

混合モード荷重下にある異方弾性体内の き裂のエネルギー解放率の数値解析†

橋本 堅一*, 鱸 洋一**, 矢富 盟祥***

Numerical Analysis for the Energy Release Rate of Crack in Anisotropic Body under Combined Loadings

by

Ken-ichi HASHIMOTO*, Youichi SUZUKI** and Chikayoshi YATOMI***

For a crack in an anisotropic elastic body subjected to remote inclined load under a plane stress condition, the energy release rate at the onset of crack kinking is analyzed by numerical analysis. The analysis is based on the path-independent E-integral using the finite element method. The E-integral gives the energy release rate at the onset of crack kinking for hyperelastic bodies. The eight-noded and six-noded isoparametric finite elements are used and the integral paths lie along the sides of the finite element. The numerical integration of the E-integral formula can be evaluated directly by using the nodal forces and nodal displacements. After the path independency is examined in an isotropic elastic body subjected to the remote constant tension stress, it is shown that the results for inclined loads agree very well with the results by Wu (1978). For the anisotropic bodies, in the cases of different planes of symmetry, the energy release rate is computed first under the perpendicular loading to the crack surface and then under the inclined loading. For the former, the results agree well with the perturbation solutions by Gao and Chiu (1992). For the inclined load, the direction of the maximum energy release rate is more sensitive to the direction of loading than the direction of the plane of symmetry.

Key words : Anisotropic elastic body, Fracture mechanics, Finite element method, Crack propagation, E-integral, Path-independent integral, Energy release rate, Crack kinking, Combined mode loading

1 緒 言

岩石や岩盤は程度の違いはあるが、異方性挙動を示し、破壊あるいは崩壊を議論するうえで異方性を加味した変形挙動の解明が重要となる。岩石についてはほとんどの火成岩、堆積岩で異方性挙動が認められ、¹⁾破壊に大きな影響を与えることが知られている。特に地下構造物の理想的な対象となる堅固な岩盤を構成する花崗岩は直交異方性材料としてよく知られており、弾性係数、引張強度、圧縮強度、破壊じん性などに対して異方性主軸方向での違いが議論されている。開発の盛んな複合材料もそのほとんどが繊維補強複合材料であるため、著しい異方性を示すものがある。これらは軽量にして高強度、高じん性を目的にして開発されており、今後、ますます需要が増えてくるものと考えられる。その他にも、木材など力学的変形挙動を考察するうえで異方性を考慮して対処しなければならない材料が多い。これらの中で人為的に開発された複合材料は降伏点強度と破壊じん性に相関が成り立たない場合が多いため強度を議論するには材料力学的な検討の他に破壊力学的なアプローチも不可欠である。

異方性材料の破壊進展方向を破壊力学的に解明しよう

とする場合、破壊じん性値も異方的である場合が多いので注意が必要である。しかし最大エネルギー解放率破壊クライテリオンを使用する場合は、異方性材料に対しても、破壊じん性値を等方的であると仮定できる場合もあるという報告もあり、²⁾非線形材料への応用も可能であることを考慮すれば、エネルギー解放率クライテリオンは今後注目される破壊クライテリオンの一つとして挙げられよう。破壊挙動を2次元的に議論するうえでは少なくともモードIとモードIIの混合モードの解析が重要となる。混合モード荷重下のエネルギー解放率の解析は、等方性材料についてはき裂が折れ曲がる場合に対してはかなり正確な値が報告されている。^{3), 4)}また異方性材料については、荷重方向がき裂面に垂直な場合に限り、いくつか報告されている。^{2), 5), 6)}さらに、き裂先端近傍のみを異方性として扱った有限要素解析も見受けられる。⁷⁾しかしながら、異方性の主軸方向とき裂面の方向が異なる状況の下で、斜荷重を受ける場合の報告は筆者等の知る限りでは皆無である。そこで本研究では斜荷重を受け混合モード荷重下にある場合を含めた異方弾性体内のき裂の折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を有限要素法による経路

