

経路選択行動のday-to-dayダイナミクスと交通ネットワーク均衡の形成プロセス

中山 晶一朗¹

¹正会員 金沢大学大学院准教授 自然科学研究科社会基盤工学専攻(〒920-1192 金沢市角間町)

E-mail: snakayama@t.kanazawa-u.ac.jp

本研究では、個々の道路利用者は、日々変動する交通状況下にて、ベイズ学習に基づいた経路選択を行うと仮定し、交通ネットワークフローのday-to-dayダイナミクスモデルを構築する。本モデルにより、ベイズ学習による経路選択では最小旅行時間となった回数が多い経路を日々選択するという単純なものとなることを示す。そして、そのモデルの均衡点がワードロップ均衡であること、さらに、個々の道路利用者の初期のばらつきが十分に大きい場合、ワードロップ均衡は大域的漸近安定で、十分に時間が経過するとその均衡に収束することを示す。

Key Words : Bayesian learning, day-to-day dynamics, stability of Wardrop equilibrium

1. はじめに

交通ネットワークの分析に対して、その均衡モデルの果たす役割は大きいと言えよう。近年、交通ネットワーク均衡モデルの動的化に関して、多くの研究がなされている¹⁾。しかし、研究が比較的進展している均衡モデルの動的化は、一日の交通状態を時間帯別に記述するダイナミクスや時々刻々の渋滞伸延等の記述を目指すより詳細なダイナミクスのtime-to-timeに関するものが中心であり、ダイナミクスのうち日々の変化に注目するday-to-dayに関するダイナミクスについては、以下で述べるような研究があるものの、基本的な問題が未だ十分には解明されていない部分も多く、研究の進展が望まれている。

交通ネットワークにおけるday-to-dayダイナミクスは、交通ネットワーク均衡の安定性やその成立条件がいかなるものかという問題に直結する。ワードロップ均衡²⁾は広く用いられているが、以下で詳述するように、その成立条件や形成過程など基本的な性質は必ずしも十分に明らかにはされていない部分がある。実務的にも近年「均衡配分」としてワードロップ均衡が多用されているが、それを適切に適用するためにも、このような成立条件や形成過程を明らかにすることは極めて重要と思われる。また、交通ネットワークのday-to-dayダイナミクスに関する研究は、交通ネットワーク制御・管理を考える上でも非常に重要である。

本研究では、交通ネットワーク上を走行する道路利用者の経路選択行動及びその学習のモデル化を行う。そして、道路利用者の経路選択行動及びその学習モデルを用いてネットワークフローのday-to-dayダイナミクスの定式化を行う。これらを用いて、交通ネットワーク均衡の安定性やその成立条件等を考察することが本研究の目的である。

本研究では、道路利用者は、日々の走行経験・走行結果に基づき、どの経路を選択すべきかを学習するものとする。そして、道路利用者の学習として、ベイズの定理に基づいたベイズ学習を採用する。これまでに小林・藤岡³⁾やJhaら⁴⁾がベイズ学習に基づく経路選択行動等について考察している。両者はともに、旅行時間は正規分布に従うと仮定し、道路利用者が認知する旅行時間の平均及び分散をベイズの定理に基づいて更新するというものである。Jhaら⁴⁾はこのベイズ学習による旅行時間の平均と分散の更新に基づいた経路選択を取り入れたシミュレーション分析を行っている。また、小林・藤岡³⁾はベイズ学習により合理的期待⁵⁾が成立することを示している。これらの研究と異なり、本研究では、経路が最小旅行時間となる確率(可能性)に基づいて経路を選択すると仮定し、旅行時間のベイズ学習ではなく、経路が最小旅行時間となる確率をベイズ学習により日々更新するものとする。この利点としては、学習が単純になり、次章以降で述べるように、各道路利用者ほどの経路が最小旅行時間であったのか

のみを記憶するだけでよく、一般ネットワークにも比較的容易に適用可能であることが挙げられる。旅行時間に対してベイズ学習を行い、その学習した旅行時間を基に経路が最小旅行時間となる確率が最も高い経路を選択するという方法も考えられ、それは結果的には本研究が採用する経路の最小旅行時間となる確率を直接学習するのと同じになるかもしれない。しかし、この場合も、一般ネットワークへの適用は困難であり、均衡の安定性等を検討することは難しいと思われる。

道路利用者の学習を考えることの一つの利点は、ネットワークフローの day-to-day ダイナミクスや均衡の安定性について考えることが可能となることである。これまでの day-to-day ダイナミクスや安定性に関する研究は大きく 2 種類に分けられることが出来よう。一つは、フローや交通量をマクロ的に扱い、日々の変化のマクロ量（交通量）自体を直接モデル化する研究である。もう一つは、個々の道路利用者の行動を記述するモデルを用いる研究である。前者をマクロアプローチ、後者をマイクロアプローチと呼ぶことにする。本研究や上で述べたベイズ学習による研究は道路利用者の学習や行動をモデル化しているため、マイクロアプローチと言えよう。マイクロアプローチでは、(確定的) 効用理論もしくはランダム効用理論のいずれかに基づいて行動が決定されるものが多く、研究の違いはどのようにネットワーク状況を学習するのかにあると考えられる。ベイズ学習以外では、経路選択の際に考慮される認知旅行時間を過去の旅行時間の重み付き平均として学習する研究が多い^{6),7),8),9),10)}。これらの研究では、ランダム効用理論による経路選択に基づいており、確率的利用者均衡¹¹⁾の安定性やそれへの収束可能性などが検討されている。より人間の意思決定に近いモデルとして、if-then ルールを用いて、経路選択の帰納的学習を取り入れたシミュレーションモデルによる研究も行われている¹²⁾。一方、マクロアプローチではワードロップ均衡の安定性等の検討が行われている^{13),14),15),16)}。

上述の解析的・シミュレーションモデル以外の交通ネットワークの day-to-day ダイナミクスの研究として、室内実験による研究がいくつか行われている^{17),18),19),20)}。室内実験による研究では、実際の人間の被験者によるものであるため、より現実性の高い結果が得られる点では優れている。しかし、個々人がどのように考えて経路選択や学習を行ったのかを詳細に考察することは一般に難しい。

既に述べたように、本研究は、交通ネットワーク均衡の成立条件や形成過程について検討することが目的である。それらのことを詳細に行うためには、経路選択行動やそのための学習といった行動論的な知見を得ることも重要である。このためには、室内実験よりも、

解析的・シミュレーション研究の方が望ましいと思われる。マクロアプローチによる解析的・シミュレーション研究^{13),14),15),16)}では、行動論的背景が明確にはされておらず、マクロ量（交通量）の変化が直接モデル化されている。一方、マイクロアプローチで扱われているのは確率的利用者均衡¹¹⁾の安定性であり、ワードロップ均衡に関してはほとんど検討されていない。また、ベイズ学習を用いた小林・藤岡³⁾及びその関連研究である小林⁵⁾や Jha⁴⁾の研究では均衡の安定性の検討などは行われていない。これまでの均衡の安定性や day-to-day ダイナミクスの研究の観点からは、道路利用者の学習や行動を含めて、ワードロップ均衡の安定性等を検討することが本研究の目的である。

2. ベイズ学習

本研究では、既に述べたように、道路利用者の経路選択の学習に対し、ベイズ学習を適用する。このような人間の意思決定にベイズの定理を用いることは古くから行われてきており²¹⁾、統計学、経済学、心理学、オペレーションズ・リサーチ等々様々な分野で研究が進められてきた。

統計学やオペレーションズ・リサーチの分野では、ベイズ推定や不確実性下での意思決定問題などが取り扱われている一方、経済学では、それらの意思決定を行う主体の集合としてのシステムの挙動をも研究対象としている。ベイズ学習と需要・供給の(経済)均衡の関係について研究^{22),23)}などベイズ学習及び均衡の収束等に関する様々な研究が行われてきているが、繰り返しゲームにおける仮想的プレイ (fictitious play) が本研究との類似性が高く、それらで得られた知見を交通システムのワードロップ均衡に適用したのが本研究の成果ともみなせる。

