3-16, 37 (1991).
- 山下幸夫, 藤原紀夫, 平島健一, 材料, 43, 1366 (1994).
- 山下幸夫, 平島健一, 材料, 44, 219 (1995).
- 森口繁一, “2次元弾性論”, p.12 (1956) 岩波書店.
- N. I. Muskhelishvili, “Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity”, 4th ed., p. 114 (1963) Noordhoff.
- Y. Kohno and H. Ishikawa, Int. J. Engng Sci., 32, 1749 (1994).
- 小谷恒之, 大阪大学大型計算機センター・ニュース, 32, 27 (1979).