† 原稿受理 平成8年11月11日 Received Nov. 11, 1996

* 正会員 徳山工業高等専門学校土木建築工学科 〒745 徳山市久米, Dept. of Civil Eng. and Arch., Tokuyama College of Tech., Kume, Tokuyama, 745

** 金沢大学大学院 〒920 金沢市小立野, Graduate Student, Kanazawa Univ., Kodatsuno, Kanazawa, 920

*** 正会員 金沢大学工学部土木建設工学科 〒920 金沢市小立野, Dept. of Civil Eng., Kanazawa Univ., Kodatsuno, Kanazawa, 920

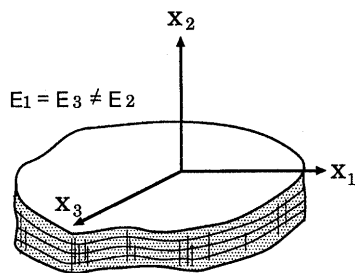


Fig. 1. Transversely isotropic body.

独立な E 積分法^{8), 9)}を用いた方法で数値解析を行った。 E 積分による方法は、有限要素法のモデル形状や境界条件を適当に設定することにより、不均質な場合などの種々の異方性材料中の複雑なき裂進展挙動の考察も可能になる。

2 解析モデルと解析方法

線形異方弾性体を 3 次元応力-ひずみ関係で完全に記述するには、対称性を加味しても 21 個の独立した弾性定数が必要である。2 次元で考えるとこれが最大で 6 個に減る。本研究では実際の異方性材料によくみられる直交した方向の弾性係数の違いを 2 次元問題で考えるため比較的扱いの容易な面内等方性（横等方性）材料を考えた (Fig. 1)。ここで応力とひずみの関係をマトリクス表示すると線形異方弾性体の場合も

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] \quad (1)$$

で表され、応力マトリクスあるいは弾性マトリクスと呼ばれる $[D]$ は面内等方性材料では、平面応力を仮定すると図中 x_1 - x_3 平面内の変形に関するヤング係数、ポアソン比およびせん断係数をそれぞれ E_1 , ν_1 , G_1 , また x_2 方向に関するヤング係数、ポアソン比およびせん断係数をそれぞれ E_2 , ν_2 , G_2 とし、新たな定数 n ($= E_1/E_2$) と m ($= G_2/E_2$) を導入すると

$$[D] = \frac{E_2}{1 - n\nu_2^2} \begin{bmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1 - n\nu_2^2) \end{bmatrix} \quad (2)$$

となる。ただし、ここでは $G_1 = E_1/2(1 + \nu_1)$ および $E_1\nu_2 = E_2\nu_1$ を仮定しており、独立な弾性係数は 4 個となっている。

斜向荷重を受ける異方弾性体内のき裂を解析する場合、基本的なモデルの一つとしてとして Fig. 2 に表されるような無限直交異方弾性体内の単一き裂が無限遠方で一様引張応力 σ_0 を受ける様なモデルが考えられる。エネルギー解放率に影響を与えるパラメータとしては前記の弾性係数の他にき裂長さ 2ℓ 、無限遠応力の大きさ σ_0 およびその斜向角 θ_L (Loading angle), 異方性主軸の斜向角 θ_M (angle of Material anisotropic axis direction), き裂の折れ曲がり角 θ_K (Kinking angle) が挙げられる。ここでもし線形等方弾性体で荷重の斜向角およびき裂の折れ曲がり角が零の場合 ($\theta_L = 0, \theta_K = 0$) は、よく知られた応力拡大係数の厳密解 ($\sigma_0 = \sqrt{\pi\ell}$) により容易にエネルギー解放率の厳密解が求められる。また荷重の斜向

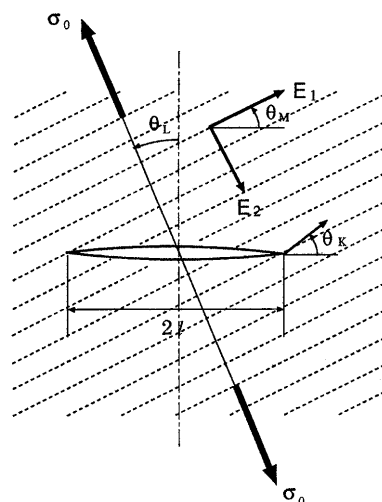


Fig. 2. Crack in an anisotropic body subjected to a remote inclined load.