仮想的プレイは Brown²⁴⁾や Robinson²⁵⁾等により研究が始まり、1990年代から繰り返しゲームの中で急速に研究が進められている。仮想的プレイ (fictitious play) とは、ゲームにおける対戦者が出す戦略はその対戦者がこれまでに出した戦略の比率(経験分布)の通りに出すとし、自分の戦略を決定するプレイである。このように相手が出す戦略はその経験分布に従うとの仮定はベイズ学習として解釈することができる²⁶⁾。

本章では、道路利用者は最小旅行時間となる確率が最も高いと考える経路を選択すると仮定し、その道路利用者が各経路が最小旅行時間となる確率を走行後に判明する経路情報に基づいてベイズ学習とした経路選択学習について考察する。このような経路選択における学習は、離散選択問題のパラメー

タ推定と捉えることができる。このような離散選択のパラメータ推定はベイズ統計学・ベイジアン統計学の中で発展してきている²⁷⁾。本章の以下の部分では、これらのベイジアン統計学で用いられる内容を経路選択問題に適用させる。

(1) 道路利用者に関する仮定

本研究では、確定的なフローダイナミクスを扱うが、道路利用者は事前には各経路・リンクの旅行時間を知ることはできないとする。したがって、各道路利用者は日々変化する経路旅行時間は確率的に変動しているものとして認識すると仮定し、各経路が最小旅行時間となる確率をベイズ学習により学習するものとする。繰り返しになるが、フローダイナミクス自体は確定的に行われるものの、道路利用者はフローは確率変動すると認識し、経路を選択する。しかし、これまでの走行経験や交通状況を基に経路選択自体は確定的に行う。よって、フローダイナミクスは確定的となる。

道路利用者は合理的であり、出来るだけ旅行時間の短い経路を選択しようとするとして仮定する。上で述べたように、道路利用者は、フローは確率変動、すなわち、旅行時間が確率的に変動すると認識している場合、合理的な道路利用者の経路選択の前提となる旅行時間の短い経路を選択するという選好は、「平均旅行時間が短い経路を選択する」と考えることも出来るが、「旅行時間が最小となる確率が最も大きい経路を選択する」と考えることも可能である。本研究では、道路利用者は旅行時間が最小となる（主観的）確率が最も大きい経路を選択すると仮定する。

上で述べた最小旅行時間となる確率に基づく経路選択を行う道路利用者を考えるにあたり、各道路利用者はトリップ終了後、どの経路が最小旅行時間経路であったのかを知ることができると仮定する。各道路利用者は全ての経路の実現した旅行時間を正確に知っている、もしくは、道路管理者や車両のナビゲーション等が道路利用者にとどの経路が最小旅行時間経路であったのかを知らせるなどという状況が想定される。

本稿では、同一の OD ペア間でトリップを行う道路利用者は全員同じ経路選択肢集合を持ち、それぞれが毎日その OD ペア間のトリップを行うと仮定する。また、道路利用者は、全員、同じ最小旅行時間経路情報（上述のどの経路が最小旅行時間であったのかという情報もしくはそれを正しく認識できるための情報）を持ち、次節で詳述するベイズの定理に従う方法により、経路が最小旅行時間となる主観的確率を日々学習すると仮定する。このように同一 OD ペア間では道路利用者は同質であると仮定する。

OD ペア $i (\in I)$ の (OD) 交通量（道路利用者数）は固定値であり、それを q_i とする。ここで、 I は OD ペアの集合である。OD ペア i の経路 $j (\in J_i)$ が最小旅行時間経路となる（主観的）確率を π_{ij}° とする。ただし、OD ペア i の経路集合は J_i であり、 $|J_i|$ は集合 J_i に含まれる要素数（OD ペア i の経路数）である。また、リンク $a (\in A)$ の旅行時間関数を $c_a(\cdot)$ とする。ここで、 A はリンク集合である。本研究では、リンク旅行時間関数は狭義単調増加であると仮定する。

(2) 学習モデル

前節で述べたように、本研究では、道路利用者がそれぞれの経路が最小旅行時間となる確率を日々更新することが学習である。

第 n 日目に OD ペア i の各経路が最小旅行時間となる主観的確率が $\pi_{in}^\circ = (\pi_{i1n}^\circ, \pi_{i2n}^\circ, \dots, \pi_{i|J_i|n}^\circ)^T$ である場合、その日に経路 j が最小旅行時間経路となる確率はベルヌイ分布に従う。ただし、 T は行列もしくはベクトルの転置である。ここで、ベルヌイ分布とは、二項分布の特殊形であり、その確率関数は $\pi_{ijn}^{d_{ijn}} (1 - \pi_{ijn}^\circ)^{1 - d_{ijn}}$ である。なお、 d_{ijn} は OD ペア i の経路 j が n 日目に最小旅行時間となる場合は 1 となり、最小旅行時間とならない場合は 0 となる変数である。

経路が最小旅行時間となるかどうかに関して、 π_{in}° が与えられると、 $\mathbf{d}_{in} = (d_{i1n}, d_{i2n}, \dots, d_{i|J_i|n})^T$ は、 $\sum_{j \in J_i} d_{ijn} = 1$ とすると、以下のカテゴリカル分布に従うことになる。

$$g(\mathbf{d}_{in} | \pi_{in}^\circ) = \prod_{j \in J_i} \pi_{ij}^{d_{ijn}} \quad (1)$$

なお、カテゴリカル分布は、試行回数が 1 回のみ（ $\sum_{j \in J_i} d_{ijn} = 1$ ）の多項分布であり、多項分布の特殊形と言える。

各道路利用者が考えるように、旅行時間が確率的であり、その確率分布が連続確率分布である場合、複数の経路の旅行時間が等しくなる確率は 0 であり、 d_{ijn} は 0 もしくは 1 をとり、 $\sum_{j \in J_i} d_{ijn} = 1$ となる。つまり、最小旅行時間となる経路は各 OD ペアで一つのみとなる。ただし、旅行時間が離散確率分布に従う場合や確定的である場合は、最小旅行時間となる経路が複数となる可能性がある。このような複数の経路が最小旅行時間となる場合の拡張については次章で述べることとし、本節では道路利用者が認識する交通システムメカニズムを取り扱っており、そこでは経路が同時に最小旅行時間となることはないものとして議論を進める。

前節で述べたように、道路利用者は、ベイズの定理に基づき、経路の最小旅行時間確率を日々更新する。確率事象 A, B について、 $\Pr[A|B] = \Pr[B|A] \Pr[A] / \Pr[B]$ が

成立することがベイズの定理である。ただし、Pr[.]は生起する確率を算出するオペレータである。本研究では、確率事象 **A** に相当するのが、道路利用者が考える経路が最小旅行時間となる確率（経路の最小旅行時間確率）であり、道路利用者の学習の中では、経路の最小旅行時間確率は確定値ではなく、確率変数として取り扱われる。つまり、道路利用者の学習の中では、経路が最小旅行時間となる確率自体が確率変数となる。これは、道路利用者は経路の最小旅行時間確率を正確には認識することができないため、それを確率変数として扱うことに起因している。OD ペア i の k 番目の道路利用者の主観的な経路の最小旅行時間確率に対する確率変数を $\mathbf{\Pi}_{ikn} = (\Pi_{i1kn}^{\circ}, \Pi_{i2kn}^{\circ}, \dots)^T$ とし、その実現値を $\pi_{ikn}^{\circ} = (\pi_{i1kn}^{\circ}, \pi_{i2kn}^{\circ}, \dots)^T$ と表記することとする。既に述べた離散選択問題でのパラメータ推定という観点からは、各経路が最小旅行時間となる確率というパラメータを得られたデータである走行後に判明する最小旅行時間の経路がどれであったのかに基づいて推定することと言える。通常のロジットモデル等のパラメータ推定のパラメータが (t 分布に従う) 確率変数であるのと同様に、最小旅行時間となる確率自体が確率変数として取り扱われる。

また、先に述べたベイズの定理の式 $\text{Pr}[A|B]=\text{Pr}[B|A]\text{Pr}[A]/\text{Pr}[B]$ の **B** に相当するのが、どの経路が実際に最小旅行時間となったのかという事象である。本研究では、道路利用者はトリップ終了後、その日の最小旅行時間となった経路を知り、それに基づき、経路の最小旅行時間となる確率を以下のベイズ学習の式に従って更新する（学習する）。

$$f(\pi_{in+1}^{\circ} | \mathbf{d}_{in}) = \frac{g(\mathbf{d}_{in} | \pi_{in}^{\circ}) f(\pi_{in}^{\circ})}{\int_{\Xi_{in}} g(\mathbf{d}_{in} | \pi_{in}^{\circ}) f(\pi_{in}^{\circ}) d\pi_{in}^{\circ}} \propto g(\mathbf{d}_{in} | \pi_{in}^{\circ}) f(\pi_{in}^{\circ}) \quad (2)$$

ここで、 $f(\pi_{in}^{\circ})$ は π_{in}° の確率密度関数、 Ξ_{in} は \mathbf{d}_{in} の集合である。なお、添え字 k は省略している。以降も、添え字 k は特に必要な場合を除き、省略する。

多項分布の共役な分布はディリクレ分布（多変量ベータ分布）であるため²⁷⁾、最小旅行時間確率の確率変数 $\mathbf{\Pi}_{in}^{\circ}$ はディリクレ分布に従うと仮定する。OD ペア i の経路の主観的な最小旅行時間確率（道路利用者が考える経路が最小旅行時間となる確率）が従うディリクレ分布 $\text{Dr}[\boldsymbol{\alpha}_{in}]$ の確率密度関数は以下の通りである。

$$f_{in}(\pi_{in}^{\circ}) = \frac{\Gamma(\sum_{j \in J_i} \alpha_{ijn})}{\prod_{j \in J_i} \Gamma(\alpha_{ijn})} \prod_{j \in J_i} \pi_{ijn}^{\alpha_{ijn}-1} \quad (3)$$

ただし、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数、 $\boldsymbol{\alpha}_{in} = (\alpha_{i1n}, \alpha_{i2n}, \dots)^T$ はディリクレ分布のパラメータである。なお、上のディリ

クレ分布は経路の最小旅行時間確率の実現値 π_{in}° が満たすべき $\sum_{j \in J_i} \pi_{ijn}^{\circ} = 1$ ($\forall i, \forall n$) を満たす特殊な確率分布である。式 (3) のディリクレ分布では、 $\mathbf{\Pi}_{in}^{\circ}$ の成分である Π_{ijn}° の平均は $\alpha_{ijn} / \alpha_{in}$ ($\forall j \in J_i$) である。ただし、 $\alpha_{in} = \sum_{j \in J_i} \alpha_{ijn}$ である。また、 Π_{ijn}° の分散は $\alpha_{ijn}(\alpha_{in} - \alpha_{ijn}) / [\alpha_{in}^2(\alpha_{in} + 1)]$ である。

ここで、 n 日目の学習について考えよう。この日の主観的な経路の最小旅行時間確率の事前確率は $\text{Dr}[\boldsymbol{\alpha}_{in}]$ に従う。そして、トリップ終了後、 \mathbf{d}_{in} が判明し（どの経路がその日最も旅行時間が小さかったのが判明し）、 \mathbf{d}_{in} を用いて、主観的な経路の最小旅行時間確率の事後確率を求めることがその日の学習となる。式 (1) 及び (3) を式 (2) に代入すると、 n 日目の学習後の事後確率の確率密度関数は

$$f(\pi_{in+1}^{\circ} | \mathbf{d}_{in}) = \frac{\Gamma(\sum_j (\alpha_{ijn} + d_{ijn}))}{\prod_{j \in J_i} \Gamma(\alpha_{ijn} + d_{ijn})} \prod_{j \in J_i} \pi_{ijn}^{\alpha_{ijn} + d_{ijn} - 1} \quad (4)$$

となる。この事後確率も事前確率と同様にディリクレ分布であり、事前のディリクレ分布のパラメータ $\boldsymbol{\alpha}_{in}$ が $\boldsymbol{\alpha}_{in+1} + \mathbf{d}_{in}$ に置き換わっただけである。つまり n 日目のトリップの終了後、道路利用者の主観的な経路の最小旅行時間確率 $\mathbf{\Pi}_{in}^{\circ}$ は $\text{Dr}[\boldsymbol{\alpha}_{in} + \mathbf{d}_{in}]$ に従う。したがって、最小旅行時間確率の学習は

$$\boldsymbol{\alpha}_{in+1} = \boldsymbol{\alpha}_{in} + \mathbf{d}_{in} \quad (5)$$

とディリクレ分布のパラメータが更新されることであると考えられる。最小旅行時間となる経路が一つの場合、 $\boldsymbol{\alpha}_{in}$ と $\boldsymbol{\alpha}_{in+1}$ の関係は以下の通りとなる。

$$\alpha_{ijn+1} = \begin{cases} \alpha_{ijn} + 1 & \text{if } j = \arg \min_{j \in J_i} t_{ijn} \\ \alpha_{ijn} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 t_{ijn} は n 日目の OD ペア i の経路 j の（経路の実現した）旅行時間、 \arg は最小旅行時間となる経路をとるオペレータである。

第 1 日目に経路選択や学習を行うために、各道路利用者は、第 1 日目での事前の経路の最小旅行時間確率 $\boldsymbol{\alpha}_{i1}$ が必要であり、本研究では、それを初期値として与える。この $\boldsymbol{\alpha}_{i1}$ 、そして、 \mathbf{d}_{il} ($l=1, \dots, n-1$) が与えられると、 n 日目の事前の経路の最小旅行時間確率は $\text{Dr}[\boldsymbol{\alpha}_{i1} + \mathbf{s}_{in}]$ に従うと表記できる。ここで、 $\mathbf{s}_{in} = \sum_{l=1}^{n-1} \mathbf{d}_{il}$ である。 \mathbf{s}_{in} は n 日の前日 ($n-1$ 日) までの各経路の最小旅行時間となった回数を表すベクトルである。

初期パラメータ $\boldsymbol{\alpha}_{i1}$ が有限であり、全く選択されることがない経路が経路集合に含まれていないなら

ば、明らかに次式が成立する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{in} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha_{i1} + \sum_{l=1}^{n-1} \mathbf{d}_{il} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^{n-1} \mathbf{d}_{il} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{s}_{in} \quad (7)$$

式(3)のディリクレ分布では、上で述べたように、 Π_{in}° の成分である Π_{ijn}° の平均は α_{ijn}/α_{in} ($\forall j \in J_i$)であり、その分散は $\alpha_{ijn}(\alpha_{in} - \alpha_{ijn})/[\alpha_{in}^2(\alpha_{in} + 1)]$ である.十分に時間が経過すると、 α_{in} ($\forall i \in I$)は十分に大きくなるため、 Π_{ijn}° の分散は0と近似できる.経路 j の Π_{ijn}° と経路 j' の $\Pi_{ij'n}^\circ$ との共分散は $-\alpha_{ijn}\alpha_{ij'n}/[\alpha_{in}^2(\alpha_{in} + 1)]$ で、これも、十分に時間が経過すると0で近似できる.よって、経路の最小旅行時間の主観的確率は、ベイズ学習により、十分に時間が経過すると、それまでに実際に経路が最小旅行時間となった頻度の比率と一致するようになる.