角 θ_L およびき裂の折れ曲がり角 θ_K を考慮したエネルギー解放率は Wu⁴⁾ や Hayashi and Nemat-Nasser³⁾ によりエネルギー解放率が半理論的に得られている。さらに異方線形弾性体として扱い、荷重の斜向角が零のものは Obata 等⁶⁾ や Gao and Chiu²⁾ によって積分方程式を数値的に解いたり、摂動近似解によって半理論的あるいは近似的に得られている。本研究はこれらを組み合わせたモデルを解析しようとするもので、Fig. 2 に、エネルギー解放率に影響を与えるすべてのパラメータが図示されている。無限板を近似した有限要素モデルは中央き裂長さ 2ℓ に対して一辺が 20 倍の寸法の正方形としている。このモデルと同一幅の中央き裂を有する等方線形弾性体無限長帯板の一樣引張モデルの級数近似解と無限板中の中央き裂の厳密解との差は 0.25% 程度であった。有限要素モデルはき裂先端近傍に 6 節点三角形アイソパラメトリック要素を、き裂先端から離れた部分は 8 節点四角形アイソパラメトリック要素を用いている。その概要を Fig. 3 に示す。 E 積分による方法は全エネルギー法と呼ばれる方法を経路独立積分に一般化したものでもあり、き裂長さの異なる 2 つのモデルの解析が必要である。その 2 つの解析モデルのうちき裂が進展する前の基本モデルについては節点数が 920、要素数が 332 であり、き裂進展モデルについては要素数が同じで節点数は 922 である。ひずみエネルギーを持つ弾性体（超弾性体）においては、き裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を与える E 積分は一般に Fig. 4 に示すような不均質物体 B 内を準静的に進展するき裂に対して物体 B を線形弾性体と仮定すると次式で与えられ、Sanders の式¹⁰⁾と同様になる。

$$E(\ell) = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2} s \cdot \frac{\partial u}{\partial \ell} - \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial \ell} \cdot u \right) ds \quad (3)$$

ここで ℓ による偏微分は右微分係数 ($\ell \leftarrow 0$) を表し、 2ℓ は進展き裂の全長、 Γ はき裂先端を含む領域の境界、 u , s は Γ 上での変位ベクトルおよび表面応力ベクトルを示している。この経路積分を計算するにあたっては、

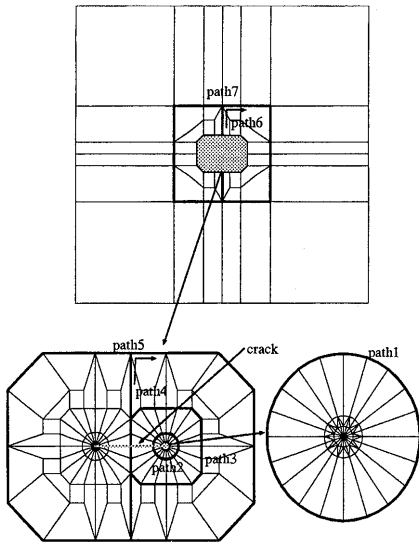


Fig. 3. Finite element meshes and integral paths.