式(5)のように更新される場合の α_{ijn}/α_{in} が仮想的プレイ(fictitious play)での経験分布に相当し、上で述べたように、また、FudenbergとLevine²⁶⁾が示したように、最小旅行時間となった回数の比率である経験分布はベイズ学習の結果と解釈することができる.

3. 経路選択とダイナミクス

本章では、ベイズ学習する道路利用者から構成される交通システムのday-to-dayダイナミクスのモデルを構築し、その収束性等について考察する.ここでは、各経路が最小旅行時間となる確率に対する初期値はガンベル分布に従うと仮定するが、この場合ロジットモデル式が用いられる.このようなロジットモデル式を用いた仮想的プレイは確率的仮想的プレイ(stochastic fictitious play)と呼ばれており、FudenbergとKreps²⁸⁾、KaniovskiとYoung²⁹⁾、BenaimとHirsch³⁰⁾、HofbauerとSandholm³¹⁾などにより研究が進められている.これらの研究では、プレイは確率的に行われるため、確率動学なシステムとなり、確率的近似(stochastic approximation)を用いて解析が行われている.

本章では、交通ネットワーク分析において最も重要なワードロップ均衡の安定性や収束性について検討するために、前章でも述べたように道路利用者の経路選択は確定的に行われ、確定的システムについて考察する.

(1) 経路選択

前章で述べたように最小旅行時間となる確率が従うディリクレ分布のパラメータは $\alpha_{in+1} = \alpha_{in} + \mathbf{d}_{in}$ として

更新される. n 日目にODペア i の経路 j が最小旅行時間となる確率の期待値は α_{ijn}/α_{in} ($\forall j \in J_i$)である.これはそれまでに実際に経路が最小旅行時間となった頻度(ただし、初期値も含まれる)の比率である.

既に述べたように、仮想的プレイ(fictitious play)では、この比率がこれまでの経験分布に相当し、それに基づき、ゲームが行われる.

最小旅行時間となる確率自体が確率的であるという取り扱いになっているため、道路利用者は最小旅行時間となる確率が平均的に最も高いと考える経路を選択すると仮定する.つまり、最小旅行時間となる確率が(平均的に)最も高い経路 $\arg \max_{j \in J_i} \alpha_{ijn}$ が選択されるとする.

最小旅行時間となる確率の初期値(α_{i1})は道路利用者間でばらついているとする.ここでは、この初期値は確定値とし、道路利用者に初期に与えられた後は(確率)変動しないものとする.そして、その初期値 α_{ijkn} はガンベル分布に従って与えられるものと仮定する.この与えるガンベル乱数のばらつきの大きさはパラメータ θ によって規定されるとする.各道路利用者の初期値 α_{ijkn} を与えるガンベル乱数の分布の累積分布関数 $F(x)$ は $\exp\{-\exp[-\theta x]\}$ であり、平均は γ/θ 、分散は $\pi^2/6\theta^2$ である(γ はオイラー数).

各ODペアの道路利用者の数は十分に大きいとすると、経路選択者数である経路交通量は連続数として取り扱っても問題ない.各道路利用者間で初期値が異なることにより、個々人で異なったディリクレ分布のパラメータを持つため、本来、各々の道路利用者の学習(実質的にはディリクレ分布のパラメータのダイナミクス)は個別に計算される必要がある.しかし、2章で述べたように同じODペア間の道路利用者の同質性(経路集合が同じで、全員が毎日経路選択を行い、最小旅行時間経路の情報を共有)を仮定し、以降では個々人の経路選択を個別的に陽には考えず、各ODごとにマクロ的・集成的に取り扱う.

以上のように捉えると、各道路利用者に与えられた初期値は確定的であるものの、このように道路利用者数が大きい場合は、ODペア i の代表的道路利用者が $\arg \max_{j \in J_i} s_{ijn} + \varepsilon_{ijn}/\theta$ の経路を選択する確率として、経路 j を選択する比率 p_{ijn} を求めることができ、その比率にOD交通量を乗じると経路交通量とすることができる.ただし、 ε_{ijn} はガンベル分布 $G[0, 1]$ (パラメータが0及び1のガンベル分布)に従う確率変数であり、 ε_{ijn}/θ の累積分布関数 $F(x)$ は $\exp\{-\exp[-\theta x]\}$ となる.この時、 $\arg \max_{j \in J_i} s_{ijn} + \varepsilon_{ijn}/\theta$ は確率的となり、経路選択確率が算出されるが、各道路利用者に与えられた初期値自体は確定値であるため、この経路選択確率を経路選択「比率」とし、

その比率に OD 交通量を乗じた確定的な経路交通量を扱う。経路選択比率は、 $\Pr[s_{ijn} + \varepsilon_{ijn}/\theta > s_{i'j'n} + \varepsilon_{i'j'n}/\theta \mid j' \in J_i^{-j}]$ となる。ここで、 J_i^{-j} は OD ペア i の経路集合のうち、経路 j 以外のものである。よって、 p_{ijn} は次の多項ロジットモデル式として与えられる。

$$p_{ijn} = \frac{e^{\theta s_{ijn}}}{\sum_{j' \in J_i} e^{\theta s_{ij'n}}} \quad (8)$$

式 (8) はロジットモデルを用いた確率的利用者均衡¹¹⁾での経路選択確率式と形式上似ている。しかし、確率利用者均衡配分では、本研究のような経路が最小旅行時間となった回数の代わりに、経路旅行時間が用いられている。これは本質的に大きな違いであり、実現する配分結果は一般に異なったものになる。

繰り返しになるが、経路選択は確率的には行われず、確定値であるこれまでに最初旅行時間となった回数に基づき、確定的に行われる。よって、 \mathbf{s}_m が与えられれば、経路交通量は確定的に決定される。

(2) 経路選択のダイナミクス

経路選択は、どの経路が最小旅行時間となる（主観的）確率が高いのかに基づいている。そして、式 (8) が示すように、経路選択のダイナミクスは \mathbf{s}_m により規定される。このダイナミクスは $\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_n + \mathbf{d}_n$ である。ここで、 $\mathbf{s}_n = (s_{1n}, \dots, s_{l|n})^T$ 、 $\mathbf{d}_n = (d_{1n}, \dots, d_{l|n})^T$ である。また、 $\mathbf{p}_n = (p_{1n}, \dots, p_{l|n})^T$ 、 $\mathbf{p}_m = (p_{i1n}, \dots, p_{i|l|n})^T$ であるとする。 n 日目の全トリップが終了し、その日の最小旅行時間経路 \mathbf{d}_n が判明した後では、 $n+1$ 日目の経路選択比率 p_{ijn+1} は、以下のように与えられる。

$$p_{ijn+1} = \frac{e^{\theta(s_{ijn} + d_{ijn})}}{\sum_{j' \in J_i} e^{\theta(s_{ij'n} + d_{ij'n})}} \quad (9)$$

n 日目に OD ペア i の経路 j が最小旅行時間となるかどうかはその日の経路選択比率 \mathbf{p}_m によって決まるため、変数 d_{ijn} は \mathbf{p}_m の関数でもある。上式を取り扱いやすいは \mathbf{p}_m のみの式に変換しよう。式 (8) より、 \mathbf{s}_n が与えられれば、 \mathbf{p}_n が一意に決まることがわかる。また、 $\mathbf{s}_m = \sum_{l=1}^{n-1} \mathbf{d}_l$ 及び $\sum_{j \in J_i} d_{ijn} = 1$ より、 $\sum_{j \in J_i} s_{ijn} = n-1$ となるため、これを式 (8) に代入し、整理すると、 n が与えられれば、 s_{ijn} は次式のように与えられる。

$$s_{ijn} = \frac{1}{\theta} \ln p_{ijn} + \frac{1}{\theta} \left(n-1 - \frac{1}{\theta} \sum_{j' \in J_i} \ln p_{ij'n} \right) \quad (10)$$

上式を式 (9) に代入し、整理すると、 \mathbf{p}_{n+1} の成分

p_{ijn+1} は \mathbf{d}_n の成分を用いて、以下のように表される。

$$p_{ijn+1} = \frac{p_{ijn} e^{\theta d_{ijn}}}{\sum_{j' \in J_i} p_{ij'n} e^{\theta d_{ij'n}}} \quad (11)$$

実際の旅行時間は確定的に変化するため、最小旅行時間となる経路が 2 つ以上になり得る。ここで、最小旅行時間となる経路が複数の場合への拡張を行う。第 n 日に最小旅行時間となっている OD ペア i の経路の集合を \tilde{J}_m と表記することにする。そして、その集合に含まれる経路数（最小旅行時間となっている経路数）を $|\tilde{J}_m|$ とする。これまで用いてきた d_{ijn} を以下のように拡張する。

$$d_{ijn} = \begin{cases} \frac{1}{|\tilde{J}_m|} & \text{if } j \in \tilde{J}_m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

上式は、明らかにこれまで考えてきた最小旅行時間経路が一つの場合を含むものである。式 (12) のように、 d_{ijn} を定義すると、最小旅行時間経路が複数の場合でも、式 (11) として、経路選択確率のダイナミクスを定式化することが出来る。

前章では、最小旅行時間経路が一つのみとして、議論が進んでいた。式 (12) と拡張することによる問題点は、式 (1) の解釈をどのようにするのかになる。 $\sum_j d_{ijn} = 1$ とすると、式 (1) は離散確率分布である多項分布（カテゴリカル分布）の確率関数とみなせる。その場合、ある一つの経路の d_{ijn} のみ 1 でその他は 0 とならざるを得ない。よって、最小旅行時間経路が 2 つ以上になり、式 (12) を用いると、式 (1) をカテゴリカル分布（多項分布）の確率関数として解釈できないことになる。その点を除くと、その後の数式展開上は問題はなく、式 (6) 中の $\alpha_{ijn+1} = \alpha_{ijn} + 1$ を $\alpha_{ijn+1} = \alpha_{ijn} + 1/|\tilde{J}_m|$ に変更するのみでよい。

4. 均衡の安定性

前章で、道路利用者が経路の最小旅行時間となる確率をベイズ学習するとし、その場合の経路選択比率の day-to-day ダイナミクスの定式化を行った。本章では、前章で述べた day-to-day ダイナミクスに従って経路選択比率が推移する場合に、そのシステムがワードロップ均衡に収束するための条件やその形成過程などを理論的・定性的に考えるために、均衡の安定性について検討する。

OD ペア i 交通需要 (OD 交通量) は既に述べたように

固定値 q_i である。また、 p_{ijn} は経路選択比率であり、OD ペア i の経路 j の経路交通量は確定値 $q_i p_{ij}$ となる。

差分方程式の解の大域的安定性については、差分方程式に対するリアプノフ定理 (例えば、Zangwill³²⁾ の Theorem 10.4 や Elaydi³³⁾ の Theorem 4.22) やそれと同様の問題を取り扱う最適化アルゴリズムの収束条件 (例えば、Zangwill³²⁾ の Convergence Theorem A や 今野・山下³⁴⁾ の定理 6.2) により考察することが出来る。これらの研究により、差分方程式 $\mathbf{p}_{n+1} = \Psi(\mathbf{p}_n)$ について、リアプノフ関数 $H(\mathbf{p})$ が与えられた場合、1) 任意の \mathbf{p} 及び $\Psi(\mathbf{p})$ がコンパクト集合に含まれる、2) $H(\mathbf{p})$ は、均衡解 \mathbf{p}^* では $H(\mathbf{p}^*) = 0$ となり、それ以外では $H(\mathbf{p}) > 0$ となる連続な関数である、3) 均衡解以外では $H(\Psi(\mathbf{p})) < H(\mathbf{p})$ となる、4) ベクトル値関数 $\Psi(\mathbf{p})$ は連続である、の 4 つの条件を満たした場合、均衡解 \mathbf{p}^* は大域的漸近安定となる。2) 及び 3) は通常良く用いられる微分方程式に対するリアプノフの定理でのリアプノフ関数の条件に対応している。差分方程式では、リアプノフ関数の値は常に減少し続けるものの、解が「ジャンプ」し続けるなどの理由で収束しない、安定しない場合もあり、そのために条件 4) が加わっている。なお、本研究のモデルとは直接関係がないが、定義域が実空間全体など場合は上の条件 1) の代わりに別の条件が課せられる。

ワードロップ均衡の最適化問題の目的関数を用いて、前章で述べたダイナミクスのリアプノフ関数 (の候補) を次式のように仮定する。

$$\tilde{H}(\mathbf{x}) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} c_a(w) dw - \sum_{a \in A} \int_0^{x_a^*} c_a(w) dw \quad (13)$$

ここで、 x_a はリンク a の交通量 ($a \in A$)、 x_a^* はワードロップ均衡でのリンク a の交通量、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{|A|})^T$ 、 $|A|$ はリンク総数 (集合 A の要素数) である。また、2 章で述べたように、 $c_a(\cdot)$ はリンク a の旅行時間関数であり、狭義単調増加な連続関数とする。

\mathbf{p} が与えられれば、 \mathbf{x} は一意に決まり、 \mathbf{x} は \mathbf{p} の関数である。よって、 \tilde{H} は \mathbf{p} の関数でもあるため、以下では、式 (13) と実質的に同じ関数 $H(\mathbf{p}) = \tilde{H}(\mathbf{x}(\mathbf{p}))$ について考えることにする。明らかに、関数 $H(\mathbf{p})$ は連続で、 \tilde{H} の性質から、定義域において、常に非負であり、ワードロップ均衡の時のみ 0 となる。

θ が十分に小さい場合、式 (11) より、 $|\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n|$ も十分に小さくなる事が分かる。このように $|\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n|$ が十分に小さい場合、一次のテイラー展開により、 $H(\mathbf{p}_{n+1}) - H(\mathbf{p}_n)$ は $\nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{p}_n)^T (\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n)$ と近似するこ

とが出来る。ここで、 $\partial H / \partial y_{ijn} = t_{ijn}$ であり¹⁾、また、 $dy_{ijn} / dp_{ijn} = q_i$ であるため、 $\partial H / \partial p_{ijn} = q_i t_{ijn}$ となる。ただし、 y_{ijn} は第 n 日目の OD ペア i の経路 j の (経路) 交通量で $q_i p_{ij}$ であり、 t_{ijn} はその経路旅行時間である。よって、 $H(\mathbf{p}_{n+1}) - H(\mathbf{p}_n)$ は $\sum_{i \in I} q_i \sum_{j \in J_i} t_{ijn} (p_{ijn+1} - p_{ijn})$ となる。さらに、 $H(\mathbf{p}_{n+1}) - H(\mathbf{p}_n)$ は次式のように整理することが出来る (詳細は付録 1 に記載)。

$$H(\mathbf{p}_{n+1}) - H(\mathbf{p}_n) = \sum_{i \in I} q_i (1 - \kappa_{in}) \hat{p}_{in} (\tau_{in} - \hat{t}_{in}) \quad (14)$$