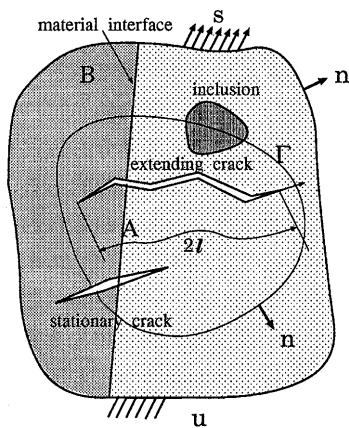


Fig. 4. Quasi-stationary extending crack.

E 積分は, J 積分とは異なり, 経路上の変位ベクトルと応力ベクトルだけで評価できる利点を生かし, 積分経路を要素辺上に設定し, 式中の微分項を 2 点差分近似することにより, 次式を用いた.

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ t_i(\ell) \cdot \frac{u_i(\ell + \Delta\ell) - u_i(\ell)}{\Delta\ell} - \frac{t_i(\ell + \Delta\ell) - t_i(\ell)}{\Delta\ell} \cdot u_i(\ell) \right\} \quad (4)$$

ここで n は経路における節点の数, t_i は各節点において算出された表面応力ベクトル, u_i は各節点における変位ベクトル, そして $\Delta\ell$ は基本モデルとき裂進展モデルのき裂長さの差である. また (ℓ) および $(\ell + \Delta\ell)$ は, それぞれ基本モデルとき裂進展モデルを表している. 積分経路は 7 本 (Fig. 3 の太線参照) 設け, き裂の折れ曲がり角は 19 方向 (Fig. 3 き裂先端部参照) を考えた. $\Delta\ell$ は全エネルギー法同様に, 試行錯誤的に決める必要があるが, ここでは, 種々の長さの $\Delta\ell$ に関し数値計算を試み理論解のある場合でも最も精度のよかった $\Delta\ell = 0.078\ell$ を使用した. 解析にあたっては既報の厳密解, 半理論解, 近似解と比較した後, 混合モード荷重下の異方

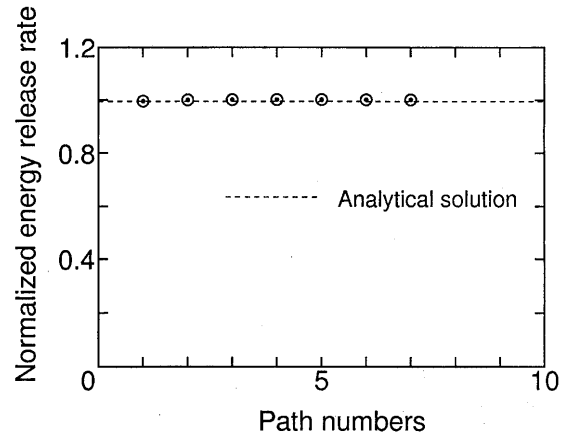


Fig. 5. E -integral values for several paths in a centered crack body subjected to a remote tension stress.

線形弾性体内き裂のエネルギー解放率について考察する.

3 結果と考察

この章では, 最大エネルギー解放率クライテリオンを用いるが, 破壊じん性値に関しては現在までに十分なデータがないことや簡便性のため, その値は等方的であると仮定して結果の考察を行う. 最初に等方線形弾性体 ($E_1/E_2 = 1$) がモード I ($\theta_L = 0$) の荷重を受け, き裂が直進する場合 ($\theta_K = 0$) の解析を行った. Fig. 5 に結果を各経路におけるエネルギー解放率で示す. 縦軸は計算されたエネルギー解放率を厳密解で正規化した値を与えており, 横軸は進展き裂先端から近い順, あるいは経路長さの短い順に番号をつけた経路番号 (Fig. 3 参照) を示している. どの経路でも厳密解との誤差は 0.5% 以内で解析されており, 進展き裂に一番近い経路を除けば 0.2% 以内と高い精度で解析されている. 経路の独立性については最大 0.6% の誤差があったが, 外側の 5 本の積分経路では 0.05% 以内と非常に高い精度で一致していた. ここで, J 積分を用いた場合は, 進展き裂先端のみを含む経路と両端を含む経路では値が異なり経路独立性が失われることに注意したい. 以下の解析においても経路の独立性については同様な傾向であったため, 以下の議論は外側の 5 本の経路の平均値をもって行う.