ここで、 $\hat{p}_{in} = \sum_{j \in \tilde{J}_i} p_{ijn}$ 、 $\hat{t}_{in} = \sum_{j \in \tilde{J}_i} t_{ijn} p_{ijn} / \hat{p}_{in}$ 、 $\kappa_{in} = 1 / [\hat{p}_{in} + e^{\theta d_{in}} (1 - \hat{p}_{in})]$ 、 τ_{in} は n 日目の OD ペア i の最小旅行時間、 $d_{in} = 1 / |\tilde{J}_i|$ である。なお、既に述べたように、 \tilde{J}_i は n 日目に OD ペア i で最小旅行時間となった経路の集合であり、 $j \in \tilde{J}_i$ は集合 J_i のうち最小旅行時間とならなかった経路の集合である。 \hat{p}_{in} は最小旅行時間ではない経路を選択する比率であり、 \hat{t}_{in} は最小旅行時間ではない経路の旅行時間の (選択比率に関する重み付き) 平均である。よって、明らかに $\tau_{in} - \hat{t}_{in} < 0$ である。また、 $1 - \kappa_{in} > 0$ であるため、式 (14) より $H(\mathbf{p}_{n+1}) - H(\mathbf{p}_n) < 0$ となる。

式 (11) を成分として持つベクトル値関数 $\Psi(\mathbf{p}_n)$ は、各成分 (の関数) が連続であるため、明らかに連続である。ここで、 Ω を各成分が 0 以上 1.0 以下の集合とする。 $0 \leq p_{ijn} \leq 1.0$ であり、そのベクトル \mathbf{p}_n は Ω に含まれ、それは明らかにコンパクト集合である。また、式 (11) より、 $\Psi(\mathbf{p}_n)$ も Ω に含まれる。

以上より、 θ が十分に小さい場合、上述の 1) から 4) の条件を満たすため、ワードロップ均衡 \mathbf{p}^* は大域的漸近安定である。したがって、どのような初期状態から始まってもいずれはワードロップ均衡に収束・安定する。

θ が大きく、初期値のばらつきが小さい場合について、ここで簡単に触れておこう。本研究では、日々獲得する情報は同じ OD 間をトリップする道路利用者の間では同じである。異なるのは初期値のみとなる。よって、もし初期値も同じもしくは同程度ならば、毎日全員もしくは多くの道路利用者が毎日他の道路利用者と同じ経路を選択することになり、ワードロップ均衡に収束することができなくなってしまうことになる。

ワードロップ均衡は広く用いられているにもかかわらず、行動論的背景を含めた成立条件については、これまで必ずしも十分に解明されてこなかったように思われる。しかし、上で述べたワードロップ均衡の安定性についての考察により、初期の認知にばらつきがあり (つまり、 θ が十分に小さく)、道路利用者は合理的で、情報が十分で最小旅行時間と

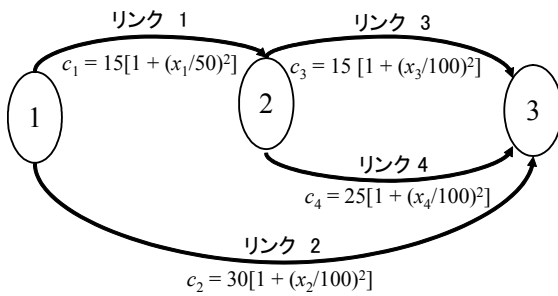


図-1 対象ネットワーク

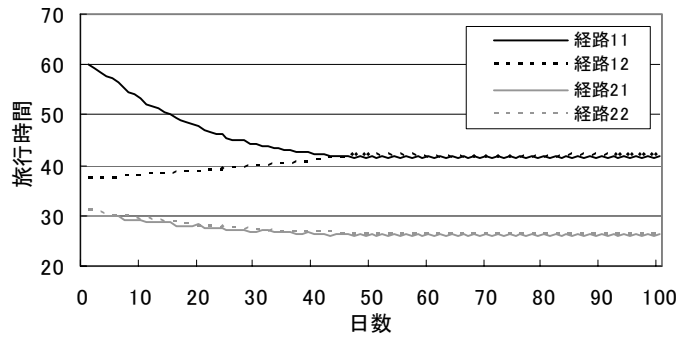


図-2 100日間の経路旅行時間の推移

なる経路が分かると、最小旅行時間の頻度が大きい経路を選択する、つまり、2章及び3章で述べたベイズ学習を行うと、時間の経過とともに、ワードロップ均衡に収束することが分かる。なお、道路利用者の情報が限定的で、走行した経路の旅行時間のみなどの場合は、著者の既往研究^{12),20)}の通り、ワードロップ均衡に収束しない場合があることが分かっている。

以上の本研究の内容を踏まえて、本研究の意義についてここで考えてみよう。既に述べたように、2章のベイズ学習は標準的なベイジアン統計学のベイズ推計の内容であり、このようなベイズ学習の結果、最小旅行時間となった回数が最も多い経路を選択することを明らかにした。この最も多い経路を選択することは仮想的プレイ (fictitious play) と同じ動的過程であることを意味しており、Fudenberg と Levine²⁶⁾は仮想的プレイ (fictitious play) はベイズ推計として解釈することができることを示している。また、ロジットモデル式を用いたダイナミクスは確率的仮想的プレイ (stochastic fictitious play) でも用いられているものでもある。これらの繰り返しゲームの研究と本研究との相違点は、ゲームではなく、交通ネットワーク均衡及びそこでの経路選択行動にベイズ推計や確率的仮想的プレイ (stochastic fictitious play) で用いられているモデル式等を適用している点である。そして、モデル構造の違いとしては、最小旅行時間となる確率に対する初期値をガンベル乱数として与えることとしており、それは固定値であることから、交通ネットワークのフローダイナミクスは確定的である点である。確率的仮想的プレイ (stochastic fictitious play) では、戦略 (選択) が確率的であり、確率的なダイナミクスを取り扱っている。確定的ダイナミクスを扱う仮想的プレイ (fictitious play) の研究では、いくら時間が経過しても収束しないゲームも存在することが知られているが、本研究では、ベイズ学習を仮定し、初期値が十分にばらつ

いていると時間が経過するとともに、必ずワードロップ均衡に収束することが明らかにされている。

5. 数値計算例

本章では、複数 OD 複数経路のネットワークのうち、最も単純なものの一つである図-1のネットワークを対象に、2, 3章で述べたベイズ学習及びフローダイナミクスを適用しよう。このネットワークは、2つの OD をそれぞれ 2つの経路で結ぶ 2OD4 リンクネットワークである。ただし、リンク 1 からリンク 4 へは通行することは出来ない。OD はノード 1 と 3 のペア (OD1) 及びノード 2 と 3 のペア (OD2) である。交通需要は両 OD ともに 100 (固定値) とする。

OD1 の経路 1 はリンク 1 とリンク 3 から構成され、OD1 の経路 2 はリンク 2 のみである。また、OD2 の経路 1 はリンク 3 のみ、その OD の経路 2 はリンク 4 のみで構成される。なお、本章では、OD1 の経路 1 を経路 11、経路 2 を経路 12、OD2 の経路 1 を経路 21、経路 2 を経路 22 と呼ぶことにする。

リンク 1 の旅行時間関数は $c_1(x_1) = 15(1 + x_1/50)$ 、リンク 2 の旅行時間関数は $c_2(x_2) = 30(1 + x_2/100)$ 、リンク 3 の旅行時間関数は $c_3(x_3) = 15(1 + x_3/100)$ 、リンク 4 の旅行時間関数は $c_4(x_4) = 25(1 + x_4/100)$ である。

初日の事前確率を与えるために、ガンベル分布 $G(0, 0.05)$ を用いる。つまり、 $\theta = 0.05$ とする。

図-2 が 4 つの経路の 100 日間の旅行時間の推移である。初めのうちは、経路 11 と経路 12 の旅行時間は大きく異なっているが、45 日頃以降は、それらはほぼ等しくなっているように見える。これは、ベイズ学習の結果、経路 11 を選択する道路利用者が徐々に減少し、経路 12 を選択するようになったためである。OD2 に関しては、たまたま初日から経路間の旅行時間の違いが小さく、旅行時間の差がないまま推移している。

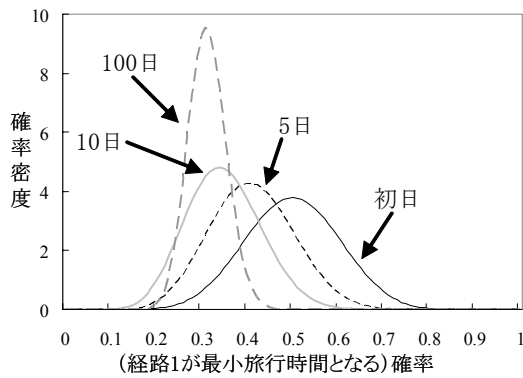


図-3 OD1の主観的確率(初日, 5日, 10日, 100日)

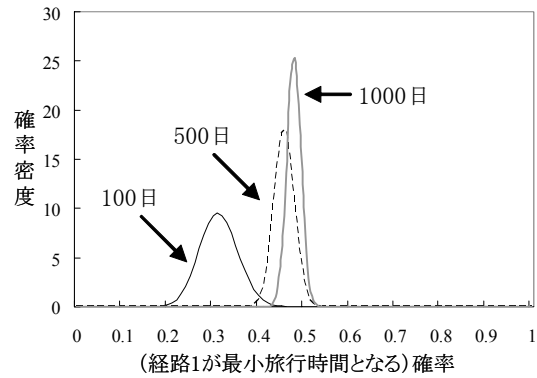


図-4 OD1の主観的確率(100日, 500日, 1000日)

道路利用者の日々の経路の最小旅行時間の主観的確率は初期値によって異なる。既に述べたように、初期値はガンベル分布に従う乱数として与えている。図-3は、ガンベル分布の平均値を初期値として持ったOD1の道路利用者の初日と5日目、10日目、100日目の経路11の主観的確率(経路の最小旅行時間の主観的確率)である。日を経過するにつれて、主観的確率の分布のばらつきが小さくなるとともに、左に移動していることが分かる。このように左に移動している理由は、ガンベル分布の平均値を初期値とした道路利用者の主観的確率のためである。別の初期値をもつ道路利用者の場合、別の動きをすることになる。図-4は、100日目、500日目、1000日目のグラフである(図-3とグラフの縦軸のスケールが異なっていることに注意が必要)。日数が経過するにつれて、主観的確率の分布のばらつきがさらに小さくなっていることが分かる。また、その分布が0.5付近に近づくことも見てとれる。このように日数が大きくなると、均衡に近づくが、初期値の影響は小さくなり、ほぼ全ての道路利用者の主観的確率の分布はほとんど等しくなるとともに、2つの経路ともに最小旅行時間となる確率は0.5の近傍のみとなる。

各ODのいずれの経路も走行する道路利用者があるため、ワードロップ均衡はその2つ経路の旅行時間が等しい状態である。ワードロップ均衡状態では、式(12)が用いられ、ディリクレ分布のパラメータは2つの経路とも0.5ずつ増える。それが長期間続くと、ディリクレ分布のパラメータは2経路間でほぼ等しくなる。つまり、主観的最小旅行時間確率は両経路とも0.5となる。

以上のように、ベイズ学習により、ネットワークフローはワードロップ均衡に近づくとともに、道路利用者は両経路共に最小旅行時間をとる確率が0.5となる、つまり、いずれの経路を選択しても同じ結果となるであろうと認識するようになっていく。

6. おわりに

本研究では、個々の道路利用者がどのように経路選択を行うようになるのかについては、ベイズの定理に基づいたベイズ学習を仮定し、そのベイズ学習に基づいた経路選択は最小旅行時間となった回数が多い経路を日々選択するという単純なものであることを示した。そして、その学習に基づいたネットワーク・フローの day-to-day ダイナミクスの均衡(不動点)がワードロップ均衡であるとともに、それが大域的漸近安定であることが分かった。ワードロップ均衡は広く用いられているにもかかわらず、行動論的背景を含めた成立条件について、これまで必ずしも十分には解明されてこなかったように思われるが、初期の認知にばらつきがあり、道路利用者が最小旅行時間の頻度が大きい経路を選択すると、十分な時間の経過後には、ワードロップ均衡に収束することが分かった。このように本研究では、交通ネットワーク均衡の成立条件や形成プロセスの知見が得られた。

今後の課題としては、確率要因を導入し、確率環境下での解の性質や漸近安定性について詳細に検討すること、出発時刻を含んだモデルを構築すること、さらに、それを用いて、提供情報の信頼性等の学習を含めた情報提供効果の理論的分析を行うことなどが挙げられる。

付録 1

$H(\mathbf{p}_{n+1})$ を \mathbf{p}_n について一次のテイラー展開を行うと、

$$H(\mathbf{p}_{n+1}) = H(\mathbf{p}_n) + \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{p}_n)^T (\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n)$$

となる。本文中でも(一部)触れたが、

$$\frac{\partial H}{\partial p_{ijn}} = \sum_{a \in A} \frac{\partial H}{\partial x_a} \frac{\partial x_a}{\partial y_{ijn}} \frac{dy_{ijn}}{dp_{ijn}} = q_i t_{ijn}$$

により,

$$H(\mathbf{p}_{n+1}) - H(\mathbf{p}_n) = \sum_{i \in I} q_i \sum_{j \in \tilde{J}_i} t_{ijn} (p_{ijn+1} - p_{ijn})$$

となる.

$t_{ijn} = \tau_{in} (\forall j \in \tilde{J}_i)$ であるため, $H(\mathbf{p}_{n+1}) - H(\mathbf{p}_n)$ は

$$\sum_{i \in I} q_i \left[\tau_{in} \sum_{j \in \tilde{J}_i} (p_{ijn+1} - p_{ijn}) + \sum_{j \in \tilde{J}_i} t_{ijn} (p_{ijn+1} - p_{ijn}) \right] \quad (15)$$

と書き換えることが出来る.

式 (15) に含まれる $\sum_{j \in \tilde{J}_i} t_{ijn} p_{ijn+1}$ の計算は式 (11)

より,

$$\sum_{j \in \tilde{J}_i} t_{ijn} p_{ijn+1} = \frac{\sum_{j \in \tilde{J}_i} p_{ijn} t_{ijn} e^{\theta d_{ijn}}}{\sum_{j' \in \tilde{J}_i} p_{ij'n} e^{\theta d_{ij'n}}} = \frac{\hat{p}_{ijn} \hat{t}_{ijn}}{\sum_{j' \in \tilde{J}_i} p_{ij'n} e^{\theta d_{ij'n}}}$$

となる. ただし, $\hat{p}_{in} = \sum_{j \in \tilde{J}_i} p_{ijn}$, $\hat{t}_{in} = \sum_{j \in \tilde{J}_i} t_{ijn} p_{ijn} / \hat{p}_{in}$

及び $e^{\theta d_{ijn}} = 1 (\forall j \in \tilde{J}_i)$ を用いている.

また, 上式中の $\sum_{j' \in \tilde{J}_i} p_{ij'n} e^{\theta d_{ij'n}}$ について,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sum_{j' \in \tilde{J}_i} p_{ij'n} e^{\theta d_{ij'n}}} &= \frac{1}{e^{\theta d_{in}} \sum_{j' \in \tilde{J}_i} p_{ij'n} + \sum_{j' \in \tilde{J}_i} p_{ij'n}} \\ &= \frac{1}{e^{\theta d_{in}} (1 - \hat{p}_{in}) + \hat{p}_{in}} = \kappa_{in} \end{aligned}$$

となるため, $\sum_{j \in \tilde{J}_i} t_{ijn} p_{ijn+1} = \kappa_{in} \hat{p}_{ijn} \hat{t}_{ijn}$ となることが分かる. よって,

$$\sum_{j \in \tilde{J}_i} t_{ijn} (p_{ijn+1} - p_{ijn}) = (\kappa_{in} - 1) \hat{t}_{in} \hat{p}_{in} \quad (16)$$

である. また, 同様にして,

$$\sum_{j \in \tilde{J}_i} p_{ijn+1} = 1 - \sum_{j \in \tilde{J}_i} p_{ijn+1} = 1 - \kappa_{in} \hat{p}_{in} \quad (17)$$

であることが分かる.