次に同じ等方線形弾性体で引張荷重の荷重角度 θ_L が $\pi/10, \pi/5, 3\pi/10, 2\pi/5$ の場合の解析を 19 のき裂の折れ曲がり方向 (θ_K を $-\pi/10$ から $\pi/10$ まで $\pi/10$ 刻みで与えている.) についてまとめた. ここで荷重状態は Fig. 6 に示すように一軸一様斜向引張荷重を, 多軸混合一様分布荷重としてモデル境界へ与えることで実現している. Fig. 7 にその結果を示している. ここで縦軸は前述の厳密解で正規化したエネルギー解放率を示しており, 横軸はき裂の折れ曲がり角度 θ_K を示している. また実線や破線などで結んだ細線は Wu の結果⁴⁾を与えており円や四角形などでマーキングしたものが今回の解析結果である. 荷重角度をわずかに変えて斜向荷重にするとモード I のときの最大値より大きなエネルギー解放率となる折れ曲がり角度が存在することはすでに報告され

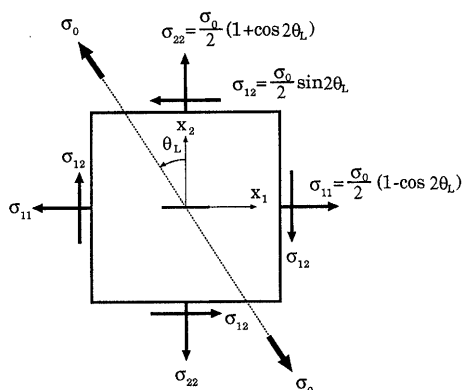


Fig. 6. Combined stress distributions which are equivalent to an inclined tension stress.

ているが^{3), 4)}本解析でもその存在 ($\theta_L = 0.1\pi$ の場合)が示された。最大エネルギー解放率となる折れ曲がり角 θ_K は載荷角度 θ_L が大きくなるにつれて大きくなるが、その方向についても Wu の結果とよく一致していた。またエネルギー解放率の値については最大で Wu 等の解析とは約 4% の差異であり、総じてかなりよい精度であると言える。

3 番目の解析モデルとして異方線形弾性体に荷重方向がき裂面に直交している場合 ($\theta_L = 0$) を考えた。用いた弾性係数は 2 章で議論した諸量のなかで E_1 を E_2 の 10 倍として、 $\nu_1 = 0.3$ とした。その他の諸量は 2 章の述べたものと同様である。解析した異方性主軸方向 (θ_M) は $0, \pi/12, \pi/6$ である。結果は Fig. 8 に示す。ここで縦軸は E_1, ν_1 の材料定数をもつ場合の等方線形弾性体の厳密解で無次元化しており、横軸は折れ曲がり角 θ_K を示している。図中細線で結んだものは Gao 等の摂動近似解による結果²⁾を示しており、マーキングしたものが本研究での結果を示している。このモデルはき裂面に直交する方向の弾性係数 (E_2) がき裂面方向の弾性係数 (E_1) の $1/10$ であるので、 E_1, ν_1 の材料定数を持つ等方線形弾性体のき裂にくらべて、かなり大きなエネルギー解放率が得られ、 E_1, ν_1 の弾性定数を持つ等方性物体の場合よりき裂が進展しやすくなるといえる。また異方性主軸方向を変えることにより ($\theta_M \neq 0$)、き裂が直進しない傾向も顕著に表れている。Gao 等の結果と比較すると最大エネルギー解放率の方向はよく一致しているが、エネルギー解放率自体は Gao 等の摂動近似解に対して最大で約 4% 程度の差異が現れる場合もあった。また異方性主軸方向がき裂に対して傾斜していない場合 ($\theta_M = 0$) では、エネルギー解放率は非常によく一致していた。