式 (16) 及び (17) を式 (15) に代入し, 整理すると, 式 (14) が得られる.

参考文献

- 1) 例えば, 土木学会土木計画学委員会交通ネットワーク出版小委員会: 交通ネットワークの均衡分析—最新の理論と解法, 丸善, 東京, 1998.
- 2) Wardrop, J.G.: Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part II, Vol. 1, pp.325-378, 1952.
- 3) 小林潔司, 藤岡勝己: 合理的期待形成を考慮した経路選択モデルに関する研究, 土木学会論文集, No. 458/IV-18, pp. 17-26, 1993.
- 4) Jha, M., Madanat, S. and Peeta, S.: Perception Updating and Day-to-Day Travel Choice Dynamics in Traffic Networks with Information Provision, *Transportation Research*, Vol. 6C, pp. 189-212, 1998.
- 5) 小林潔司: 不完備情報下における交通均衡に関する研究, 土木計画学研究・論文集, No.8, pp.81-88, 1990.
- 6) Horowitz, J.L.: The Stability of Stochastic Equilibrium in a Two-Link Transportation Network, *Transportation Research*, Vol. 18B, pp. 13-28, 1984.
- 7) Cantarella, G.E. and Cascetta, E.: Dynamic Processes and Equilibrium in Transportation Networks: Towards a Unifying Theory, *Transportation Science*, Vol. 29, pp. 305-329, 1995.

- 8) Watling, D.: Stability of the Stochastic Equilibrium Assignment Problem: A Dynamical Systems Approach, *Transportation Research*, Vol. 33B, pp. 281-312, 1999.
- 9) 飯田恭敬, 内田敬, 宇野伸宏: 経路選択行動の動態変化に関するシミュレーション分析, 土木計画学研究・講演集, No. 12, pp. 29-36, 1989.
- 10) Emmerink, R.H.M., Axhausen, K.W., Nijkamp, P. and Rietveld, P.: Effects of Information in Road Transport Networks with Recurrent Congestion, *Transportation*, Vol. 22, pp. 21-53, 1995.
- 11) Daganzo, C. F. and Sheffi, Y.: On Stochastic Models of Traffic Assignment, *Transportation Science*, Vol. 11, pp. 253-274, 1977.
- 12) 中山晶一郎, 北村隆一: 帰納的推論に基づく経路選択行動と道路交通システムの動態に関する研究, 土木学会論文集, No.660/IV-49, pp.53-63, 2000.
- 13) Smith, M.J.: The Stability of a Dynamic Model of Traffic Assignment —An Application of a Method of Lyapunov, *Transportation Science*, Vol. 18, pp. 245-252, 1984.
- 14) Friesz, T.L., Bernstein, D., Mehta, N.J., Tobin, R.L. and Ganjalzadeh, S.: Day-to-Day Dynamic Network Disequilibria and Idealized Traveler Information Systems, *Operations Research*, Vol. 42, pp. 1120-1136, 1994.
- 15) Zhang, D. and Nagurney, A.: On the Local and Global Stability of a Travel Route Choice Adjustment Process, *Transportation Research*, Vol. 30B, pp. 245-262, 1996.
- 16) Nagurney, A. and Zhang, D.: Projected Dynamical Systems in the Formulation, Stability Analysis, and Computation of Fixed-Demand Traffic Network Equilibria, *Transportation Science*, Vol. 31, pp. 147-158, 1997.
- 17) Mahmassani, H.S.: Dynamic Models of Commuter Behavior: Experimental Investigation and Application to the Analysis of Planned Traffic Disruptions, *Transportation Research*, Vol. 24A, pp. 465-484, 1990.
- 18) 飯田恭敬, 内田敬, 宇野伸宏: 交通情報の効果を考慮した経路選択行動の動的解析, 土木学会論文集, No.470/IV-20, pp. 77-86, 1993.
- 19) 小林潔司, 安野貴人: 室内実験によるドライバーの合理的期待に関する仮説検定, 土木計画学研究・論文集, No.12, pp. 493-500, 1995.
- 20) 中山晶一郎, 藤井聡, 北村隆一, 山田憲嗣: 旅行時間の思い込み認知と繰り返し行動に伴う選択肢の絞り込みについての実験研究, 土木学会論文集, No.709/IV-56, pp.51-60, 2002.
- 21) 例えば, Savage, L.J.: *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1954.
- 22) Fourceaud, C., Gourieroux, C., and Pradel, J.: Learning Procedures and Convergence to Rationality, *Econometrica*, Vol. 54, pp. 845-868, 1986.
- 23) Bray, M.M. and Savin, N.E.: Rational Expectations Equilibria, Learning, and Model Specification, *Econometrica*, Vol. 54, pp. 1129-1160, 1986.
- 24) Brown, G.W.: Iterative Solution of Games by Fictitious Play, *Activity Analysis of Production and Allocation*, Koopmans, T.C. ed., Wiley, New York, pp. 374-376, 1951.
- 25) Robinson, J.: An Iterative Method of Solving a Game, *Annals of Mathematics*, Vol. 24, pp. 296-301, 1951.
- 26) Fudenberg, D. and Levine, D.K.: *Theory of Learning in Games*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1998.
- 27) 例えば, O'Hagan, A. and Forster, J.: *Kendall's Advanced Theory of Statistics, Vol. 2B: Bayesian Inference*, 2nd ed., Oxford University Press, New York, 2004.
- 28) Fudenberg, D. and Kreps, D.M.: Learning Mixed Equilibria, *Games and Economic Behavior*, Vol. 5, pp. 320-367, 1993.
- 29) Kaniovski, Y.M. and Young, H.P.: Learning Dynamics in

- Games with Stochastic Perturbations, *Games and Economic Behavior*, Vol. 11, pp. 330-363, 1995.
- 30) Benaim, M. and Hirsch, M.W.: Mixed Equilibria and Dynamical Systems Arising from Fictitious Play in Perturbed Games, *Games and Economic Behavior*, Vol. 29, pp. 36-72, 1999.
- 31) Hofbauer, J. and Sandholm, W.H.: On the Global Convergence of Stochastic Fictitious Play, *Econometrica*, Vol. 70, pp. 2265-2294, 2002.
- 32) Zangwill, W.I.: *Nonlinear Programming: A Unified Approach*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
- 33) Elaydi, S.N.: *An Introduction to Difference Equations*, 2nd Ed., Springer, New York, 1999.
- 34) 今野浩, 山下浩: 非線形計画法, 日科技連出版社, 東京, 1978.

(2006. 8. 10 受付)

DAY-TO-DAY DYNAMICS OF ROUTE CHOICE BEHAVIOR AND PROCESS OF TRAFFIC NETWORK EQUILIBRIUM

Shoichiro NAKAYAMA

In this study, we assume that each driver under day-to-day dynamic transportation circumstances chooses a route based on Bayesian learning, and develop a day-to-day dynamical model of network flow. It is found in this model that the driver with Bayesian learning chooses the route which has the minimum travel time the most frequently. Furthermore, we find that an equilibrium point of the day-to-day dynamical model is identical to the Wardrop's equilibrium, and the Wardrop's equilibrium is globally asymptotically stable if initial recognition among drivers is dispersed widely, and the day-to-day dynamical system always converges to the Wardrop's equilibrium.