最後に異方線主軸方向とき裂面の方向が異なる状況 ($\theta_M \neq 0$) の下で斜荷重を受け混合モード荷重下となる場合を解析した。この解析には比較する報告がないので、荷重の斜向性効果と異方性効果を比較考察するため載荷荷重方向は線形等方弾性体でエネルギー解放率の最大値が最も大きくなった角度 $\theta_L = \pi/10$ に固定して、異方性主軸方向はエネルギー解放率の最大値が比較的大きい

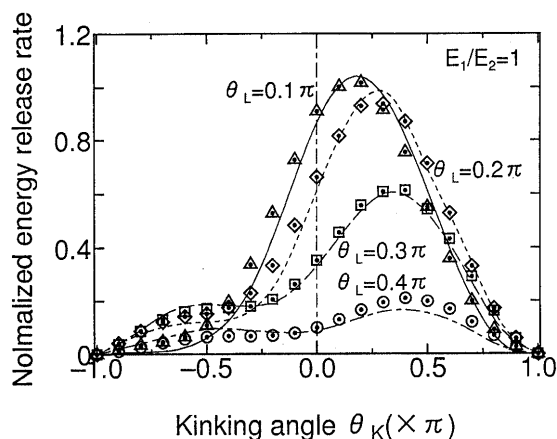


Fig. 7. Normalized energy release rate in an isotropic body subjected to an inclined load.

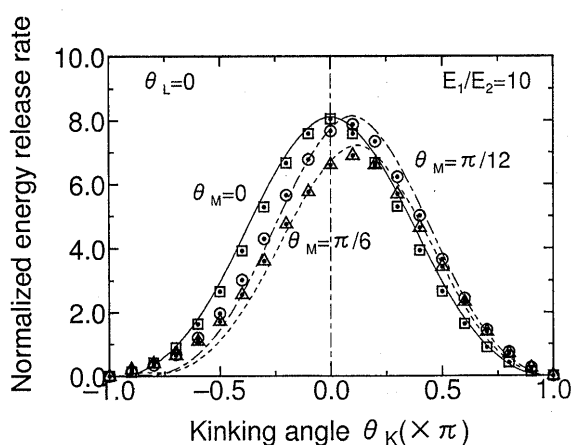


Fig. 8. Normalized energy release rate in an anisotropic body under the perpendicular loading to the crack surface.

$\theta_M = \pi/12$ と、荷重がき裂面と直交する場合には、載荷荷重方向と反対方向に最大エネルギー解放率が存在する場合 $\theta_M = -\pi/12$ とした。用いた弾性係数は前の異方性解析に用いた値と同様である。結果を Fig. 9 に示す。縦軸は前の異方性解析同様無次元化している。その結果 $\theta_M = \pi/12$ の場合は荷重の斜向性効果と異方性効果が相乗し、これまでの解析の中で最も大きな最大エネルギー解放率また $\theta_L = \pi/10$ としては最も大きな最大エネルギー解放率を持つ角度が得られた。また $\theta_M = -\pi/12$ の解析では逆の効果が現れ、最大エネルギー解放率は前者に比べ、かなり低い値になった。さらに、最大エネルギー解放率を持つ角度もかなり小さいものになったが、この場合負の方向にならなかった。すなわち、エネルギー解放率の最大方向に及ぼす影響として、荷重の斜向方向の違いによる効果が、異方性主軸の違いによる効果より大きかった。

これらのことは前の 2 つの解析よりある程度予測できる結果ではあったが、今後、さらに複雑な境界条件、構成関係のもとでの解析をする場合、今回用いた解析結果は有用な資料として位置付けられると考える。

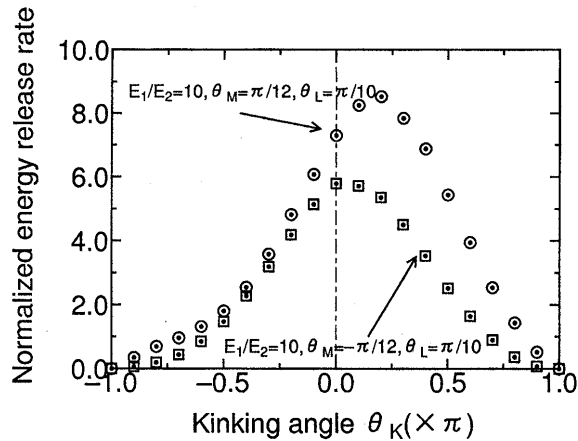


Fig. 9. Normalized energy release rate in an anisotropic body under an inclined loading.

4 結 論

本研究では異方線形弾性体内のき裂が、斜向引張荷重を受け混合モード荷重下にあるき裂のエネルギー解放率を有限要素法を用いた E 積分法で解析を行った。はじめに無限板等方弾性体中のき裂がモード I の荷重を受ける場合、モード I とモード II の混合モード荷重を受ける場合、更には異方線形弾性体に荷重方向がき裂面と直交する場合を解析し、既報の結果と比較した。その結果、等方弾性体のモード I の荷重のき裂が直進する場合の解析は厳密解に対して 0.2% 前後の非常に高い精度が得られた。また等方弾性体におけるモード I とモード II の混合モード荷重下や荷重がき裂面に直交する場合の異方弾性体の解析ではき裂が直進する場合に限り、既報の最大エネルギー解放率に対して、差異は 1% 前後という高い一致が見られた。そして折れ曲がり時の解析では異方性主軸方向がき裂面に対して直交するときでは、解析された既報のエネルギー解放率に対して 2% 前後の差異で解析できたが、異方性主軸が傾いたり、斜向荷重下になると最大で 4% の差異がでる解析もあった。しかし、き裂の折れ

曲がり予測される最大エネルギーの角度はおおよそ既報の解析と一致しており、異方性主軸方向とき裂面の方向が異なる状況下で、斜向荷重を受けた混合モード下の異方弾性体内き裂を解析する上でも大きな支障はないものと考えられる。精度については、モデルのメッシュ分割を変えることにより、かなり高い精度で解析でき、改善されることが確認されており、精度を上げることは可能である。異方性主軸方向とき裂面方向が異なる状況下で、斜向荷重を受けた混合モード荷重下の異方弾性体内き裂の解析は、エネルギー解放率最大方向の変化に及ぼす影響が荷重の斜向効果が異方性効果より大きい 2 つの極端な場合のみ解析例を示したが、本 E 積分による解析法は、今後新しい材料の開発に伴い更に複雑な構成関係を用いられることが予測されることや境界条件の複雑な供試体レベルでの破壊挙動の議論の必要性などを考慮すれば有用な解析法として期待される。

参 考 文 献

- 1) 工藤洋三, 橋本堅一, 佐野 修, 中川浩二, 材料, **38**, 209 (1989).
- 2) H. Gao and C. Chiu, Int. J. Solid Structure, **29**, 947 (1992).
- 3) K. Hayashi and S. Nemat-Nasser, J. Appl. Mech., **48**, 520 (1981).
- 4) C. H. Wu, J. Appl. Mech., **45**, 553 (1978).
- 5) 橋本堅一, 矢富盟祥, 石田 啓, 土木学会論文集, **I-31**, 513, 17 (1995).
- 6) M. Obata, S. Nemat-Nasser and Y. Goto, J. Appl. Mech., **56**, 858 (1989).
- 7) R. Li and A. Chudnovsky, Int. J. Fracture, **63**, 247 (1993).
- 8) 矢富盟祥, 橋本堅一, 石田 啓, 日本機械学会論文集, **A-61**, 2521 (1995).
- 9) 橋本堅一, 矢富盟祥, 石田 啓, 日本機械学会論文集, **A-61**, 2529 (1995).
- 10) J. L. Sanders, J. Appl. Mech., **27**, 352 (1960).